БИБЛИОГРАФИЯ

Л. Ландау и Л. Пятигорский. Механика. (Теоретическая физика под общей редакцией проф. Л. Д. Ландау, т. I). Гостехиздат. Москва — Ленинград, 1940, стр. 200, ц. 7 руб.

Рецензируемая книга *) представляет первую часть пятитомного курса теоретической физики, намеченного профессором Ландау. Во введении ей предпослано поэтому определение предмета теоретической физики. Это определение содержит ряд спорных положений. Некоторые из них заслуживают быть отмеченными, так как они повлияли и на всё изложение.

Авторы указывают, что не только установление общих законов, но «даже нахождение следствий из общих законов нуждается в предварительном экспериментальном изучении явлений». Это положение до известной степени верно, ибо, как справедливо говорят авторы, «без такого изучения часто невозможно установить, какие из громадного числа участвующих факторов существенны, а какими можно пренебречь». Но оно же таит в себе опасность ошибки, которая состоит в подмене вывода следствий из общих законов подгонкой под наперёд известный из эксперимента результат. Целый ряд примеров такой ошибки можно найти и в рецензируемой книге.

По мнению авторов, теоретическая физика должна иметь исключительно качественный характер, определение же численных значений физических величин, вообще говоря, в её задачи не входит. С этим положением трудно согласиться, так как без умения определять численные значения физических величин нельзя говорить и о проверке общих физических законов, которые ведь, по словам самих авторов, проявляются в форме зависимости между физическими величинами, т. е. между их численными значениями.

Математическую строгость авторы считают не только ненужной, но и весьма вредной. Авторы утверждают, что «слишком точные вычисления... могут даже привести к тому, что существующие в данном явлении закономерности вообще выпадут из рассмотрения». Как это может случиться — нам совершенно непонятно. Если уже произошёл такой конфуз, что «закономерности выпали из рассмотрения», то винить в этом нужно, нам кажется, не математическую строгость, а неправильную постановку задачи. Это — в том случае, когда соблюдена известная математическая строгость. При отсутствии же математической строгости закономерности действительно (и притом совсем легко) могут выпасть из рассмотрения.

Отрицательное отношение авторов к математической строгости распространяется, повидимому, и на строгость в рассуждениях вообще. Во всяком случае, данная книга изобилует примерами нестрогих рассуждений. Некоторые из них приводят и к неверным выводам. Если число таких неверных выводов в данной книге сравнительно невелико, то это приходится приписывать простоте предмета и тому факту, что желаемый результат известен авторам наперёд. Такой взгляд на строгость в рассуждениях приводит, однако, к тому, что читателю остаётся непонятным, что из чего вытекает и

---

*) Настоящая рецензия поступила в редакцию в июле 1941 г. Печатание её задержалось ввиду перерыва в выходе журнала.

почему. Между тем, основная цель всякого учебника как раз и должна состоять, по нашему мнению, в том, чтобы показать читателю логическую связь между разбираемыми в нём понятиями.

Переходим к анализу основного содержания книги.

Первые две главы содержат (или должны, по мысли авторов, содержать) изложение основных принципов механики, остальные главы — приложения их к отдельным задачам.

В первой главе прежде всего следует отметить отсутствие определения предмета механики. На стр. 13 встречается утверждение: «принцип Гамильтона выражает собою закон движения всякой механической системы». Это утверждение неверно, так как бывают системы неголономные и диссипативные (с трением). О них упоминается, правда, совсем кратко, и в этой книге (§§ 34 и 49). Во всяком случае, рассмотрение таких систем должно входить в предмет механики.

Отсутствует также разъяснение основных механических понятий, в том числе понятий силы и массы. Не используется огромное преимущество механики в методическом отношении — её наглядность. Поэтому первая глава книги может быть понятна только человеку, уже знающему механику.

В основу построения механики полагается принцип наименьшего действия (начало Гамильтона). Авторы исходят здесь из ошибочного представления, будто «при заданных внешних условиях движение вполне определяется координатами начала и конца движения» (стр. 152). Что это представление неверно, особенно ясно видно на примере свободного движения материальной точки на поверхности шара. Если взять в качестве начальной и конечной точек два полюса, меридиан, по которому она движется, останется неопределённым до тех пор, пока не будет указано направление её начальной скорости.

На самом деле, когда даны уравнения Лагранжа, движение определяется начальными координатами и начальными скоростями. А поскольку задание этих последних не эквивалентно заданию конечных координат, нельзя говорить и об эквивалентности между началом Гамильтона, с одной стороны, и уравнениями Лагранжа с начальными условиями, с другой стороны.

По этой причине полагать в основу механики принцип наименьшего действия едва ли правильно, даже и независимо от того, что этот принцип применим не ко всем системам. Мы уже не говорим о том, что принцип наименьшего действия труднее уравнений движения и что, по нашему мнению, нужно начинать с более лёгкого: в вопросах методики возможны разные мнения.

Говоря о принципе наименьшего действия, мы имели в виду известное экстремальное свойство интеграла действия: исчезновение его первой вариации. Авторы же понимают это наименование буквально: они считают, что всегда интеграл действия «для действительного движения имеет минимальное значение» (стр. 13). Что это неверно, показывает тот же пример движения точки на шаре. Если начальное и конечное положения не являются полюсами, то возможно «прямое» движение и «кругосветное». Для прямого движения интеграл действия имеет минимум, а для кругосветного — нет. В общем случае можно утверждать только то, что интеграл действия имеет стационарное значение в смысле равенства нулю его первой вариации.

Следует осудить тенденцию авторов выводить все, даже очевидные, вещи из далеко неочевидных общих принципов, притом нестрогим образом. Характерным является следующий пример. Авторы не дают физического определения массы, из которого бы вытекало, что она всегда положительна. Масса определяется авторами, как множитель пропорциональности в функции Лагранжа свободной материальной точки. Ясно, что из такого определения ровно ничего не может следовать, так как на этот множитель попросту можно сократить. Между тем, авторы считают, что на основании такого определения можно из принципа наименьшего действия доказать положительность массы. При этом авторы понимают принцип наименьшего действия буквально, т. е. неверно, и это понимание является для них существенным. Мы охотно верим, что масса положительна, но никак не можем согласиться, что это вытекает из их рассуждений.

Непонятны рассуждения, предпосланные введению инерциальной системы координат, и едва ли правильно само определение такой системы, как «неподвижно связанной с какими-либо свободно движущимися телами» (стр. 17). Под это определение подходила бы система, связанная со свободно летящим вращающимся снарядом.

На стр. 22 говорится: «Функция Лагранжа обладает весьма важным свойством аддитивности». Но тут же приведена формула, из которой следует, что она этим свойством не обладает, ибо в неё входит взаимная потенциальная энергия частиц, которая не аддитивна. Так и остаётся неизвестным, как же, в конце концов: обладает функция Лагранжа этим важным свойством или нет?

Понятие силы вводится лишь в § 8, причём силы, зависящие от скорости, первоначально не рассматриваются. Таким образом, выпадают из рассмотрения не только диссипативные силы, для которых функция Лагранжа не существует, но и гироскопические и магнитные. Когда же эти силы, а также силы, происходящие от реакций связей (голономных и неголономных), наконец (§ 34, § 49 и др.), подвергаются рассмотрению, остаётся неясной их связь с первоначальным определением силы, данным в § 8.

Можно было бы возражать также против употребления термина «импульс» в смысле «количество движения». Механика — наука не новая, и в русской литературе установилась определённая терминология. Под «импульсом силы» или просто «импульсом» принято понимать интеграл от силы по времени, а под «количеством движения» — произведение массы на скорость. Приращение количества движения равно импульсу силы, но смешивать эти два понятия не следует (так же, как не следует смешивать понятия силы и произведения массы на ускорение, которому она равна).

В главе о малых колебаниях неправильно трактуется система линейных уравнений для амплитуд (стр. 83). Отсутствует совершенно необходимое, на наш взгляд, и к тому же очень простое доказательство вещественности корней характеристического уравнения (частот). Случай кратных корней чрезвычайно важный на практике, не только не рассматривается, но отсутствует даже упоминание о том, что такой случай возможен. В связи с этим отсутствует и указание, что только благодаря особому виду уравнений механики в случае кратных корчей не получается вековых членов. Решение системы уравнений, а также нормальные координаты выражены через миноры определителя; в случае же кратных корней все эти миноры, как известно, равны нулю.

Неудовлетворительно изложен метод последовательных приближений в случае ангармонических колебаний (§ 33). Принятый авторами способ вычисления не даёт зависимости периода от амплитуды и приводит к вековым членам в выражении для координат.

Неудовлетворительно изложено многое из того, что относится к случаю диссипативных сил (§ 34). Непонятно, какие соображения, кроме математической простоты, заставили авторов ограничиться случаем линейной зависимости сил трения от скорости. Если же принять линейную зависимость, то, в противоположность утверждению авторов, линейные члены в уравнениях движения вполне произвольны: разбивая их на гироскопические (антисимметричные) и диссипативные (симметричные), мы всегда получим определённую диссипативную функцию. Статистическая физика здесь абсолютно не при чём, и ссылка на неё на стр. 97 непонятна.

На стр. 106 составляются уравнения колебаний с затуханием и их характеристический определитель. Корни его не исследуются; о них сказано только следующее: «Из физических соображений ясно, что вещественные части этих корней будут... отрицательны». Нам кажется совершенно недопустимым ссылаться на физические соображения в процессе решения такой задачи, которая уже полностью формулирована математически. К тому же такая ссылка не избавляет от необходимости математического исследования: если считать упомянутые физические соображения очевидными, то во избежание нелогичности требуется специальное доказательство, что принятая формулировка задачи им не противоречит. Подобная нелогичность допустима, быть может, в особенно сложных задачах, где математическое исследование затруднительно, но никак не в задаче о малых колебаниях, где всё получается весьма просто.

Глава V о движении твёрдого тела, повидимому, особенных неточностей не содержит. Напротив того, глава VI о канонических уравнениях содержит ряд крупных промахов.

Непонятно (да и ненужно) сказанное в начале § 52 (стр. 141) о производящей функции. Непонятно даже, от каких переменных она зависит. Об ошибке в § 55 (стр. 152) мы уже упоминали при разборе данной авторами трактовки принципа наименьшего действия. Неправилен вывод в § 56 (стр. 155) уравнений Гамильтона из вариационного начала: вариации δq и δp не являются независимыми. § 58 начинается с попытки рассмотрения общего интеграла уравнения Гамильтона-Якоби (который для механической задачи вовсе не нужен). Попытка эта не доводится до конца: на следующей же странице (стр. 163) читаем: «Мы не будем доказывать, что это — общий, а не частный интеграл». § 59 (стр. 164) начинается с парадоксального утверждения: «Общего способа интегрирования уравнения Гамильтона-Якоби не существует». Чем же являются в таком случае метод Коши, первый и второй методы Якоби и другие известные методы? Если же авторы под интегрированием разумеют интегрирование в конечном виде, то их утверждение становится тривиальным.

§ 62 посвящён в основном классификации типов движения механических систем. Параграф этот заслуживает особого рассмотрения, так как содержит особенно большое количество ошибок. Рассуждения здесь претендуют на общность, которой, однако, не обладают. Во многих случаях нельзя уловить даже хода мысли. Большинство утверждений сомнительно, некоторые могут быть опровергнуты простыми примерами. Попытаемся проследить некоторые из них.

На стр. 178 содержится попытка доказательства явно неверного утверждения: если координата q стремится к конечному пределу (лимитационное движение), то соответствующий импульс p должен неограниченно возрастать. Утверждение это может быть опровергнуто примером математического маятника, совершающего движение, исходя из положения неустойчивого равновесия: в этом примере импульс стремится к нулю, а не к бесконечности. Посмотрим теперь, в чём состоит «доказательство» этого утверждения.

Исходными являются равенства:

$$p=\frac{\partial S_0(q,\alpha)}{\partial q}; \qquad \beta=\frac{\partial S_0(q,\alpha)}{\partial \alpha}, \tag{1}$$

откуда

$$\frac{\partial\beta}{\partial q}=\frac{\partial p}{\partial\alpha}. \tag{2}$$

Далее авторы рассуждают так:

«Исходя из того, что при $t\to\infty$ переменная β стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, а переменная q к конечному пределу, мы можем заключить, что

$$\frac{\partial\beta}{\partial q}\to\pm\infty».$$

Это заключение опровергается примером

$$q(\beta)=\frac{\sin(a\beta^2)}{\beta}; \quad \beta=\omega t. \tag{3}$$

Здесь при $t\to\infty$ будет $q\to 0$, тогда как $dq/d\beta$ не стремится ни к какому пределу.

Но посмотрим дальше.

«На основании предыдущего равенства (2) мы видим, что при этом и $\frac{\partial p}{\partial \alpha}\to\pm\infty$. Можно без труда доказать, что не только $\frac{\partial p}{\partial \alpha}$, но и сам импульс p должен неограниченно возрастать, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} p=\pm\infty$».

Но как же быть, если, например, взять

$$p=\sqrt{\alpha-q}; \quad q\to\alpha? \tag{4}$$

Для такой зависимости между p и q будет

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha}\to\infty; p\to 0.$$

Таким образом, в приведённом рассуждении обе посылки не верны. Не удивительно, что и вывод не верен.

На той же стр. 178 величина β предполагается выраженной через p и q:

$$\beta=\beta(q,p), \tag{5}$$

после чего говорится:

«В случае условно-периодического движения в правой части последнего равенства координата q и импульс p не стремятся ни к конечному, ни к бесконечному пределу. Левая же часть равенства, т. е. величина β, стремится к ∞ или $-\infty$. Очевидно, что это возможно только в том случае, если переменная β есть неоднозначная функция переменных q и p».

Мы можем только добавить, что нам представляется очевидной нелепость этого умозаключения, а никак не его справедливость.

Мы ещё не дошли до конца стр. 178. Постараемся писать короче и отмечать только самое главное. Авторы считают доказанным, что функция действия S_0, выраженная через p и q, будет неоднозначной функцией, и рассматривают её изменение ΔS_0 при обходе некоторого замкнутого контура в фазовом пространстве (пространстве p, q). Далее они пишут следующее поразительное равенство:

$$\Delta p=\Delta\frac{\partial S_0}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial q}\Delta S_0. \tag{6}$$

Каждый член этого равенства вызывает недоумение. Прежде всего S_0 рассматривается здесь (по крайней мере, только что рассматривалось) как функция от q и от p (а не от q и от α); поэтому уже не будет $p=\frac{\partial S_0}{\partial q}$. Но это — мелочь. Самое главное то, что, по определению, ΔS_0 может зависеть только от контура, по которому производился обход, и никоим образом не может зависеть ни от q, ни от p, ни от α. Поэтому перестановка знаков Δ и $\frac{\partial}{\partial q}$ в (6) не только незаконна, но и вообще лишена какого бы то ни было смысла, так же, как и правая часть формулы (6). Авторы же заключают из (6) и из $\Delta p = 0$, что

$$\Delta S_0 = \Delta S_0(\alpha), \tag{7}$$

т. е. что ΔS_0 есть функция от α. Заключение нелепое, ибо, по данному авторами определению, ΔS_0 не может быть функцией от α. Всё это написано так, как если бы авторы не понимали каких-то самых простых вещей; возможно, что они путают фазовое пространство (q, p) с конфигурационным (q при заданных α). Допустим, однако, что некая величина ΔS_0 есть функция от α!

Читаем дальше (стр. 179):

«Конечно, при обходе по некоторым фазовым линиям ΔS_0 может быть равно нулю. Наименьшее, отличное от нуля значение ΔS_0 называется периодом, соответствующим функции S_0».

Но откуда следует, что такое наименьшее, отличное от нуля значение ΔS_0 существует? Разве не может быть, что ΔS_0, взятое по большому контуру, будет большим, взятое по маленькому контуру — маленьким и при неограниченном уменьшении контура будет непрерывным образом стремиться к нулю? Ведь представления, заимствованные из теории интегралов от мероморфных функций комплексного переменного, могут быть здесь совершено неприменимыми.

Однако, простим им и этот грех и попробуем читать дальше.

«В общем случае, когда система, совершающая условно-периодическое движение, имеет n координат, функция S_0 зависит от n переменных. Поэтому ей соответствует n, вообще говоря, независимых периодов».

Но откуда это заключение? Почему периоды системы вообще имеют конечный базис? Почему их не только конечное число, но и ровно n для системы с n степенями свободы?

На эти недоумённые вопросы ответить невозможно, но можно попытаться ответить на вопрос психологического порядка: почему авторы в этом месте так напутали. Мы решаемся выдвинуть такую гипотезу: авторы напутали здесь потому, что перенесли на общий случай некоторые результаты, доказанные для систем с полным разделением переменных (об этих системах упомянуто в конце § 62).

Эта гипотеза подтверждается тем, что на стр. 180 рассматривается случай одной степени свободы и после него сразу говорится об общем случае.

Как бы то ни было, мы имеем здесь невероятное смешение понятий. Постараемся привести их в систему. На стр. 178 дано такое определение условно-периодических систем:

1. «В случае ... когда координата q не стремится ни к какому пределу, движение имеет квазистационарный характер и называется „условно-периодическим“».

Таким образом, одного того обстоятельства, что координаты системы не стремятся ни к какому пределу, по мнению авторов, достаточно для вывода всех свойств рассматриваемых систем, включая упомянутое выше свойство иметь ровно n независимых периодов.

Это подтверждается тем, что на стр. 181 сказано:

2. «Однако, можно показать, что... система сколь-угодно близко возвращается к каждому своему состоянию».

Указанное свойство системы принято называть устойчивостью по Пуассону. Приходится констатировать, что, по мнению авторов, устойчивость по Пуассону вытекает, в конечном счёте, из определения 1. Но это ещё не всё. К цитате 2 непосредственно примыкает следующая:

3. «Вследствие этого движение называется почти-периодическим...».

Констатируем далее: авторы считают очевидным и не требующим доказательства, что если система устойчива по Пуассону, то ёе координаты являются почти-периодическими функциями времени.

Но и это ещё не всё. Пусть F есть какая-либо (однозначная) функция от q и p. На той же стр. 181, несколько выше, читаем:

4. «В общем случае, когда система имеет n степеней свободы, функцию $F(w_1 \dots w_n)$ также можно разложить в ряд Фурье».

Так как w_i пропорциональны времени, то это равносильно утверждению, что F, как функция от времени, имеет ровно n независимых периодов.

Таким образом, мы встречаем у авторов следующий ряд утверждений:

1. Координаты системы не стремятся ни к какому пределу.
2. Система устойчива по Пуассону.
3. Координаты — почти-периодические функции времени.
4. Координаты разложимы в кратные ряды Фурье.

Все эти утверждения авторы считают вполне эквивалентными или, по крайней мере, вытекающими из 1. Между тем, на самом деле это совсем не так. Свойство 1 есть весьма общее свойство, из которого трудно что-либо вывести, за исключением случая одной степени свободы. Устойчивость по Пуассону — уже гораздо более конкретное свойство, которое отнюдь не вытекает из 1. Оно, в свою очередь, гораздо шире свойства 3, которым обладает относительно узкий класс систем. Ещё более узкий класс обладает свойством 4—разложимостью в ряд Фурье.

Если же исходить из 4, то отсюда действительно можно вывести 3, 2 и 1.

Таким образом, в разбираемом § 62 книги Ландау и Пятигорского имеется невообразимое смешение понятий. Читать этот параграф очень трудно. При попытке проследить за рассуждениями авторов быстро убеждаешься, что понять ничего невозможно.

Приходится удивляться тому, как мог такой крупный учёный, каким, несомненно, является один из соавторов — проф. Ландау, написать книгу с таким большим количеством грубых ошибок.

Некоторая небрежность изложения и нестрогость рассуждений, быть может, ещё извинительна в новых, мало исследованных областях физики. Но в такой старой, устоявшейся области, как классическая механика, тем более в учебнике, всё должно быть безупречно чётко и строго. Достигнуть этого можно к тому же весьма простыми средствами.

Переходя к оценке книги в целом, мы должны признать, что она авторам не удалась. Разумеется, целый ряд вопросов изложен в книге правильно. Интересен § 17, где рассмотрен период движения с одной степенью свободы, как функция от энергии, и §§ 21—23, посвящённые рассеянию частиц (где, впрочем, чересчур кратко изложена вначале статистическая сторона задачи). Интересна самая попытка дать изложение механики как главы теоретической физики, и довольно удачен подбор материала (за исключением задач, которые имеют характер упражнений на дифференцирование). Но этих положительных сторон далеко не достаточно, чтобы признать учебник хорошим. Ведь, не можем же мы ставить серьёзно в заслугу авторам, что они верно решают, например, задачу Кеплера. Мы вправе требовать от них гораздо большего. А в более тонких и трудных вопросах механики — вариационный принцип, классификация типов движения механических систем — авторы оказываются решительно не на высоте: мы находим в соответствующих главах ошибки и путаницу.

Нам кажется, однако, что книга Ландау и Пятигорского всё-таки может быть исправлена. Для этого, кроме исправления ошибок и нестрогостей, желательно, по нашему мнению, переработать книгу и в том направлении, чтобы принципу наименьшего действия было предпослано, по крайней мере, определение основных понятий механики. Что касается злополучного § 62, то здесь проще всего ограничиться случаем полного разделения переменных, где всё исследование может быть проведено в явном виде.

Мы надеемся увидеть книгу во втором издании исправленной и основательно переработанной.

В. Фок