И * Л

Издательство

иностранной

литературы

*

TULLIO LEVI-CIVITA e UGO AMALDI

LEZIONI
di
MECCANICA RAZIONALE

VOLUME SECONDO

Dinamica dei sistemi
con un numero finito
di gradi di libertà

Parte prima

BOLOGNA

1926

Т. ЛЕВИ-ЧИВИТА и У. АМАЛЬДИ

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Том второй

ДИНАМИКА СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Перевод с итальянского
Д. И. КУТИЛИНА

Под редакцией
И. И. МЕТЕЛИЦЫНА

1951
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва

Первая часть второго тома содержит динамику точки и ряд глав динамики системы, включающих общие теоремы динамики, уравнения движения в обобщенных координатах для голономных и неголономных систем, устойчивость и колебания. Помимо математического содержания авторы уделяют большое внимание физическому истолкованию получаемых результатов. Книга содержит много приложений, часть которых вынесена в упражнения.

Вторая часть этого тома содержит динамику твердого тела, канонические уравнения, вариационные принципы и теорию удара. Первый том курса будет выпущен вслед за вторым.

Книга рассчитана на широкие круги изучающих теоретическую механику. Она интересна и для преподающих механику. В ней они найдут богатый материал, который может быть использован в преподавании.

ПРЕДИСЛОВИЕ
РЕДАКТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Еще в 1935 г. вышел в свет русский перевод первой части первого тома „Курса теоретической механики" Т. Леви-Чивита и У. Амальди. Однако в дальнейшем издание последующих частей курса осуществлено не было, хотя для широких кругов советских механиков курс в целом имеет значительный интерес как хорошее дополнение к имеющимся на русском языке руководствам по теоретической механике *).

Настоящая книга, представляющая собой первую часть второго тома, помимо основных вопросов динамики материальной точки и системы, содержит также целый ряд приложений, интересных для весьма широкого круга читателей. Вопросы внешней баллистики, элементы небесной механики, системы со связями второго класса (сервомоторные связи), неголономные системы, системы с неидеальными связями, вопросы, относящиеся к устойчивости равновесия и движения, — весь этот материал изложен с такой полнотой и обстоятельностью, какие обычно не встречаются в руководствах по общей механике. Упражнения, помещенные в конце каждой главы, дополняют теоретический материал большим количеством примеров, которые в большинстве своем интересны по своему математическому или физическому содержанию.

Изложение отличается образностью; при разборе того или иного вопроса авторы стремятся не только к полной математической строгости изложения, но всегда подробно выясняют физическую картину рассматриваемого явления.

В большинстве случаев авторы обходятся без громоздких выкладок при выводе необходимых результатов, но каждую полученную формулу тщательно анализируют; получение той или иной формулы не является при этом конечной целью, а служит только средством для выяснения физической сущности явления путем ее анализа. Эта особенность изложения характерна для предлагаемого

---

*) Издание курса Т. Леви-Чивита и У. Амальди предполагается осуществить в следующем порядке. Сначала выпускается первая часть второго тома, потом вторая часть второго тома (том второй посвящен динамике систем с конечным числом степеней свободы) и лишь затем вторая часть первого тома. Такой порядок издания не будет затруднять читателя, поскольку второй том в большей своей части опирается только на изданную первую часть первого тома. Подробная характеристика всего курса дана в предисловии проф. В. Ф. Кагана к русскому изданию первой части первого тома.

курса и выгодно отличает его от ряда других аналогичных по содержанию и объему руководств по теоретической механике.

Весь курс изложен в векторной форме, но авторы пользуются векторным методом очень осторожно и применяют его при выводах только в тех случаях, когда это, во-первых, сокращает выкладки и, во-вторых, не подменяет образного геометрического толкования.

Для понимания текста требуется только знание элементов векторной алгебры и векторного анализа в объеме программ высшей технической школы. При этом следует обратить внимание на одну особенность в обозначениях. Радиус-вектор точки P, проведенный из начальной точки O, авторы обозначают просто одной буквой P (о происхождении этого обозначения и о его связи с точечным исчислением можно найти сведения в дополнении к первой части первого тома, принадлежащем проф. В. Ф. Кагану). В этих обозначениях, например, известная формула для радиуса-вектора центра тяжести

$$m\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OG_n},$$

где

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n,$$

принимает следующий вид:

$$mG = m_1G_1 + m_2G_2 + \ldots + m_nG_n.$$

Скорость точки записывается в виде

$$\bar{v} = \frac{dP}{dt} = \dot{P}.$$

Эти обозначения не вносят в изложение никаких осложнений, и потому они сохранены без изменений.

Что касается терминологии, то она в подавляющем большинстве случаев совпадает с общепринятой в советской литературе по механике, а там, где она резко расходится с ней, соответствующие термины заменены принятыми в советской литературе.

Авторы снабдили свой курс большим количеством ссылок на оригинальные работы и дополнили основной текст краткими биографическими сведениями о тех ученых, трудами которых создана классическая механика. Можно приветствовать это начинание, столь необычное для учебных руководств по механике, но при условии, что роль каждого ученого правильно взвешена и освещена. Однако авторы несколько переоценили, по нашему мнению, роль итальянских деятелей науки в развитии механики, так как наряду с биографиями первоклассных ученых в книге помещены также и биографии лиц, научная деятельность которых оставила только едва заметный след в механике. Вместе с тем не всегда правильно отражена роль русских ученых в развитии механики, а их биографии или отсутствуют, или сводятся к упоминанию даты и места рождения и смерти без указания, хотя бы и краткого, их роли в науке. Излагая, например, преобразования уравнений движения неголономных систем, авторы совершенно обходят молчанием работы С. А. Чаплыгина, впервые установившего некоторые формы этих уравнений. При изложении теории колебаний и вопросов устойчивости авторы не упоминают о работах Н. Е. Жуковского, а теоремы А. М. Ляпунова, не приводя их доказательств, формулируют не всегда точно, вследствие чего читатель не получает надлежащего представления о роли Ляпунова в развитии теории устойчивости и о добытых им результатах. Точно так же нельзя согласиться со взглядом авторов на теорию малых колебаний, тем более что для установившихся движений вопрос о границах ее применимости разрешен в диссертации А. М. Ляпунова 60 лет назад. Мы сочли необходимым в соответствующих местах книги восполнить эти пробелы дополнительными примечаниями. Часть этих примечаний, ввиду довольно значительного их объема, вынесена в конец книги. Ссылки на них в тексте книги отмечены цифрами, заключенными в квадратные скобки.

Глава I

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

§ 1. Система отсчета для механических явлений

1. Во второй части первого тома (гл. VII—XIV) мы установили законы механики и изложили систематически наиболее важные следствия из них, относящиеся к явлениям покоя, или, поскольку имелись в виду силы, к явлениям равновесия (статика). Теперь, отправляясь от тех же законов, мы перейдем к механике в собственном смысле, т. е. к явлениям движения, или к динамике; при этом мы начнем с рассмотрения движения одной материальной точки, или, как принято говорить для краткости, с динамики точки.

Этот частный случай движения важен не только вследствие своей схематической простоты, но также и благодаря тому, что он составляет основу динамики произвольных материальных систем, так как каждую такую систему при изучении механических явлений можно рассматривать как образованную из совокупности материальных точек или элементарных частиц.

Вся динамика точки основывается на уравнении

$$F = ma, \tag{1}$$

которое для случая одной материальной точки дает полный синтез всех постулатов механики (т. I, гл. VII). В этом уравнении скалярный, существенно положительный коэффициент m обозначает *массу* точки. Сила F представляет собой все действия на точку со стороны внешней среды или, говоря точнее, является равнодействующей всех сил (активных и реакций связей), действующих на точку, и a обозначает ускорение точки. Так как ускорение имеет относительный характер, то всегда необходимо иметь в виду, что уравнение (1) будет вполне строгим только при условии, что ускорение a отсчитывается *в системе координат, не изменяющей своего положения относительно неподвижных звезд* (т. I, гл. VII, § 7).

Чтобы исключить все несущественные ограничения, относящиеся к системе отсчета, сделаем одно замечание. Пусть $\Omega\xi\eta\zeta$ есть система осей координат, не изменяющая своего положения относительно неподвижных звезд, $\Omega'\xi'\eta'\zeta'$ — другая система осей, совершающая относительно первой системы прямолинейное и равномерное поступательное движение; тогда из теории относительного движения непосредственно следует, что ускорение какой-нибудь точки относительно системы $\Omega'\xi'\eta'\zeta'$ в любой момент будет тождественно с ускорением этой же точки относительно системы $\Omega\xi\eta\zeta$ (т. I, гл. IV, п. 4); таким образом, *основное уравнение* (1) *будет вполне строгим во всех тех случаях, когда движение точки рассматривается в системе координат, движущейся поступательно и притом прямолинейно и равномерно относительно неподвижных звезд, или, другими словами, в системе координат, оси которой сохраняют неизменные направления относительно неподвижных звезд, а начало движется прямолинейно и равномерно.*

В дальнейшем, когда мы будем пользоваться уравнением (1), мы всегда будем подразумевать (если не будет оговорено противное), что движение точки относится к только что указанной системе отсчета. Такую систему для краткости будем называть *инерциальной* или *галилеевой* системой. Последнее название было предложено Эйнштейном в его первой статье (1905 г.) о теории относительности и теперь всюду принято. Оно вполне оправдывается тем, что в сочинениях Галилея с удивительной ясностью и точностью подчеркнут тот факт, что для двух наблюдателей, находящихся относительно друг друга в прямолинейном и равномерном поступательном движении, физические явления протекают по одним и тем же законам.

Однако мы будем пользоваться уравнением (1) также и для систем отсчета, отличных от указанной [так, мы знаем (т. I, гл. VII, § 7), что оно приближенно справедливо и для осей, неизменно связанных с Землей], но в каждом таком случае мы будем указывать на характер и пределы ошибок, которые при этом будут получаться.

Необходимо добавить, что при формулировке механических задач мы часто будем говорить о неподвижных точках, прямых и плоскостях. Под этим мы будем подразумевать такие точки, прямые и плоскости, которые неподвижны относительно заданной системы отсчета; за такую систему в большинстве случаев будем принимать или галилееву систему, или систему, неизменно связанную с Землей.

§ 2. Общие соображения о движении точки по заданной траектории

2. Пусть P есть материальная точка с массой m, движущаяся (или, в предельном случае, находящаяся в покое) под действием сил, равнодействующая которых есть $\boldsymbol{F}$. Предположим, что мы заранее знаем траекторию c точки (иногда это вполне возможно, если, например, у нас имеются некоторые данные о характере действующих сил). Тогда для определения движения точки P достаточно найти зависимость между положением точки на траектории и временем (т. е. закон движения). Точнее, если s есть длина дуги траектории c между произвольной начальной точкой и точкой P, отсчитываемая в заданном направлении (*криволинейная абсцисса* точки P), то все

сводится к нахождению уравнения движения в конечной форме $s = s(t)$, определяющего положение точки P на заданной траектории c.

Для этой цели возьмем основное уравнение (1)

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

и спроектируем обе его части в любой точке кривой c на касательную, проведенную в направлении возрастающих значений s. Так как касательное ускорение точки P равно $\ddot{s}$ (т. I, гл. II, п. 26), то мы получим следующее скалярное уравнение:

$$m\ddot{s} = F_t \tag{2}$$

(первое внутреннее уравнение движения точки P; см. т. I, гл. VII, п. 31). Предположим, что касательная составляющая F_t силы $\boldsymbol{F}$ известна. Согласно сказанному в п. 22 гл. VII т. I, это означает, что F_t должна быть известной функцией от положения и скорости точки P и, может быть, также и от времени t. Так как на заданной траектории c положение точки P однозначно определяется ее криволинейной абсциссой s, а скорость — скалярной величиной $\dot{s}$ (поскольку направлением скорости в любой точке является направление касательной), то из только что сказанного следует, что составляющая F_t представляет собой известную функцию $f(s, \dot{s} \mid t)$ от трех аргументов, $s, \dot{s}, t$, и равенство (2) принимает вид

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s} \mid t). \tag{2'}$$

Таким образом, задача о движении точки P по траектории c сводится к определению всех функций $s(t)$, удовлетворяющих уравнению (2'), т. е. к интегрированию одного единственного дифференциального уравнения второго порядка.

В общем случае это уравнение не интегрируется в конечном виде; только в редких случаях, примеры которых мы дадим в §§ 4 и 5, его удается интегрировать в квадратурах.

Однако в анализе доказывается, что при достаточно широких качественных условиях для функции от трех аргументов $f(s, \dot{s} \mid t)$ уравнение (2') имеет общий интеграл, зависящий от двух произвольных постоянных. Так как в нашей механической интерпретации функция $F_t = f(s, \dot{s} \mid t)$ в конкретных задачах этим условиям полностью удовлетворяет, то можно сказать, что на траектории c при заданных действующих силах возможны ∞^2 отличных друг от друга движений; из всех этих движений мы сможем выделить одно, если будем иметь достаточно данных для определения двух постоянных интегрирования.

Так, например, можно доказать, что если функция $f(s, \dot{s} \mid t)$ в определенной области конечна, непрерывна и дифференцируема по любому из трех ее аргументов, то среди интегралов уравнения (2') всегда существует такая функция $s(t)$, которая однозначно определяется следующими условиями: функция s и ее производная при заданном значении t_0 независимой переменной (принадлежащем рассматриваемой области) принимают произвольно заданные (тоже из рассматриваемой области) значения s_0, $\dot{s}_0$. Поэтому мы можем сказать, что при заданных условиях среди возможных движений точки P по траектории c имеется одно и только одно движение, при котором точка P пройдет через произвольно выбранное положение в заданный момент времени и с заданной скоростью.

Подобным же образом в анализе доказывается, что при условиях, которых мы здесь точно не будем указывать, уравнение (2') имеет (по крайней мере для некоторого промежутка времени, или, если угодно, для надлежащим образом выбранной дуги кривой) один и только один интеграл, принимающий для двух заданных значений времени t два произвольно выбранных значения. Поэтому мы можем утверждать, что среди движений точки P по траектории c, определяемых уравнением (2'), существует одно и только одно движение, при котором P в два заданных момента времени проходит через два предписанных положения.

3. Среди ∞^2 движений, определяемых уравнением (2'), может заключаться, в частности, и положение равновесия в какой-нибудь точке s_0. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2') удовлетворялось тождественно (т. е. для всякого значения независимого переменного t), если в него подставить вместо функции $s(t)$ постоянную s_0; следовательно, должно быть

$$f(s_0,\ 0 \mid t) = 0$$

при всяком t. Это можно было предвидеть. В самом деле, общее условие равновесия состоит, как мы знаем, в том, что сила должна быть равна нулю, а $f(s_0,\ 0 \mid t)$ есть не что иное, как касательная составляющая F_t такой силы, которая удовлетворяет предполагаемому состоянию равновесия движущейся точки в положении $s = s_0$.

§ 3. Несвободное движение точки по кривой. Центростремительная реакция и центробежная сила. Приложения

4. Во многих случаях точка P может двигаться только по заданной линии c благодаря специальным приспособлениям (направляющим, трубам, рельсам, нитям, связи с другими телами). Иными словами, движение точки направляется связями, влияние которых на движение можно представить, как мы знаем (т. I, гл. VII, п. 15), в виде некоторой силы, так называемой реакции связи $\boldsymbol{R}$, заранее неизвестной.

В этих случаях для определения движения точки вообще недостаточно знать тангенциальную составляющую F_t активной силы F

(т. е. той силы, которая одна приводила бы в движение точку, если бы не было связей). Поэтому при указанном предположении мы должны заменить основное уравнение (1) следующим уравнением:

$$ma = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}; \tag{1'}$$

проектируя обе части его на касательную, получим

$$m\ddot{s} = F_t + R_t. \tag{2''}$$

Здесь тангенциальная составляющая R_t силы $\boldsymbol{R}$ тоже неизвестна.

Однако бывают случаи, когда составляющую R_t можно заранее определить. Ниже, в § 8, мы остановимся подробнее на действии реакции $\boldsymbol{R}$ во время движения, аналогично тому, как это было сделано в гл. IX т. I для случая равновесия. Но уже теперь, если принять во внимание полученные там результаты (а также общие рассуждения п. 3 гл. XV), мы можем путем обобщения заключить, что если речь идет о таких связях, для которых в статических условиях трением можно пренебречь (т. е. о связях идеальных, без трения), то реакция будет нормальна к траектории также и при движении в любом положении движущейся точки. Следовательно, R_t будет равна нулю, и движение будет определяться опять уравнением (2).

Таким образом, *точка, вынужденная* (вследствие связей без трения или приближенно без трения) ***оставаться на некоторой кривой, движется по ней так, как если бы она находилась исключительно под действием активной*** (касательной) ***силы.***

5. Независимо от того, имеется трение или нет, основное уравнение (1')

$$ma = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}$$

приводит нас к замечательным выводам. Спроектируем для любой точки траектории обе части уравнения на соответствующую главную нормаль (направленную к центру кривизны) и решим полученное уравнение относительно R_n. Вспоминая выражение $a_n = \frac{v^2}{r}$ для нормального ускорения (т. I, гл. II, п. 26), где v есть абсолютная величина скорости и r — радиус кривизны траектории, получим

$$R_n = m\frac{v^2}{r} - F_n. \tag{3}$$

Составляющая R_n полной реакции $\boldsymbol{R}$ связей, т. е. тел (трубы, рельсов и т. п.), материализующих кривую c, называется центростремительной реакцией связи.

В то время как в случае покоя ($v = 0$) эта составляющая в точности равна и противоположна аналогичной составляющей активной силы, при движении, т. е. когда $v \neq 0$, она содержит в себе в качестве слагаемого, как это видно из равенства (3), величину $m\frac{v^2}{r}$, всегда положительную (направленную по главной нормали в сторону вогнутости или, как иногда говорят, внутрь кривой [1])), прямо пропорциональную квадрату скорости и обратно пропорциональную радиусу кривизны, т. е. по своему значению тем бóльшую, чем больше в рассматриваемом положении кривизна траектории c.

6. На основании закона равенства действия и противодействия силе $\boldsymbol{R}$, с которой связь (т. е. тело или тела, которые ее осуществляют) действует на движущуюся точку, соответствует равная и противоположная сила $-\boldsymbol{R}$, с которой движущаяся точка действует на связь (в положении, занимаемом точкой в какой-нибудь момент времени).

Составляющая силы $-\boldsymbol{R}$ в направлении *внешней* нормали, действующая на связь и равная по величине R_n, называется *центробежной силой* *).

Заметим, что центробежная сила здесь понимается в смысле, отличном от того, в каком она применяется в теории относительного равновесия, гл. XVI, п. 6.

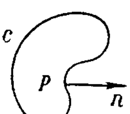
Указанная центробежная сила проявляется, например, в праще, когда ее вращают для метания камня; она же проявляется и тогда, когда шарик, быстро пробегая по кривому жолобу (например, круговому), стремится разрушить внешний его край.

7. Для приспособлений, осуществляющих связи, имеет важное практическое значение, иногда даже большее чем R_n, другая составляющая силы $-\boldsymbol{R}$, нормальная к траектории. Пусть ν — какое-нибудь направление (ориентированное), нормальное к кривой, и θ — угол, который оно образует с главной нормалью n. Так как вектор ускорения является суммой двух составляющих, одной — направленной по касательной и другой — по главной нормали n, то его проекцией a_ν по ориентированному направлению ν будет

$$a_\nu = a_n \cos\theta = m\frac{v^2}{r}\cos\theta$$

---

[1]) Строго говоря, это выражение неправильно, так как в случае замкнутой кривой оно может привести к недоразумению. Это видно, например, из прилагаемой фигуры, где нормаль n направлена в сторону вогнутости, и все же не внутрь кривой c, если рассматривать ее в целом. Однако возможности недоразумения не будет, если мы ограничимся, как это обычно и имеет место, рассмотрением кривой в ближайшей окрестности любого положения точки.



Фиг. 1.

*) *Центробежная сила* в том смысле, в каком она введена здесь авторами, представляет собой *нормальное давление движущейся точки на связь. (Прим. ред.)*

(см. т. I, гл. I, п. 12). Поэтому, проектируя уравнение (1′) на направление ν и определяя R_ν, получим

$$R_\nu = m\frac{v^2}{r}\cos\theta - F_\nu. \tag{3′}$$

Если, как это мы уже делали выше при определении понятия центробежной силы, мы изменим направление ν нормали на противоположное, то выражение (3′) даст составляющую силы $-\boldsymbol{R}$ по направлению ν (измененному). Полагая в этом направлении $\theta = 0$, получим опять равенство (3).

8. Интересные приложения формулы (3′) получим, рассматривая случай, когда активная сила сводится к силе тяжести. Если обозначить через α угол, образуемый нормалью ν с вертикалью, направленной вниз (подчеркнем еще раз, что при $\theta = 0$ нормаль ν переходит в главную нормаль n, направленную в сторону вогнутости), то будем иметь $F_\nu = mg\cos\alpha$, и равенство (3′) примет вид

$$R_\nu = m\left(\frac{v^2}{r}\cos\theta - g\cos\alpha\right). \tag{4}$$

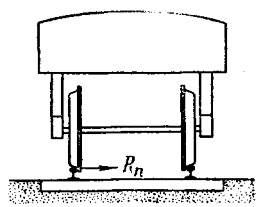
Важно отметить, что это выражение R_ν будет иметь место и в том случае, когда, помимо силы тяжести, имеются и другие активные *чисто касательные силы*, так как эти силы не дают составляющей при проектировании на направление ν.

Если траектория расположена в горизонтальной плоскости, то главная нормаль n будет горизонтальна и, следовательно, в этом случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Полагая в равенстве (4) $\theta = 0$, мы увидим, что в этом случае составляющая R_n является величиной существенно положительной (если только речь идет действительно о криволинейном движении, т. е. если скорость v и кривизна $\frac{1}{r}$ отличны от нуля). Отсюда следует, что связи подвергаются действию центробежной силы (направленной по внешней нормали), и притом тем большей, чем больше масса и скорость.

9. Возвышение внешнего рельса. Указанные условия осуществляются, например, при движении железнодорожного вагона на закруглении.

Сосредоточим наше внимание на колесах и учтем тот хорошо известный факт (фиг. 2), что они снабжены с внутренней стороны выступом (ребордой), предназначенным для того, чтобы препятствовать сходу с рельсов.

На закруглении пути связью, противодействующей центробежной силе, будет служить *внешний рельс.* Этот рельс будет испытывать



Фиг. 2.

со стороны реборды давление, направленное наружу, по нормали к рельсам (эта нормаль лежит в плоскости пути). Внутренний же рельс не будет испытывать аналогичного действия со стороны реборды соответствующего колеса. Это приводит к тому, что на горизонтальном закруглении внешний рельс должен противодействовать значительному усилию, стремящемуся его разрушить. Поэтому внешний рельс располагают несколько выше внутреннего, причем возвышение определяется таким образом, чтобы действие центробежной силы сделать равным нулю или, по крайней мере, уменьшить.

Для того чтобы оценить требуемое возвышение, обратим внимание на то, что в общем случае величина давления определяется абсолютной величиной правой части равенства (4). Из этого равенства видно, что если траектория не лежит в горизонтальной плоскости, то появляется слагаемое $-g\cos\alpha$, которым можно воспользоваться, чтобы уменьшить или совсем исключить влияние первого слагаемого $\frac{v^2}{r}\cos\theta$.

В нашем случае направлением ν, входящим в формулу (4), является нормаль к рельсам, расположенная в плоскости пути. Следовательно, для достижения указанной цели эта плоскость должна быть уже не горизонтальной, а наклонной, и притом так, чтобы внешний рельс лежал выше внутреннего. С другой стороны, каждый из двух рельсов остается расположенным в горизонтальной плоскости. Поэтому главную нормаль надо рассматривать как горизонтальную прямую. В таком случае угол θ между n и ν будет углом наклона плоскости пути к горизонтальной плоскости. Следовательно, угол α между ν и направленной вниз вертикалью будет равен $90°-\theta$, и формула (4) примет вид

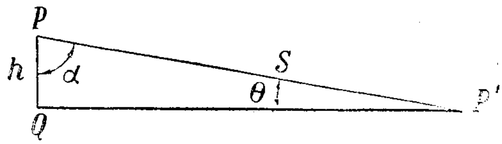
$$R_\nu = m\left(\frac{v^2}{r}\cos\theta - g\sin\theta\right).$$

Таким образом, зная r, т. е. радиус закругления, и среднюю скорость v (вычисленную для различных поездов, проходящих по линии), мы получим давление R_ν на внешний рельс в среднем равным нулю, если определим наклон θ из равенства

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{rg}. \tag{5}$$

Для скоростей бóльших средней, давление R_ν будет положительным, т. е. R_ν будет направлено наружу; для скоростей же, меньших средней, давление R_ν будет направлено в противоположную сторону, т. е. во внутрь. Иными словами, в первом случае давление будет испытывать внешний рельс, а во втором — внутренний рельс. Но в том и другом случае, если скорость поезда не слишком отличается от средней, и то, и другое давление будет заключаться в допустимых пределах.

10. Величину возвышения одного рельса над другим мы получим из уравнения (5) на основании следующих соображений. Пусть P (фиг. 3) есть точка внешнего рельса в плоскости пути. Проведем через P нормаль ν к рельсу в плоскости пути, и пусть P' будет точка, в которой эта нормаль встречает внутренний рельс. Отрезок $PP' = s$ изображает расстояние между рельсами, он называется *шириной колеи*[1]). Обозначим через Q проекцию точки P на горизонтальную плоскость, проходящую через P', и рассмотрим треугольник PQP'. Отрезок PQ измеряет искомое возвышение h, а угол при P' (между ν и горизонталью) равен углу наклона плоскости пути к горизонтальной плоскости — θ. Имеем



Фиг. 3.

$$\sin\theta = \frac{h}{s},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{\sqrt{s^2 - h^2}}.$$

Подставляя в уравнение (5), получаем

$$\frac{h}{\sqrt{s^2 - h^2}} = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{r}.$$

Следовательно, для определения h получаем квадратное уравнение. Вполне понятно, что на практике наклон θ должен быть малым. В таком случае синус можно заменить тангенсом, т. е. в уравнении (5) прямо положить

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{s}.$$

Тогда для h будем иметь более простое выражение:

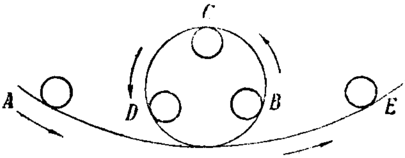
$$h = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{s}{r}. \tag{5'}$$

Пусть, например, радиус закругления равен 1000 *м*. Принимая среднюю скорость равной 15 *м/сек* (54 *км/час*), мы для возвышения h получим значение

$$h = \frac{225 \cdot 1{,}445}{9{,}8 \cdot 1000}\ м = 33\ мм.$$

[1]) Почти во всех странах Европы (исключение составляют только СССР и Испания) ширина колеи нормальных железнодорожных линий равна 1,445 *м*. В СССР она равна 1,524 *м*.

11. Мертвая петля. При помощи формулы (4) можно объяснить акробатический номер, известный под названием мертвой петли. Велосипедист (или автомобилист) пробегает вертикальную траекторию $ABCDE$, изображенную на фиг. 4 (точнее — приблизительно вертикальную, так как вторая половина траектории CDE несколько смещена относительно первой половины ABC). Он находится все время на вогнутой стороне траектории, так что в наиболее высокой точке C петли будет расположен вниз головой.



Фиг. 4.

Здесь, как и в примере с железнодорожным вагоном, среди активных сил имеется движущая сила, возникающая в случае велосипеда от нажима на педали, а в случае автомобиля — в результате работы мотора. Однако эта сила направлена по касательной к траектории, и поэтому уравнение (4) сохраняется. В данном случае траектория движения реализуется опорной кривой, нормальная реакция этой кривой должна быть направлена в сторону опирающегося на них тела (велосипеда), т. е. в сторону вогнутости. Следовательно, такое движение велосипедиста будет возможно только при том условии, когда $R_n > 0$. С другой стороны, это условие и достаточно, потому что опора может развить нормальную реакцию, направленную в сторону опирающегося тела, какой угодно величины (если только опора обладает достаточной прочностью).

Поэтому все сводится к тому, чтобы подобрать кривизну и скорость так, чтобы всюду имело место соотношение

$$\frac{v^2}{r} > g\cos\alpha.$$

Условие это будет выполнено наверное, если взять

$$v > \sqrt{gr}.$$

Пусть в наиболее опасной части петли радиус кривизны равен приблизительно 3 *м*; тогда для успеха номера будет достаточно довольно умеренной скорости — немного большей, чем 6 *м/сек*. Это соответствует скорости 21,6 *км/час*, которая на небольшом участке пути велосипедистом легко может быть достигнута. Этот цирковой номер требует прежде всего силы и хладнокровия.

§ 4. Силы, зависящие от положения точки. Характерный признак упругих или восстанавливающих сил

12. В п. 2 мы указали, что уравнение (2′) движения точки по заданной траектории интегрируется в квадратурах только в немногих частных случаях. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим два таких случая, когда действующие силы удовлетворяют определенным условиям.

Прежде всего рассмотрим *силы, зависящие от положения* точки (т. I, гл. VII, п. 22), т. е. примем, что

$$F_t = f(s).$$

В таком случае уравнение (2') примет вид

$$m\ddot{s} = f(s). \tag{6}$$

Покажем, что уравнение (6) посредством одной квадратуры сводится к уравнению первого порядка с одной произвольной постоянной. Для этого вспомним, что в рассматриваемом случае живая сила T движущейся точки определяется выражением $\frac{1}{2}m\dot{s}^2$, следовательно,

$$\frac{dT}{dt} = m\ddot{s}\dot{s}.$$

С другой стороны, мы знаем, что если f является функцией только от s, то существует другая функция U, зависящая тоже только от s (вернее, существует бесконечно много таких функций, отличающихся друг от друга аддитивной постоянной) и притом такая, что

$$\frac{dU}{ds} = f, \tag{7}$$

т. е. U представляет собой не что иное, как неопределенный интеграл $\int f ds$.

Поэтому, умножая обе части равенства (6) на $\dot{s}$, можно написать его в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{ds}\dot{s}.$$

Поскольку U рассматривается как сложная функция от t через посредство s, правая часть есть не что иное, как производная от U по t. Следовательно, интегрируя по t и обозначая постоянную интегрирования через E, получим

$$T - U = E. \tag{8}$$

Это соотношение в конечной форме между кинетической энергией T движущейся точки и ее положением на кривой (определяемом функцией $U(s)$), называется *интегралом энергии*. В конечном счете оно дает соотношение между s и $\dot{s}$ (и произвольной постоянной), т. е. дифференциальное уравнение первого порядка. Проинтегрировав его, мы закончим интегрирование уравнения (6). Но предварительно остановимся немного на интеграле энергии (8).

13. Изучая первые следствия из постулатов механики (гл. VIII, п. 11), мы уже видели, что равенство (8) имеет место для всех движений, в которых силы консервативны; для таких движений U означает соответствующий потенциал.

В нашем случае, когда траектория предполагается заданной, мы пришли к равенству (8), не вводя предположения, что силы консервативны. В самом деле, вполне достаточно, чтобы они зависели только от положения; в таком случае равенство (7) определяет некоторую функцию только от s, играющую роль обыкновенного потенциала, причем особенность этой функции (производная ее равна силе) заключается в том, что она налагает ограничение на движение точки вдоль кривой c и на тангенциальную составляющую f силы.

Разность между значениями U, соответствующими двум точкам s_0 и s_1, на основании равенства (6) всегда равна

$$\int_{s_0}^{s_1} f ds = \int_{s_0}^{s_1} F_t ds,$$

следовательно, равна работе, совершаемой силой F при переходе движущейся точки из положения s_0 в положение s_1. Это оправдывает определение величины $-U$ (ср. т. I, гл. VIII, п. 8) как формы энергии, получаемой движущейся точкой в результате перехода в определенное положение (на кривой c). Уравнение (8) выражает также закон сохранения энергии (в виде суммы двух энергий: кинетической и потенциальной) для материальной точки P.

Если сила F представляет собой производную от потенциала, то этот последний, рассматриваемый как функция положения точки на кривой c, т. е. как функция дуги s кривой, удовлетворяет уравнению (7), и, следовательно, совпадает с U с точностью до некоторой (несущественной) аддитивной постоянной.

В самом деле, обозначим через U' этот потенциал. При переходе точки P в другое какое угодно бесконечно близкое положение полный дифференциал dU' этого потенциала представляет собой элементарную работу, совершаемую силой при таком перемещении. Отсюда следует, что если перемещение ds происходит вдоль кривой c, то должно быть

$$dU' = F_t\, ds = f ds,$$

т. е. dU' совпадает с dU.

14. Интересно отметить, что если материальная точка, на которую действует активная сила, представляющая собой производную от потенциала U, вынуждена двигаться вследствие наличия идеальных связей по заданной траектории, то равенство (8) все же выполняется, потому что тангенциальная составляющая полной силы сводится к $\frac{dU}{ds}$.

С другой стороны, равенство (8) выполняется и для движения при отсутствии связей под действием консервативной силы.

Поэтому в обоих случаях имеем

$$T_1 - T_0 = U_1 - U_0,$$

где T_0 и U_0, T_1 и U_1 суть значения T и U для двух любых моментов времени t_0 и t_1.

Из этого соотношения вытекает интересное следствие. Рассмотрим две материальные точки с равной массой, начинающие (или продолжающие) движение с одинаковой скоростью из общей точки или из разных точек, лежащих на одной и той же поверхности $U=\text{const}$.

Следовательно, в начальный момент времени T_0 и U_0 в обоих случаях имеют одно и то же значение. Если обе эти точки движутся под действием некоторой силы, представляющей собой производную от потенциала U, причем одна точка движется свободно, а другая — вдоль некоторой кривой, являющейся идеальной связью, то обе точки будут пересекать любую эквипотенциальную поверхность с одинаковой скоростью.

Так, например, если две тяжелые точки с равной массой начинают падать, из состояния покоя, одна свободно, а другая по заданной направляющей (без трения), то, достигнув одного и того же уровня, обе точки будут иметь одну и ту же скорость.

Отсюда как следствие вытекает известный закон Галилея, согласно которому тяжелое тело, опустившись с определенной высоты вдоль наклонной плоскости, будет иметь всегда одну и ту же скорость независимо от угла наклона.

15. Вернемся к задаче интегрирования уравнения движения (6). Будем исходить из интеграла живой силы (8); полагая

$$\frac{2}{m}\{U(s)+E\} = \Phi(s), \tag{9}$$

его можно представить в виде

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \Phi(s). \tag{8'}$$

Отсюда получаем

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\Phi(s)},$$

причем тот или другой знак берется в зависимости от того, будет ли алгебраическое значение скорости $\frac{ds}{dt}$ положительным или отрицательным, или, другими словами, будет ли движение совершаться в сторону возрастающих значений s или в обратном направлении. Разделяя переменные, получим уравнение

$$dt = \pm \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}},$$

по существу эквивалентное первоначальному уравнению (6). Это уравнение интегрируется одной квадратурой и дает искомое конечное соотношение между s и t. Произвольными постоянными, определяющими решение, будут постоянная E интеграла живой силы и аддитивная постоянная, появляющаяся при последнем интегрировании.

16. Среди сил $f(s)$, зависящих от положения точки, заслуживают особого внимания так называемые *восстанавливающие силы*, стремящиеся возвратить рассматриваемую материальную точку в определенное положение O на кривой c.

Такие силы характерны тем, что в точке O они исчезают, во всякой же другой точке кривой c они действуют как притяжение к точке (направленное по касательной к кривой — здесь мы рассматриваем только касательную составляющую), причем это притяжение возрастает с удалением от точки O вдоль кривой. Такое поведение является типичным для *упругих* сил, в чем легко убедиться на примере пружины; действие последней тем больше, чем сильнее она растянута или сжата, т. е. чем больше она отклонена от того естественного состояния, в котором исчезает всякое ее действие.

Если мы будем отсчитывать дуги от положения, в котором исчезает действие силы (или, другими словами, от положения равновесия), то указанное характерное свойство восстанавливающей силы с аналитической точки зрения выразится следующим образом: функция $f(s)$ исчезает при $s = 0$, имеет знак, всегда противоположный знаку s (это равносильно соотношению $sf(s) < 0$ для любого значения s, не равного нулю, и указывает, что рассматриваемая сила имеет характер притяжения), и, наконец, по абсолютной величине возрастает вместе с абсолютной величиной аргумента.

17. Наиболее простым случаем восстанавливающей силы будет, естественно, тот, когда эта сила прямо пропорциональна расстоянию от положения равновесия. Обозначая через λ положительный коэффициент пропорциональности, будем иметь

$$f(s) = -\lambda s. \tag{10}$$

Это выражение можно считать *типичным для упругой восстанавливающей силы*.

К нему можно прийти также путем следующего рассуждения. Предполагая, что $f(s)$ имеет непрерывные первую и вторую производные, разложим $f(s)$ в окрестности $s=0$ в ряд Маклорена и ограничимся тремя первыми членами; тогда получим

$$f(s)=f(0)+sf'(0)+\frac{s^2}{2}f''(s_1),$$

где s_1 есть некоторое значение между 0 и s. Ограничиваясь рассмотрением действия силы в достаточно малой окрестности положения равновесия O, величиной s^2 по сравнению с s можно пренебречь; следовательно, если предположить, что $f'(0)\neq 0$, то порядок величины произведения $sf'(0)$ будет значительно превышать порядок величины дополнительного члена $\frac{s^2}{2}f''(s_1)$, содержащего множителем s^2 (так как f'' по предположению есть величина конечная). Далее, так как $f(0)=0$, то в достаточно малой окрестности точки O можно принять $f(s)$ приближенно равной линейному члену разложения $sf'(0)$. Коэффициент $f'(0)$ не может быть положительным, потому что в противном случае мы не имели бы восстанавливающей силы. Итак, мы снова пришли к типичному выражению (10).

18. Закон движения, вызываемого силой $-\lambda s$, возвращает нас к хорошо известному классу движений. В самом деле, обозначая через ω^2 существенно положительное число λ/m, мы приведем уравнение (6) в этом случае к виду

$$\ddot{s}+\omega^2 s=0,$$

а это есть не что иное, как уравнение гармонического колебания (т. I, гл. II, п. 36), с той только разницей, что здесь вместо x входит s и, следовательно, вместо прямолинейного движения рассматривается движение по кривой c.

Период колебаний $\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$, как легко видеть, однозначно определяется природой восстанавливающей силы и массой движущейся точки; амплитуда колебаний и фаза, которые появляются в законе движения, выраженном в конечной форме, как постоянные интеграции, наоборот, зависят от начальных условий.

Исследование движения в общем случае, т. е. при какой угодно восстанавливающей силе, мы отложим до § 6; пока же заметим, что качественный характер движения будет оставаться аналогичным характеру движения в рассмотренном простом случае, а именно, всегда будут иметь место периодические колебания движущейся точки (если не просто синусоидальные) в ту и другую сторону от положения равновесия O. При этом наибольшие расстояния от O, достигаемые движущейся точкой (максимальные значения s и $-s$), не всегда будут равными, как это имеет место в гармоническом движении.

§ 5. Силы, зависящие только от скорости. Пассивные сопротивления. Гидравлическое сопротивление. Случай движения снаряда

19. Уравнение (2') движения точки по заданной траектории интегрируется в квадратурах также и в том случае, когда тангенциальная сила зависит только от скорости. Уравнение (2') в этом случае принимает вид

$$m\ddot{s} = f(\dot{s}),$$

откуда, разделяя переменные $\dot{s}$ и t, получим

$$m\frac{d\dot{s}}{f(\dot{s})} = dt.$$

Отсюда посредством одной квадратуры выводится конечное соотношение между $\dot{s}$ и t или же между $\dot{s}$ и $t - t_0$, если через t_0 обозначить постоянную интегрирования. Если разрешить это соотношение относительно $\dot{s}$, то $\dot{s}$ $\left(\text{или } \frac{ds}{dt}\right)$ будет выражено через $t - t_0$. Тогда достаточно одной новой квадратуры для того, чтобы найти $s(t)$.

20. Пассивным сопротивлением мы назвали (см. т. I, гл. VII, п. 23) такую силу, которая всегда стремится противодействовать движению, т. е. образует с направлением скорости тупой угол.

В настоящем случае мы будем рассматривать силу $F_t = f(\dot{s})$ как пассивное сопротивление, если она всегда имеет знак, противоположный знаку $\dot{s}$. В таком случае (допуская, что рассматриваемая сила есть непрерывная функция скорости) необходимо, чтобы было $f(0) = 0$; в самом деле, в противном случае $f(\dot{s})$ для достаточно малого s имела бы знак, одинаковый со знаком $f(0)$, и, следовательно, не могла бы его изменить вместе с $\dot{s}$, как это необходимо для пассивного сопротивления.

21. Наиболее простым выражением пассивного сопротивления, очевидно, будет

$$f(\dot{s}) = -b\dot{s}, \tag{11}$$

где через b обозначена некоторая *положительная* постоянная. По соображениям, аналогичным тем, которые были изложены в п. 15, уравнение (11) можно рассматривать как типичное выражение пассивного сопротивления для всех тех случаев, когда рассматриваются малые скорости. К этой категории пассивных сопротивлений принадлежит, по крайней мере в первом приближении, сопротивление, возникающее в вязкой, жидкой или в газообразной среде при медленном движении в ней твердого тела. Значение коэффициента b

существенно зависит от свойств среды, от размеров и формы движущегося тела (когда речь идет о локализации тела на кривой c, его следует мысленно заменить материальной точкой). Так, например, при медленном движении шара радиуса r в вязкой жидкости теория дает для коэффициента b значение

$$b = 6\pi\mu r, \quad [\mu] = mt^{-1}l^{-1},$$

где коэффициент вязкости μ, измеренный в единицах CGS и при температуре в 15°, равен для воды 0,0115 и для воздуха 0,000189.

Следовательно, измеряя r в сантиметрах, а $\dot{s}$ в сантиметрах в секунду, получим силу $b\dot{s}$ в динах. Для того чтобы получить ее в граммах, необходимо, очевидно, разделить полученное значение в динах на $g = 981$.

22. Необходимо заметить, что при быстром движении закон сопротивления среды уже не будет линейным. Для скоростей, обычно встречающихся на практике, а именно между 2 и 200 *м/сек*, сопротивление приблизительно пропорционально квадрату скорости[1]. Это так называемый *квадратичный* или *гидравлический* закон сопротивления, одинаково хорошо применимый как для воды, так и для воздуха. Коэффициент при v^2 можно взять в форме $KA\alpha$, где множитель K зависит только от свойств среды и пропорционален ее плотности, A есть площадь миделева сечения движущегося тела, т. е. площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения, и α — отвлеченное число, зависящее от формы, но не от размеров движущегося тела, и от ориентировки тела относительно направления движения, предполагаемого поступательным.

Очевидно, что при A и α, равных единице, коэффициент K будет представлять собой сопротивление среды.

Принимая для квадрата (в виде тонкой пластинки, движущейся перпендикулярно к своей плоскости) $\alpha = 1$, получим для воды как среднее из многочисленных опытов[2])

$$K = 94{,}6 \text{ кг/м}^2,$$

а для воздуха

$$K = 0{,}08 \text{ кг/м}^2.$$

Заметим, впрочем, что последнее значение действительно только для квадратных пластинок с площадью, большей 1 *м*². В случае же пластинок с меньшей площадью коэффициент K несколько меньше

---

[1]) Опыты, произведенные недавно для большого диапазона скоростей, как будто показали, что в интервале от 75 до 100 *м/сек* наблюдается небольшое уменьшение коэффициента пропорциональности (см., например, Fuchs — Hopf, *Aërodynamik*, Berlin, Schmidt, 1922).

[2]) См., например, G. Eiffel, La résistence de l'air (Paris, 1910).

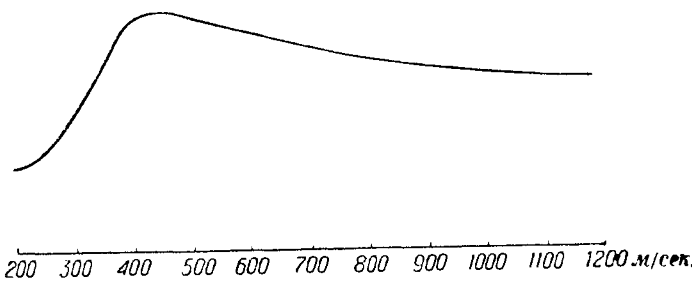
и для пластинок с площадью в несколько квадратных сантиметров достигает значения 0,066.

Итак, общим выражением квадратичного сопротивления будет

$$f(\dot{s}) = \pm KA\alpha v^2 = \pm KA\alpha \dot{s}^2.$$

Двойной знак вводится потому, что направление силы всегда противоположно направлению скорости, и поэтому надо брать знак минус, когда движение прогрессивное ($\dot{s} > 0$), и знак плюс, когда движение регрессивное ($\dot{s} < 0$).

23. Для движений с еще более значительными скоростями, встречающимися, например, в баллистике, сопротивление фактически уже не остается пропорциональным квадрату скорости, а следует совсем



Фиг. 5.

другому закону. В общем случае сопротивление воздуха, отнесенное к единице массы, можно представить в виде $\lambda F(v)$, где λ — коэффициент, зависящий от формы снаряда и от плотности воздуха (аналогично коэффициенту $KA\alpha$), но не зависящий от скорости, а $F(v)$ есть функция только скорости v.

Сиаччи[1]) первым начал систематические опыты с целью определения функции $F(v)$. В результате своих исследований он получил для частного $K(v) = \frac{F(v)}{v^2}$ (которое в случае квадратичного сопротивления должно было бы быть постоянным) кривую, изображенную на фиг. 5. Мы видим, что, начиная с 200 *м/сек*, кривая быстро поднимается, при скорости, близкой к скорости звука, имеет точку перегиба и достигает максимума между 400 и 500 *м/сек*, после чего медленно опускается, по крайней мере для скоростей, проверенных до сих пор на опыте.

[1]) Франческо Сиаччи (Francesco Siacci) родился в Риме в 1839 г., умер в Неаполе в 1907 г. Преподавал баллистику в Практической школе артиллерийских и инженерных наук (Scuola d'Applicazione d'Artiglieria e Genio в Турине. Состоял профессором в университете сначала в Турине, а потом в Неаполе. Известен как автор трактата по баллистике (F. Siacci, Balistica 2 изд., Torino, 1888) и ряда других крупных работ.

§ 6. Движение под действием позиционной силы

24. В предыдущих параграфах мы изложили общие сведения элементарного характера, относящиеся к динамике одномерного движения точки. Перейдем теперь к углублению этих сведений, иллюстрируя изложение рядом типичных задач.

Прежде всего займемся изучением качественной стороны движения точки по заданной траектории под действием какой угодно позиционной силы. Возьмем соответствующее уравнение живых сил (8′)

$$\dot{s}^2 = \Phi(s);$$

на основании равенств (7) и (9) имеем

$$\frac{1}{2} m \frac{d\Phi}{ds} = f(s) = F_t. \tag{9'}$$

Уравнение (8′) есть необходимое следствие из основного уравнения (2′)

$$m\ddot{s} = f(s)$$

и, обратно, из уравнения (8′) неизбежно вытекает уравнение (2′) для всех моментов времени, кроме тех, для которых $\dot{s} = 0$. В самом деле, дифференцируя уравнение (8′) по t и принимая во внимание равенство (9′), получаем

$$2\dot{s}(m\ddot{s} - f(s)) = 0.$$

Поэтому при исследовании движения мы можем пользоваться уравнением (8′) вместо уравнения (2′) до тех пор, пока скорость не обратится в нуль; для тех же моментов времени, когда $\dot{s} = 0$, уравнения (8′) будет недостаточно. Необходимо также убедиться в том, что удовлетворяется уравнение (2′).

Относительно функции $\Phi(s)$, входящей в уравнение (8′), мы сделаем одно аналитическое допущение, хорошо согласующееся с характерными чертами тех явлений, с которыми мы встречаемся в механике. А именно, предположим, что функция $\Phi(s)$ при всех тех конечных значениях s, которые мы будем рассматривать, конечна и непрерывна вместе со своими производными всех порядков; следовательно, для всякого возможного корня s_1 уравнения $\Phi(s) = 0$ между последовательными производными функции $\Phi(s)$ всегда найдется такая, которая при $s = s_1$ будет отлична от нуля. Этому условию наверное удовлетворяют все аналитические и регулярные функции *) $\Phi(s)$ для тех значений s, которые нам придется здесь рассматривать.

*) Аналитическая функция $f(z)$ называется *правильной* или *регулярной* в точке a, если внутри некоторого круга с центром в точке a она может быть разложена в ряд Тэйлора

$$f(z) = A + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots$$

(Прим. ред.)

25. Далее, заметим, что при движении, определяемом уравнением (8′), функция $\Phi(s)$, равная квадрату скорости, всегда или положительна, или равна нулю. Следовательно, в зависимости от начальных условий могут быть два случая, а именно, для значения s_0, соответствующего начальному положению движущейся точки, будет $\Phi(s_0) > 0$ или $\Phi(s_0) = 0$.

В первом случае в свою очередь представляются две возможности. В самом деле, предполагая $\Phi(s_0) > 0$, будем иметь для скорости $\dot{s}_0$ на основании уравнения (8′) два возможных значения

$$\dot{s}_0 = \pm\sqrt{\Phi(s_0)},$$

не равных нулю и отличающихся друг от друга только знаком; тот или другой знак определяется установленным произвольно положительным направлением на кривой, по которому начинается движение. После выбора направления получаем для движения одно из двух дифференциальных уравнений первого порядка,

$$\dot{s} = \pm\sqrt{\Phi(s)}.$$

Это уравнение определяет движение до тех пор (см. предыдущий пункт), пока скорость не обращается в нуль, т. е. пока s не совпадает с одним из корней $\Phi(s)$.

Таким образом, случай $\Phi(s_0) > 0$ распадается на два частных случая: или от s_0 до $\pm\infty$ в направлении движения не встречается больше корней $\Phi(s)$; или же в указанном направлении существует первый корень s_1 функции $\Phi(s)$.

26. Рассматривая первый частный случай, предположим для определенности, что $\dot{s}_0 > 0$; следовательно, согласно сказанному выше движение определяется уравнением

$$\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)} \tag{8''}$$

и при $s \geqslant s_0$ $\Phi(s)$ всегда > 0. Из уравнения (8″), разделяя переменные, как в п. 15, получаем

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}. \tag{12}$$

Так как $\Phi(s)$ при $s \geqslant s_0$ в нуль не обращается, то мы можем увеличивать криволинейную абсциссу s от ее начального значения s_0 до бесконечности. Следовательно, t, как показывает уравнение (12), будет все время расти (начальное значение t можно принять равным нулю), т. е. t будет монотонной функцией от s.

Если функция $\dfrac{1}{\sqrt{\Phi(s)}}$ допускает интегрирование в бесконечных, то t при неограниченном возрастании s будет стремиться к некоторому конечному пределу t_1; в противном случае t будет стремиться к бесконечности. Следовательно, из монотонности функции $t(s)$ вытекает, что обратная функция $s(t)$ будет также монотонной. Эта функция $s(t)$ согласно определению удовлетворяет уравнению (8″) и при $t=0$ принимает значение s_0. На основании теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка (эта теорема справедлива при весьма широких качественных условиях, которые в настоящем случае можно считать с избытком выполненными) непосредственно получаем, что функция, найденная таким путем, является решением уравнения (8″), дающим искомый закон движения. Таким образом, в рассмотренном случае движущаяся точка в течение конечного или бесконечного промежутка времени уходит из своего начального положения в бесконечность.

27. Предположим теперь, что попрежнему $\Phi(s_0)>0$ и $\dot{s}_0>0$, т. е. движение опять определяется уравнением (8″), но при изменении s от s_0 в направлении начальной скорости встречается такое конечное значение s_1, которое является первым корнем уравнения $\Phi(s)=0$.

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, на основании уравнения (12) будем иметь, что t при возрастании s от s_0 до s_1 тоже постоянно возрастает. Точнее, поскольку функция

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi(s)}}$$

при $s=s_1$ имеет бесконечность порядка $\frac{m}{2}$, где m есть порядок нуля s_1 функции $\Phi(s)$, монотонная функция

$$t(s)=\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}$$

при возрастании s от s_0 до s_1 будет стремиться к конечному значению t_1 или к бесконечности, смотря по тому, будет ли s_1 простым нулем или кратным. Но, как и в предыдущем пункте, обратная функция $s(t)$, будучи монотонной, удовлетворяет уравнению (8″) и при $t=0$ принимает значение s_0. Следовательно, $s=s(t)$ будет законом рассматриваемого движения. Таким образом, если s_1 есть простой нуль функции $\Phi(s)$, то при сделанных предположениях движущаяся точка, перемещаясь постоянно в одну сторону из положения s_0, через конечный промежуток времени придет в положение s_1; напротив, если s_1 есть кратный нуль, то движущаяся точка, перемещаясь все время в одну сторону, неограниченно приближается к положению s_1, но никогда его не достигает *(асимптотическое движение)*.

28. Остается рассмотреть тот случай, когда начальная скорость равна нулю, т. е. когда начальное значение s_0 является нулем функции $\Phi(s)$. В этом случае движение в начальный момент уже не может быть описано полностью уравнением живых сил (8′) (см. п. 24).

Сначала предположим, что s_0 является простым нулем функции $\Phi(s)$. В этом случае мы придем к „закону возникающего движения" (т. I, гл. VII, п. 12), на основании которого при начальной скорости, равной нулю, первый элемент пути проходится движущейся точкой в направлении действующей активной силы, т. е. в нашем случае в направлении, определяемом знаком F_t, или на основании уравнения (9′) знаком производной $\frac{d\Phi}{ds}$ при $s=s_0$, которая, по предположению, для $s=s_0$ отлична от нуля. Отсюда следует, что непосредственно вслед за этим начальным мгновением мы снова будем иметь условия, рассмотренные в двух предыдущих пунктах, т. е. материальная точка, не изменяя направления своего движения, или будет двигаться в направлении первого элемента своего пути до бесконечности, если только с этой стороны от s_0 нет нулей функции $\Phi(s)$, или в конечное время достигнет первого нуля функции $\Phi(s)$, если этот нуль простой, или, наконец, асимптотически будет стремиться к этому нулю, если он кратный.

29. Предположим, наконец, что начальное расстояние s_0 является кратным нулем функции $\Phi(s)$. Тогда для определения движения недостаточен и закон возникающего движения, так как при обращении в нуль $\frac{d\Phi}{ds}$ при $s=s_0$ обращается в нуль на основании равенства (9′) также и начальная (касательная) сила $f(s_0)$. Однако в этом случае, как и во всяком другом, $s=s_0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка (2′)

$$m\ddot{s}=f(s),$$

к которому необходимо возвращаться всегда, когда при обращении скорости в нуль уравнение первого порядка (живых сил) становится недостаточным для определения движения.

На основании теоремы существования и единственности интеграла дифференциального уравнения второго порядка решение $s=s_0$ будет единственным решением уравнения (2′), для которого начальными условиями будут $s=s_0$ и $\dot{s}=0$. Отсюда следует, что при сделанных предположениях материальная точка остается в равновесии в начальном положении.

Сравнивая этот результат с результатом п. 27, можно сказать, что движущаяся точка не может уже во время движения проходить через такое положение, криволинейная абсцисса которого является кратным (правильным) нулем функции $\Phi(s)$: она может только стремиться к нему в асимптотическом движении, или же неограниченно долго оставаться в нем в случае, если она была там вначале.

30. Результаты пп. 26—29 позволяют выяснить, как протекает изучаемое движение, начиная с какого-нибудь начального положения.

Особого внимания заслуживает случай, когда это начальное положение находится между двумя простыми последовательными нулями s_1 и s_2 функции $\Phi(s)$, причем оно может и совпадать с одним из этих нулей. Напомним, что между этими нулями функция $\Phi(s)$ на основании условия действительности движения остается все время положительной. В таком случае, предполагая для определенности, что $s_1 < s_2$, можно представить функцию $\Phi(s)$ в виде

$$\Phi(s) = (s - s_1)(s_2 - s)\,\Phi_1(s), \tag{13}$$

где $\Phi_1(s)$ обозначает функцию, положительную во всем интервале от s_1 до s_2, включая и концы интервала. Уравнение живых сил примет вид

$$\dot{s}^2 = (s - s_1)(s_2 - s)\,\Phi_1(s). \tag{14}$$

Фиксируя в интервале от s_1 до s_2, например, в какой-нибудь внутренней точке, начальное положение s_0 материальной точки, мы тем самым определим абсолютную величину $\sqrt{(s_0 - s_1)(s_2 - s_0)\,\Phi_1(s_0)}$ начальной скорости $\dot{s}_0$, но не ее знак, который можно выбрать произвольно.

Если, например, взять знак плюс, то получим движение, все время направленное к точке s_2, причем это положение достигается движущейся точкой за конечное время (п. 27). В точке s_2 скорость обращается в нуль, и, так как s_2 есть простой нуль функции $\Phi(s)$, то отсюда движение начнется снова в направлении, указываемом знаком действующей тангенциальной силы, т. е. знаком, который в точке s_2 имеет функция $\frac{d\Phi}{ds}$. Так как на основании равенства (13)

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_2} = -(s_2 - s_1)\,\Phi_1(s_2) < 0\ ,$$

то движение после достижения точки s_2 будет происходить в обратном направлении, т. е. по направлению к точке s_1. В это положение движущаяся точка придет опять за конечный промежуток времени и будет иметь в нем скорость, равную нулю. Так как s_1 есть простой нуль функции $\Phi(s)$ и так как

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_1} = (s_2 - s_1)\,\Phi_1(s_1) > 0\,,$$

то движущаяся точка, остановившись на мгновение в положении s_1, снова начнет двигаться к s_2. Следовательно, материальная точка будет неограниченно долго колебаться между положениями s_1 и s_2.

Таким образом, из рассмотрения уравнения (14) следует, что материальная точка при двух *последовательных* прохождениях через одно и то же положение s', заключенное между s_1 и s_2, будет иметь скорости, одинаковые по абсолютной величине, но с противоположными знаками. Следовательно, при третьем прохождении через s' материальная точка снова будет иметь ту же скорость (и по величине и по знаку), что и при первом прохождении.

Отсюда ясно, что рассматриваемое движение *периодично*; в самом деле, при третьем прохождении через любое положение s' скорость приобретает те же величину и направление, что и при первом прохождении, следовательно, картина движения полностью повторяется. Промежуток времени между двумя последовательными повторениями картины движения называется *периодом* колебания.

Этому интуитивному выводу можно придать строгую аналитическую форму, если применить теорему существования и единственности интеграла к уравнению (2')

$$m\ddot{s} = f(s).$$

Обозначим через t' и $t' + T$ моменты первого и третьего прохождения нашей точкой положения s' и через $\dot{s}'$ — соответствующую скорость. Координата s движущейся точки, рассматриваемая как функция от t, дает решение $s(t)$ уравнения (2'), причем при $t = t'$ эта координата принимает значение s', а ее производная становится равной $\dot{s}'$. С другой стороны, уравнение (2'), не зависящее явно от t, не изменяется при замене t на $t + \text{const}$, следовательно, функция $s(t + T)$ тоже будет интегралом уравнения (2'). Но при $t = t'$ значения этой функции и ее первой производной дают координату и скорость при третьем прохождении, совпадающие с координатой и скоростью при первом прохождении. Отсюда на основании упомянутой теоремы о единственности решения (соответствующего указанным начальным условиям) будем иметь тождество

$$s(t + T) = s(t),$$

которое как раз и выражает периодичность движения.

Таким образом, мы устанавливаем, в частности, что промежуток времени T, введенный сначала для частного положения s', не зависит от него. Кроме того, эта независимость может быть установлена аналитическим путем, если будет найдено явное выражение периода T. Действительно, из самого определения T на основании формулы (12) получим, предполагая для определенности, что вначале движение направлено от s' к s_2,

$$T = \int_{s'}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}} + \int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{-\sqrt{\Phi(s)}} + \int_{s_1}^{s'} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}},$$

или

$$T = 2\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}. \tag{15}$$

Это и есть период колебания.

Из тождества

$$\int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{-\sqrt{\Phi(s)}},$$

только что использованного для вывода формулы (15), мы видим, что всякое *полное колебание*, т. е. движение, заключенное между двумя последовательными прохождениями точки через одно из крайних положений, например через s_1, можно разбить на два *простых колебания* (первое от s_1 до s_2, второе от s_2 до s_1) равной продолжительности

$$\tau = \frac{1}{2}T = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}.$$

Вследствие периодичности можно ограничиться изучением одного полного колебания, например колебания, начинающегося в s_1, вследствие чего второе крайнее положение s_2 будет достигнуто за полупериод τ, в то время как движущаяся точка возвратится в первый раз в s_1 по истечении целого периода $T = 2\tau$. Так как замена t на $t + \mathrm{const}$ является несущественной, то можно предположить, что прохождение через s_2 происходит в момент $t = 0$, или, другими словами, что наше полное колебание совершается за интервал времени от $-\tau$ до τ.

Далее, легко видеть, что в моменты t и $-t$, равно отстоящие от $t = 0$, движущаяся точка занимает одно и то же положение, но имеет равные по абсолютной величине и противоположные по знаку скорости. Это обстоятельство также непосредственно вытекает из теоремы существования и единственности интеграла, если принять во внимание, что уравнение (2′) не изменится при замене t на $-t$. Действительно, отсюда выводится, что если функция $s(t)$ есть решение уравнения (2′), принимающее при $t = 0$ значение s_2, в то время как ее производная обращается в нуль, то функция $s(-t)$ также будет решением уравнения (2′), удовлетворяющим тем же начальным условиям. Отсюда получаем тождество

$$s(t) = s(-t),$$

из которого следует, что

$$\dot{s}(t) = -\dot{s}(-t).$$

В силу отмеченного свойства график функции $s=s(t)$ симметричен по отношению к оси $t=0$, если рассматривать изменение t от $t=-\tau$ до $t=\tau$, т. е. за время полного колебания.

31. В качестве непосредственного и весьма элементарного приложения предыдущей теории рассмотрим снова дифференциальное уравнение движения под действием восстанавливающей силы (п. 18)

$$\ddot{s}=-\omega^2 s \qquad \left(\omega^2=\frac{\lambda}{m}\right);$$

полагая

$$r^2=\frac{2E}{c},$$

будем иметь интеграл живой силы в виде

$$\dot{s}^2=\omega^2(r^2-s^2).$$

Отсюда следует, так как s' действительно, что движущаяся точка не может выходить из интервала, заключенного между двумя простыми нулями $\pm r$ функции, стоящей в правой части, и что речь идет о периодическом колебательном движении между этими двумя крайними положениями.

Период, не зависящий от начального положения, определяется равенством

$$T=\frac{2}{\omega}\int\limits_{-r}^{r}\frac{ds}{\sqrt{r^2-s^2}}=\left[\arcsin\frac{s}{r}\right]_{-r}^{r}=\frac{2\pi}{\omega}; \tag{16}$$

все последовательные простые колебания (от $s=-r$ до $s=r$ или обратно) будут совершаться по одному и тому же закону, если не считать изменения направления движения и смены одного промежутка времени другим. Таким образом, мы снова получаем хорошо известные свойства гармонического движения (т. I, гл. II, пп. 34—36).

32. Последнее заключительное замечание. В п. 30 мы изучали случай, когда начальное положение движущейся точки принадлежит интервалу, заключенному между двумя последовательными простыми нулями функции $\Phi(s)$, в котором эта функция остается положительной.

Из пп. 26—29 вытекает, что помимо колебательных периодических движений, которые получаются при упомянутых выше предположениях, для случая (тангенциальной) действующей силы, зависящей только от положения (в согласии с условиями, указанными в п. 24), возможны еще движения, при которых обращение направления происходит не более одного раза (соответственно одному простому нулю функции $\Phi(s)$). Эти движения допускают асимптотическую точку на конечном расстоянии (в кратном нуле) или же в бесконечности (когда движущаяся точка не встречает уже на своем пути ни одного нуля функции $\Phi(s)$).

Исследование, изложенное в этом параграфе, заимствовано из одного (теперь уже классического) мемуара Вейерштрасса[1]).

§ 7. Математический маятник

33. Применим теперь общие рассуждения предыдущего параграфа к математическому маятнику. Под этим названием в механике подразумевается тяжелая материальная точка P, вынужденная оставаться на окружности, расположенной в вертикальной плоскости, и движущаяся без трения. Тангенциальная сила F_t в этом случае сводится к составляющей веса; следовательно, речь идет о силе, зависящей только от положения, поэтому можно утверждать (§ 4), что движение можно определить при помощи квадратур.

Прежде чем исследовать ход движения, выясним, при каких практических условиях оказывается возможным приблизительно выполнить предыдущие предположения. Если, например, возьмем тяжелый шарик, скользящий в трубке, согнутой в кольцо, то действие трения будет слишком значительным для того, чтобы им можно было пренебречь хотя бы в первом приближении. Дело будет обстоять лучше, если связь, удерживающая точку P, будет осуществлена в виде нити, прикрепленной одним концом к неподвижной точке O, или в виде тонкого твердого стержня, вращающегося в заданной вертикальной плоскости вокруг точки O; материальная точка P прикреплена в том и другом случае к свободному концу (нити или стержня).

Если речь идет о нити, то мы будем предполагать, что и в случае движения остается в силе допущение о натяжении, которое мы приняли в п. 36 гл. XIV т. I. Тогда, если тяжелая точка P колеблется так, что нить остается натянутой, то сила $\boldsymbol{R}$, с которой нить действует на точку P, будет всегда направлена к неподвижной точке O, и поэтому будет нормальной к траектории, что как раз и означает отсутствие трения.

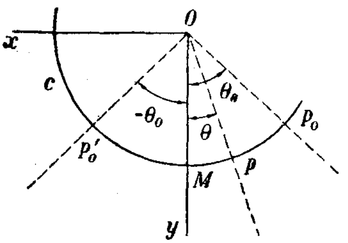
Если нить заменяется твердым стержнем, то a priori можно считать, что он будет действовать на точку P не только в радиальном направлении (в сторону точки O или, что одинаково возможно, в обратную сторону), но будет также передавать точке (полностью или частично) действие сил, приложенных к самому стержню: собственного веса, сопротивления воздуха и, кроме того, трения, развивающегося в точке подвеса O.

[1]) Карл Вейерштрасс (Karl Weierstrass) родился в 1815 г. в Остенфельде (Вестфалия), умер в 1897 г. в Берлине, где был профессором университета в течение 40 лет. Он дал новый систематический метод в теории функций и, в частности, в теории эллиптических функций. Помимо того он весьма активно работал почти во всех областях анализа. Мемуар, на который делается ссылка в тексте, находится во II томе его сочинений.

Однако трение в точке подвеса можно уменьшить путем подходящего устройства (подвес на острие); сопротивление воздуха, так же как и влияние собственного веса стержня, может быть по желанию уменьшено, если стержень взять достаточно тонким. При таких ограничениях и в этом случае оказывается возможным рассматривать связь, как связь без трения.

В дальнейшем (гл. VII, § 2) мы рассмотрим случай так называемого физического или сложного маятника, когда учитывается и вес стержня.

34. Пусть точка P движется по окружности c, расположенной в вертикальной плоскости. Будем относить точки плоскости к системе координат x, y с началом в точке подвеса O (центре окружности c) и с вертикальной осью y, направленной вниз (фиг. 6). Обозначим через l длину маятника (радиус окружности c) и через θ угол отклонения его от вертикали, т. е. угол, который радиус-вектор OP образует с вертикалью Oy. Угол θ отсчитывается в том направлении, в котором положительное вращение на прямой угол переводит положительное направление оси x в положительное направление оси y. Вследствие этого угол отклонения, соответствующий заданному положению движущейся точки P, оказывается определенным только до числа (положительного или отрицательного), кратного 2π; значение его можно уточнить, указав, сколько раз движущаяся точка описала полную окружность, считая от самого низкого положения M, прежде чем прийти в P. Если за угол θ возьмем какое-нибудь значение угла отклонения вектора $\overrightarrow{OP}$ от вертикали, то $\frac{\pi}{2}+\theta$ можно будет рассматривать как угол, который прямая OP составляет с положительным направлением оси x (угол считается положительным в направлении $x \to y$ и отрицательным в обратном направлении). Поэтому для всякой точки P окружности c будем иметь



Фиг. 6.

$$x = l\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -l\sin\theta, \quad y = l\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = l\cos\theta. \tag{17}$$

Далее, если длину дуги s окружности c будем отсчитывать от самого низкого положения M при том же самом соглашении о выборе положительного направления отсчета углов, то будем иметь соотношение

$$s = l\theta, \tag{18}$$

которое дает возможность принять за параметр, определяющий положение движущейся точки, вместо дуги s угол θ. Если это равенство мы продифференцируем по времени, то получим известное соотношение между линейной и угловой скоростями

$$\dot{s}=l\dot{\theta}. \tag{19}$$

Теперь, для того чтобы написать дифференциальное уравнение движения маятника, заметим, что $\theta+\frac{\pi}{2}$ есть угол, который образует с вертикалью, направленной вниз, касательная к окружности (ориентируемая в направлении возрастания s или θ). Тангенциальная составляющая веса P, если принять массу равной единице, будет равна

$$g\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-g\sin\theta.$$

Поэтому, принимая во внимание соотношение (18), мы получим дифференциальное уравнение движения маятника в виде

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta. \tag{20}$$

Это уравнение, как увидим далее, замечательно во многих отношениях; оно нам уже встречалось в указаниях, данных в т. I по поводу задачи о плоской пружине (гл. XIV, п. 74).

Здесь прежде всего следует обратить внимание на то, что уравнение (20) в силу того способа, каким оно было выведено (вспомним выражение для касательной составляющей действующей силы), действительно лишь при том условии, что на движущуюся точку наложена связь, допускающая движение только *по окружности* (двусторонняя связь). Это условие выполняется непременно, если связь, удерживающая точку P, осуществляется посредством твердого невесомого стержня (двусторонняя связь). Чтобы по возможности облегчить исследование, по крайней мере на первое время, мы разберем задачу сперва в предположении двусторонней связи.

Далее (п. 39) мы рассмотрим, учитывая реакцию связи, верны ли, и в какой мере, те заключения, к которым мы пришли, также и для маятника, подвешенного на нити (односторонняя связь).

35. Из общей теории, изложенной в пп. 12, 15, мы уже знаем, что уравнение (20) интегрируется двумя квадратурами. Первый интеграл мы получим, умножая обе части равенства (20) на $2\dot{\theta}$ и интегрируя. Этот интеграл представляет собой интеграл живых сил

$$T-U=E,$$

где U обозначает потенциал силы тяжести, отнесенный к единице массы, и определяется равенством

$$U=gy=gl\cos\theta,$$

а живая сила точки P в силу формулы (19) выразится в виде

$$T=\frac{1}{2}l^2\dot\theta^2.$$

Следовательно, интеграл живых сил будет

$$\frac{1}{2}l^2\dot\theta^2-gl\cos\theta=E, \tag{21}$$

или

$$\dot\theta^2=2\frac{g}{l}(\cos\theta+e),$$

где постоянная $e=\frac{E}{gl}$ определяется по начальным условиям, т. е. путем подстановки в уравнение (21) вместо θ и $\dot\theta$ тех значений, которые они имеют в начальный момент.

Рассматривая равенство (21), мы видим, что к исследованию определяемого им движения можно применить общие выводы предыдущего параграфа для уравнений типа (8') с той лишь разницей, что качественные результаты, полученные там для дуги s, здесь будут относиться к углу θ.

Заметим, что условие действительности $\dot\theta$ влечет за собой неравенство $e\geqslant-1$.

Рассмотрим здесь последовательно два предположения: $e>1$ и $-1\leqslant e\leqslant 1$.

36. Вращательное движение. При $e>1$ картина движения исследуется легко.

Функция

$$2\frac{g}{l}(\cos\theta+e),$$

представляющая собой функцию $\Phi(s)$ общего случая, при всяком значении θ остается отличной от нуля и всегда не меньшей, чем $2\frac{g}{l}(e-1)$; поэтому при всяком возможном выборе начального значения угла θ, подчиненном условию $e>1$, функция $\theta(t)$ при бесконечном возрастании t монотонно стремится к бесконечности в произвольно выбираемом направлении, совпадающем с направлением начальной скорости. Угловая скорость будет всегда превосходить положительное значение корня

$$\sqrt{2\frac{g}{l}(e-1)}$$

или, в крайнем случае, равняться ему. В конечном счете мы будем иметь вращательное движение, совершающееся постоянно в одном и том же направлении.

Движущаяся точка неограниченное число раз проходит через каждую точку окружности (в частности, через свое начальное положение) и, как это вытекает из уравнения (21) и из периодичности функции $\cos\theta$, при каждом таком прохождении она всякий раз имеет в этой точке одну и ту же угловую, а следовательно, и линейную скорость. Теперь легко показать, что здесь мы имеем дело с *периодическим движением*. Действительно, заметим прежде всего, что если θ_0 является начальным значением отклонения движущейся точки и если для определенности предположим, что движение в начальный момент было прямым, то отклонение $\theta(t)$ точки в любом ее положении будет определено в функции от времени (отсчитываемого от момента начала движения) тем интегралом дифференциального уравнения

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta+e)},\tag{22}$$

который однозначно определяется начальным условием

$$\theta(0)=\theta_0.\tag{23}$$

Если обозначим через T промежуток времени, по истечении которого точка, выйдя из начального положения, вновь в него возвратится, то для того же интеграла уравнения (22) будем иметь

$$\theta(T)=\theta_0+2\pi.\tag{24}$$

Функция $\theta(t+T)$, так же как и $\theta(t)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (22), как в этом легко убедиться, замечая, что это дифференциальное уравнение преобразуется само в себя при замене переменного t на $t+T$; этому же уравнению (22) вследствие периодичности косинуса удовлетворяет также функция $\Theta(t)$, определяемая равенством

$$\Theta(t)=\theta(t+T)-2\pi.\tag{25}$$

Но для этого частного интеграла уравнения (22) имеем

$$\Theta(0)=\theta(T)-2\pi,$$

или, принимая во внимание (24),

$$\Theta(0)=\theta_0.$$

Поэтому функция $\Theta(t)$, удовлетворяющая тому же начальному условию, что и $\theta(t)$, вследствие теоремы единственности интеграла совпадает с $\theta(t)$. На основании определения (25) функции $\Theta(t)$ получаем тождество

$$\theta(t+T)=\theta(t)+2\pi,\tag{26}$$

которое, в силу того, что два отличающихся на 2π угла определяют одну и ту же точку окружности, как раз и выражает то, что наше движение является периодическим с периодом T.

Аналогичное доказательство, естественно, остается в силе и в случае обратного движения; достаточно только заменить 2π на -2π в равенствах (24) и (25), а следовательно, и в тождестве (26).

37. Колебания (и, как частные случаи, состояния равновесия). Изученный выше тип прямого вращательного движения, очевидно, не выражает характерных особенностей обычных колебаний маятника.

Эти колебания определяются, как мы скоро покажем, только теми интегралами уравнения движения, для которых постоянная e больше -1 и меньше $+1$.

Но сначала рассмотрим оба исключенных случая: $e=-1$ и $e=+1$. На основании известных тригонометрических тождеств имеем

$$\cos\theta-1=-2\sin^2\frac{\theta}{2},\quad \cos\theta+1=2\sin^2\frac{\theta-\pi}{2};$$

отсюда видно, что функция в правой части равенства (21) для $e=-1$ или $e=+1$ имеет двойной нуль $\theta=0$ или соответственно $\theta=\pi$; кроме того, в каждом из двух случаев это будет единственным нулем нашей функции (по крайней мере, с точностью до произвольного числа, кратного 2π, не существенного для определения угла). Отсюда на основании п. 29 заключаем, что материальная точка P, предоставленная самой себе без начальной скорости ($\dot\theta_0=0$), в самом ли нижнем положении M ($\theta_0=0$) или в положении прямо противоположном A ($\theta_0=\pi$), остается там сколь угодно долго.

Для полноты мы должны исследовать, возможны ли, кроме этих двух состояний равновесия, также и движения, для которых постоянная e имела бы значение ±1 и которые мы намерены исключить. На основании уравнения (21) мы тотчас же видим, что значение $e=-1$ совместимо только с равновесием (устойчивым) в самом нижнем положении M, так как из того, что правая часть не может сделаться отрицательной ($\dot\theta^2$ не может быть меньше нуля), необходимо следует, что функция θ все время должна быть равна нулю. Наоборот, при $e=1$, каково бы ни было начальное значение θ_0 переменной θ (отличное от 0 и π), равенство (21) допускает решение, соответствующее действительному движению, поскольку начальная скорость на основании того же равенства (21) будет отличной от нуля. Правая часть равенства (21) при $e=1$ имеет *двойной* нуль $\theta=\pi$ в самом высшем положении A точки на окружности c (точка, прямо противоположная M). Движение точки в этом случае в согласии с общими выводами п. 27, начинаясь в положении P_0, происходит постоянно в одном и том же направлении, определяемом начальной скоростью; при неограниченном возрастании времени движущаяся точка асимптотически приближается к точке A.

Отбрасывая теперь оба предположения $e=\pm1$, перейдем к рассмотрению тех интегралов движения, для которых имеем $-1<e<1$.

С этой целью обратимся к условиям, наиболее типичным для начала движения маятника; предположим, что материальная точка P выведена из состояния равновесия M и в некотором положении P_0, отличном от M, и от положения, прямо противоположного M, предоставлена самой себе без начальной скорости. Обозначим через θ_0 отклонение точки P_0, заключенное между $-\pi$ и π, исключая значения $\theta_0 = \pm\pi$ и значение, равное нулю.

Подставляя в уравнение (21) начальные значения

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

получим для постоянной e значение

$$e = -\cos\theta_0, \tag{27}$$

явно заключенное между -1 и $+1$. Обратно, всякий раз, когда в уравнении (21) постоянная e удовлетворяет условию $-1 < e < 1$, достаточно взять

$$\theta_0 = \arccos(-e),$$

чтобы иметь угол отклонения для того положения, исходя из которого точка P, предоставленная самой себе с начальной скоростью, равной нулю, совершает движение, определяемое уравнением (21).

Поэтому мы будем брать уравнение (21) в форме

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0); \tag{21'}$$

на основании известного тригонометрического тождества это уравнение можно написать также в виде

$$\dot{\theta}^2 = 4\frac{g}{l}\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}.$$

Отсюда следует, что функция в правой части имеет два бесконечных ряда корней: $\theta_0 + 2k\pi$ и $-\theta_0 + 2k\pi$, где k есть какое-нибудь целое число (положительное, отрицательное или равное нулю). Так как все члены каждого из этих двух рядов определяют на окружности одно и то же положение, то достаточно рассмотреть только один член каждого из этих рядов, т. е. достаточно взять, например, два корня: θ_0 и $-\theta_0$. Так как производная от синуса, т. е. косинус, при обращении синуса в нуль отлична от нуля, то каждый из двух корней θ_0 и $-\theta_0$ является простым для правой части равенства (21'), за исключением тех случаев, когда эти корни совпадают или же отличаются друг от друга на кратное 2π. Но второй случай не может иметь места, так как предполагается, что $|\theta_0| < \pi$, первый же сам собой исключается, так как это означало бы, вопреки предположению, что $\theta_0 = 0$.

Поэтому на основании п. 30 можно прямо заключить, что маятник периодически колеблется между положениями P_0 и P'_0, углы отклонения которых равны соответственно θ_0 и $-\theta_0$. Каждое полное колебание (от P_0 до P'_0 и обратно) можно разбить на два простых колебания равной продолжительности. Простые колебания совершаются таким образом, что маятник при простом колебании от P_0 до P'_0 и при следующем простом колебании от P'_0 до P_0 проходит через одно и то же положение P в два мгновения, одно из которых предшествует, а другое следует за тем мгновением, когда маятник достигает крайнего положения P'_0, по истечении одного и того же промежутка времени.

Но здесь мы уже можем сказать несколько больше. Прежде всего всякое простое колебание, например от P_0 до P'_0, в свою очередь можно разбить на два полуколебания равной продолжительности: одно от P_0 до самой нижней точки M, другое от M до P'_0. Действительно, предположим, что $\theta_0 > 0$ (т. е. заключено между 0 и π); это значит, что простое колебание является обратным и поэтому описывается уравнением

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}. \tag{22'}$$

Продолжительности двух полуколебаний от P_0 до M и от M до P'_0 будут даны двумя определенными интегралами

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} &= \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}, \\ -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{0}^{-\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}&, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

которые, очевидно, будут тождественными, если во втором из них заменить θ на $-\theta$. Далее, маятник будет отклоняться на равные по абсолютной величине (но противоположные по знаку) углы, или, другими словами, будет занимать два положения, симметричные относительно вертикали, проходящей через наиболее низкую точку M, по истечении одинаковых промежутков времени после прохождения через M. Действительно, будем отсчитывать время от начала любого простого колебания. Пусть прохождение маятника через M произойдет в момент времени τ_1; тогда, давая общее значение обоим интегралам (28), положим $t = \tau_1 + t^*$, т. е. обозначим через t^* время, отсчитываемое от момента прохождения через M. После этого все сведется к доказательству тождества

$$\theta(\tau_1 + t^*) = -\theta(\tau_1 - t^*). \tag{29}$$

Для доказательства достаточно заметить, что уравнение второго порядка (20) останется неизменным как при замене θ на $-\theta$, так и при замене t на $\pm t + \text{const}$; так что, если одна из двух частей равенства (29) будет интегралом уравнения (20), то и другая часть будет также его интегралом. А так как при $t^*=0$ обе эти части совпадают вместе с их производными, то на основании теоремы о единственности интеграла мы заключаем, что они тождественны. В самом деле, обе части равенства (29) обращаются в нуль при $t^*=0$; дифференцируя обе части равенства и полагая затем $t^*=0$, мы найдем, что и производные тождественны.

38. Вычисление периода. Период T колебаний маятника равен двойной продолжительности τ простого колебания, которое в свою очередь на основании сказанного выше равно двойной продолжительности τ_1 полуколебания. Поэтому имеем

$$\frac{T}{2}=\tau=\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}.$$

Прежде всего покажем, как этот интеграл приводится к *эллиптическому*.

Для доказательства сделаем замену переменного, определяемую равенством

$$\sin\frac{\theta}{2}=u\sin\frac{\theta_0}{2},$$

где u — новая переменная, и примем во внимание следующее соотношение

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\sin\frac{\theta_0}{2}\,du$$

и тождества

$$\cos\theta-\cos\theta_0=2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-u^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}},$$

где корень берется в арифметическом смысле.

Заметим, что при изменении θ от 0 до θ_0 переменная u изменяется, всегда возрастая, от 0 до 1. Для продолжительности τ одного простого колебания мы получим выражение в виде эллиптического интеграла (первого рода)

$$\tau=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},\tag{30}$$

где для простоты записи положено $\sin\frac{\theta_0}{2}=k$.

Такой интеграл нельзя вычислить посредством элементарных трансцендентных функций. Он выражается только в виде ряда. Чтобы получить быстро сходящийся, а поэтому и удобный для вычисления ряд, можно поступить следующим образом.

Так как во всем промежутке интеграции имеем $k^2u^2 < 1$, то функцию

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}} = (1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

можно разложить в сходящийся ряд по формуле бинома, в силу чего получим

$$(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4u^4 + \ldots + \\ + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}k^{2n}u^{2n} + \ldots,$$

или, в более сжатой форме,

$$(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n}u^{2n},$$

где положено

$$c_0 = 1, \quad c_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n} \qquad (n > 0). \tag{31}$$

Подставим это в выражение (30) для τ и проинтегрируем полученный ряд почленно (это возможно, так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n}u^{2n}$, как это вытекает из сравнения с рядом с постоянными членами $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n}$, является равномерно сходящимся во всем промежутке интеграции). Это дает выражение для τ:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n} \int_0^1 \frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}},$$

которое, если принять во внимание известное соотношение

$$\int_0^1 \frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}} = c_n \frac{\pi}{2},$$

упрощается и принимает вид

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k^{2n}.$$

Если напишем его в развернутом виде и вместо k подставим его значение $\sin\frac{\theta_0}{2}$, то получим искомое разложение

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\right)^2\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}+\ldots\right\}. \qquad (32)$$

Если начальный угол отклонения θ_0 является малым, то с известным приближением можно ограничиться только двумя первыми членами, что дает

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right). \qquad (32')$$

Если можно пренебречь и членами второго порядка, то получим хорошо известную элементарную формулу

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (32'')$$

39. Реакция связи. Так как активная сила сводится к весу, то реакция выразится формулой (п. 7).

$$R_n=\frac{v^2}{r}-g\cos\alpha,$$

где величина R_n может быть истолкована также как составляющая по внешней нормали (в нашем случае радиальная) центробежной силы, действующей на стержень маятника (гл. I, § 3, п. 6), а величины r и α соответственно будут радиусом кривизны и углом наклона нормали, направленной в сторону вогнутости, к вертикали, направленной вниз. Ясно, что для маятника имеем $r=l$, $\cos\alpha=-\cos\theta$, так что сила, действующая на стержень, выразится в виде

$$\frac{v^2}{l}+g\cos\theta.$$

Эту силу можно представить в зависимости только от угла θ, если обратиться к интегралу живых сил, который мы возьмем в его общей форме (21).

Действительно, так как в силу (19) $\frac{v^2}{l}=l\dot{\theta}^2$, то, принимая во внимание (21), получим

$$R_n=3g\left(\cos\theta+\frac{2}{3}e\right). \qquad (33)$$

Если, как предполагалось до сих пор, связь осуществляется посредством твердого стержня и поэтому является двусторонней, то характер движения, изученного нами для различных возможных случаев, не будет нарушаться тем, что R_n исчезает или переходит от положительных значений к отрицательным. Пока $R_n > 0$, стержень противодействует растягиванию, и, наоборот, он противодействует сжатию, если $R_n < 0$.

Так, например, на основании формулы (33) легко проверить, как это, впрочем, и непосредственно ясно, что в обоих рассмотренных в п. 36 случаях равновесия мы будем иметь растяжение или сжатие, смотря по тому, будет ли масса маятника занимать самое низкое положение M или положение прямо противоположное.

Но если связь осуществляется посредством нити (односторонняя связь), то необходимо учитывать и знак у R_n, так как движение маятника в различных возможных случаях будет происходить так, как указано в предыдущих пунктах, только при условии, что связь проявляет свое действие, т. е. если постоянно $R_n > 0$.

Чтобы лучше уяснить дело, посмотрим, для каких значений постоянной e (которая, как мы знаем, всегда $\geqslant -1$) выражение для R_n (33) может стать отрицательным. Из того же равенства (33) следует, что R_n будет положительным, если $e > \frac{3}{2}$; с другой стороны, достаточно написать выражение (33) в виде

$$R_n = 3g(\cos\theta + e) - eg$$

и заметить, что на основании уравнения (21) $(\cos\theta + e)$ всегда больше нуля, чтобы убедиться, что R_n обязательно будет положительным всякий раз, когда $e < 0$.

Следовательно, случаи, когда выражение для R_n может стать отрицательным, вследствие чего движение маятника, подвешенного на нити, будет требовать дальнейшего исследования, соответствуют значениям e, заключенным в двух промежутках: от 0 до 1 и от 1 до $^3/_2$. Если бы связь была двусторонней, то речь шла бы соответственно о колебательном движении, в котором, как это следует из равенства (27), маятник опускается без начальной скорости из самого высокого положения над центром подвеса O, или же о достаточно медленном вращательном движении (точнее, о таком движении, у которого минимальная угловая скорость (п. 36) не превышает $\sqrt{\frac{g}{l}}$; при $e = 1$ мы имели бы асимптотическое движение к наивысшей точке круговой траектории C.

Предположим, что подвес осуществлен посредством нити, и рассмотрим сначала колебательное движение. Случай $e = 0$ соответствует колебательному движению, которое можно осуществить, если отпустить маятник с натянутой нитью и без начальной скорости из какого-либо из двух положений, находящихся на одинаковой высоте с центром подвеса. В этом случае можно только сказать, что R_n остается положительной в течение всего колебания и исчезает в крайних его точках. Фиксируем теперь значение e, заключенное между 0 и 1 (исключая крайние значения), и попытаемся определить соответствующее колебательное движение. Для этого приведем маятник в движение из самого низкого положения M $(\theta=0)$ в том или другом направлении с такой угловой скоростью, которая необходима в силу уравнения (21) для рассматриваемого движения. Сначала все будет происходить так, как если бы подвес был осуществлен посредством твердого стержня. Но реакция R_n, которая на основании соотношения (33) положительна в начале (т. е. для значений θ, достаточно близких к 0), при возрастании абсолютного значения θ будет уменьшаться и в некотором положении исчезнет. Это положение в силу равенства (33), конечно, выше точки подвеса $O\left(\theta>\frac{\pi}{2}\right.$ или $\left.\theta<-\frac{\pi}{2}\right)$ и во всяком случае, как это следует из сравнения формулы (33) с уравнением (21), предшествует тому, в котором $\dot{\theta}$ обращается в нуль и которое, в случае двусторонней связи, представляло бы крайнюю точку колебания.

Аналогичные обстоятельства представятся при $1\leqslant e\leqslant {}^3/_2$, т. е. в случаях вращательного движения и асимптотического движения к наивысшей точке окружности c.

Следовательно, при том и другом предположении найдется такое мгновение t_1, когда R_n исчезает и притом так, что если бы связь была осуществлена в виде стержня, то R_n сделалась бы затем отрицательной, и движение продолжалось бы и после этого мгновения и представило бы один из случаев, рассмотренных в предыдущих пунктах. Легко видеть, что произойдет в наших условиях. В положении P_1, соответствующем моменту t_1 (и, конечно, находящемся выше точки O), масса маятника покинет окружность c, и движение (по крайней мере на некоторое время, т. е. до тех пор, пока не будет натянута нить) будет происходить свободно под действием силы тяжести, как если бы нити не было.

Естественно, что обе фазы движения в точке P_1 полностью совпадают не только в отношении скорости, но также и в отношении ускорения. Это происходит потому, что (в движении по окружности) в момент t_1 реакция $R_n=0$, маятнику не противодействует уже никакая реакция связи, и равнодействующая всех сил в этот момент сводится только к весу, как и в последующем затем свободном движении.

Совпадение скоростей влечет за собой совпадение касательных к обеим дугам траекторий в точке P_1 (к окружности и к параболе). Далее, из совпадения ускорений следует, что радиус кривизны параболы в точке P_1 равен радиусу l окружности c. Достаточно заметить, что при совпадении нормалей и равенстве нормальных ускорений v^2/r радиусы кривизны траекторий должны быть одинаковыми, если скорости равны.

40. Случай малых колебаний. Если предположить, что отклонения θ маятника от вертикали малы, таковы, например, что можно пренебречь величиной θ^2 по сравнению с единицей, то вместо синуса можно взять дугу (как в этом можно убедиться, если функцию $\sin\theta$ разложить в ряд Маклорена).

Если ограничиться этим порядком приближения, то дифференциальное уравнение (20) можно заменить линейным уравнением

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta.$$

В правой части этого уравнения мы видим типичное выражение (п. 18) для упругой восстанавливающей силы; таким образом, мы пришли к гармоническому колебательному движению точки по окружности c.

Постоянная ω^2, которая характерна для уравнения гармонических колебаний, заменяется здесь отношением g/l. Период колебания $T = 2\pi/\omega$ в этом случае равен $2\pi\sqrt{l/g}$. Полупериод (продолжительность одного простого колебания) определяется из равенства

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

как мы уже нашли (п. 38) из точного выражения для τ в предположении (по существу равносильном настоящему), что можно пренебречь величиной $\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ по сравнению с единицей.

41. Влияние вязкого сопротивления. Для того чтобы учесть пассивное сопротивление, пропорциональное скорости вида $-b\dot{s}$ (п. 21), очевидно, достаточно прибавить к правой части уравнения (20) член, пропорциональный $\dot{\theta}$, с отрицательным коэффициентом пропорциональности. Обозначая этот коэффициент через $-2h$, получим

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - 2h\dot{\theta}.$$

Если ограничиться, как выше, колебаниями с малой амплитудой, то уравнение упростится, и мы получим

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta - 2h\dot{\theta}.$$

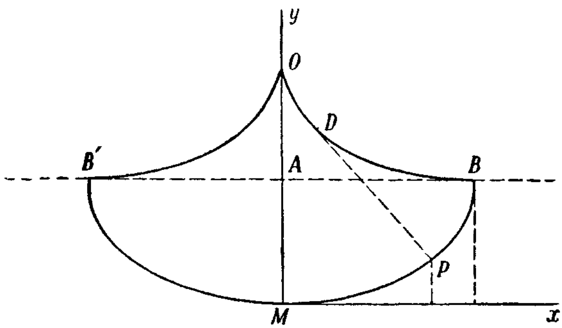
Оно снова приводится к уравнению вида $\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = 0$ (где h и k — положительные постоянные), изученному в пп. 41—43, гл. II, т. I. При $k > h^2$ будем иметь затухающие колебания.

В случае маятника, если речь идет о вязком сопротивлении воздуха, порядок величин $k = \sqrt{g/l}$ и h таков, что выполняется неравенство $k > h^2$. Для этого достаточно, введя линейную скорость $l\dot{\theta}$, представить коэффициент вязкого сопротивления b в виде $2h/l$ и приравнять (п. 21) $6\pi\mu r$, где r — радиус сферы, внутри которой заключена масса маятника, а $\mu = 0{,}000189$. Если для примера принять $l = 1$ *м* $= 100$ *см*, $r = 1$ *см*, то мы немедленно получим, что $k = 9{,}8$ будет больше h^2, так как

$$h^2 = \left(6\pi r \frac{l}{2} 0{,}000189\right)^2 = (0{,}178)^2.$$

Итак, сопротивление (вязкое) воздуха отразится на движении в том, что малые колебания маятника будут затухать по показательному закону, рассмотренному в кинематике.

42. Изохронизм (таутохронность) циклоидального движения. Из соображений, развитых в п. 38 о продолжительности колебаний математического маятника, вытекает один вопрос, который в силу исторического интереса заслуживает особого внимания.



Фиг. 7.

Мы видели, что продолжительность колебания τ маятника (кругового), вообще говоря, зависит от начального угла наклона θ_0 (см. формулы (32) или (32′)); только для малых значений θ_0 она оказывается приблизительно постоянной (и равной $\pi\sqrt{l/g}$). То же относится и к времени падения (из начального положения до самой низкой точки M), которое равно $\tau/2$.

Еще Гюйгенс поставил вопрос о замене, если это возможно, окружности другой кривой, тоже расположенной в вертикальной плоскости и строго *изохронной*, т. е. такой, чтобы время падения тяжелой точки, вынужденной двигаться по кривой без трения, действительно стало независимым от начального положения. Он нашел, что этим свойством обладает циклоида (с горизонтальным основанием и с вогнутостью, обращенной вверх).

Вывод Гюйгенса можно получить из рассмотрения уравнения движения, которое мы легко найдем, вспоминая одно свойство циклоиды, уже рассмотренное нами в первом томе.

Пусть $B'B$ (фиг. 7) есть основание циклоиды, A — середина основания, a — радиус образующего круга, M — самая нижняя точка циклоиды, находящаяся на вертикали, проходящей через точку A, на расстоянии $2a$ от A. Начало координат возьмем в точке M и ось My направим по вертикали вверх; тогда ось Mx будет горизонтальной и касательной к циклоиде. Если условимся отсчитывать дуги s от самой низкой точки, считая их положительными в одном направлении (например, в направлении к B) и отрицательными в противоположном, то между s и y для любой точки P будет существовать соотношение (т. I, гл. V, п. 43)

$$s^2 = 8ay,$$

которое как раз и позволяет обнаружить интересующее нас свойство. Действительно, отсюда следует

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{4a};$$

так как $\frac{dy}{ds}$ есть косинус угла, который образует вертикаль, направленная вверх (т. е. ось My), с касательной в точке P (направленной в сторону возрастания s), то для тангенциальной составляющей F_t веса (материальной точки с массой, равной 1) в положении P мы находим выражение

$$F_t = -\frac{g}{4a} s;$$

поэтому уравнение движения принимает вид

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a} s. \tag{34}$$

Напомним еще раз, что это уравнение является характерным для того гармонического колебательного движения, частота которого определяется равенством

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Период такого движения, как мы знаем, не зависит от начальных условий и равен

$$\frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Полупериод $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ представляет собой продолжительность любого простого колебания, а половина его $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ выражает время, необходимое для того, чтобы маятник достиг наиболее низкой точки $M(s=0)$, исходя из некоторого крайнего положения (которое может быть любой точкой циклоиды).

Таким образом изохронизм циклоиды доказан как в отношении времени падения, так (если рассматривать движение в целом) и в отношении колебаний маятника в ту и другую сторону от M.

43. Для физического осуществления связи Гюйгенс придумал простой прибор, называемый *циклоидальным маятником.* Устройство его опирается на другое геометрическое свойство циклоиды:

Эволютой всякой циклоиды служит равная ей циклоида, основание которой смещено на $2a$ *(в сторону вогнутости) и сдвинуто по фазе на полупериод, т. е. точки заострения ее соответствуют вершинам* M, *а вершины совпадают с точками заострения* B', B, ... (см. фиг. 7).

Обозначим через O точку заострения интересующей нас ветви, расположенную над точкой M, и представим себе две дуги эволюты (OB' и OB), реализованные посредством выпуклых профилей.

Далее, если в точке O укрепить нить длиной $4a$, несущую на конце груз P, то этот груз при качании будет вынужден описывать циклоиду $B'MB$. Достаточно заметить, что когда маятник будет удаляться от вертикали, нить вынуждена будет огибать дугу эволюты OD, сходя с нее затем по касательной, так что сумма дуги $\overset{\frown}{OD}$ и отрезка касательной DP будет постоянной и равной $4a$. В силу характеристического свойства эволюты геометрическим местом точек P будет циклоида эвольвента.

Заметим, что этот вид маятника не представляет практического интереса, потому что трение, встречаемое нитью на выпуклом профиле циклоиды, имеет заметное влияние и его нельзя устранить, как это было бы необходимо, чтобы движение действительно совершалось по закону, вытекающему из уравнения (34).

44. Отметим еще без доказательства, что циклоида не только изохронна; она является еще и брахистохроной относительно силы тяжести.

Это значит, что если заданы две какие угодно точки A и B с различными высотами (пусть, например, B выше A), то из всех дуг различных кривых, соединяющих эти точки, дуга циклоиды обладает тем свойством, что тяжелая точка, выходящая из B без начальной скорости и вынужденная оставаться на кривой, проходит эту дугу в кратчайшее время. Эта циклоида имеет горизонтальное основание, точку заострения в B и проходит через A. В частном случае, если B и A расположены на одной и той же вертикали, дуга циклоиды вырождается в отрезок AB.

§ 8. Трение во время движения. Шероховатая наклонная плоскость

45. Обратимся теперь к вопросу о том, как ведет себя реакция связи в условиях движения.

В статике (гл. IX, т. I) мы видели, что когда материальная точка, опирающаяся на какую-нибудь поверхность или кривую, находится в равновесии, трение (касательная реакция, развиваемая опорой) по абсолютной величине не превосходит некоторой части f нормальной реакции. Направление, в котором действует эта касательная сила, зависит от активной силы; более точно, так как трение уравновешивает касательную составляющую активной силы, то мы можем сказать, что направление статического трения противоположно направлению проекции силы.

Если при шероховатой опоре происходит какое-либо движение под действием активной силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к движущейся точке, то опора также будет действовать на точку с некоторой силой $\boldsymbol{R}$ — реакцией опоры.

Чтобы определить, какому закону подчиняется действие этой реакции, необходимо обратиться к опыту. Интуиция прежде всего подсказывает, что, как и в статическом случае, опора способна действовать только во внешнюю сторону по отношению к реализующему ее телу.

Обозначим теперь через N абсолютную величину нормальной составляющей реакции опоры $\boldsymbol{R}$ и через $\boldsymbol{A}$ — ее касательную составляющую.

Эта последняя называется *трением* с присоединением определения *динамическое* или *во время движения*, если желательно отметить, что скорость движущейся точки отлична от нуля.

Опыты, производившиеся почти одновременно Кулоном и Мореном, привели последнего (около 1830 г.) к формулировке следующих законов:

1°. Направление динамического трения прямо противоположно направлению движения или, что все равно, скорости. Если случится, что скорость во время движения исчезнет, то остаются в силе законы статического трения. Следовательно, движение оканчивается или начинается снова, в зависимости от того, удовлетворяет или не удовлетворяет активная сила $\boldsymbol{F}$ условиям равновесия. Если опорой является поверхность, то можно также сказать, что движение оканчивается или начинается снова в зависимости от того, будет ли линия действия силы $\boldsymbol{F}$ проходить внутри или вне конуса трения, относящегося к положению равновесия.

То же выражение можно употребить, если опорой служит кривая (заменив лишь слово „*внутри*“ словом „*вне*“) (см. гл. IX, т. I).

2°. Величина динамической силы трения A прямо пропорциональна величине нормальной реакции N. Коэффициент пропорциональности есть правильная дробь, не зависящая ни от скорости движущейся точки, ни от размеров соприкасающихся поверхностей, и зависит только от их материальной природы.

Этот коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом трения* (*динамического* или *трения при движении*) и обозначается также буквой f, введенной уже для обозначения статического трения. Такое обозначение введено не без оснований, так как, по крайней мере в очень грубом приближении, оба коэффициента трения, статический и динамический, совпадают.

В этом порядке приближения поведение реакции $\boldsymbol{R}$ можно представить в следующей отчетливой форме.

Реакция, развиваемая шероховатой опорой (которая в статическом случае ограничивается лишь тем, что она не должна выходить из конуса трения) *в динамических условиях, будет находиться именно на конической поверхности* и на той образующей, которая проектируется (ортогонально) на касательную к траектории в направлении, обратном движению.

Из всего этого интуитивным путем можно сделать вывод, что трение во всяком случае (как в условиях равновесия, так и в условиях движения) можно рассматривать как пассивное сопротивление, способное достигать известного максимума (определенной дроби от N). Оно проявляется в том, что препятствует началу движения при значениях (не превышающих максимума), уравновешивающих активную силу, и достигает максимума (в направлении прямо противоположном движению), когда скорость отлична от нуля.

В действительности явление не вполне соответствует этой схеме. Коэффициент динамического трения всегда несколько (а иногда даже значительно) меньше коэффициента статического трения. Кроме того, он остается приблизительно постоянным до тех пор, пока речь идет о малых скоростях (не превышающих 4 или 5 *м/сек*) и не слишком больших давлениях, затем медленно уменьшается при возрастании скорости и при увеличении давления.

В частности, это подтверждается на примере железнодорожных тормозов (чугунные колодки против стальных ободов), где поэтому можно думать, что речь идет не о сухом соприкосновении: в этом случае играет роль воздух, действующий почти как смазка [1]). Здесь невозможно углублять этот важный вопрос, заметим только, что когда между поверхностями движущегося тела и опоры помещается смазка,

---

[1]) Новейшие опыты, производимые в лабораториях очень тонкими методами, позволяют установить непредвиденный факт, что большая отполированность соприкасающихся поверхностей глубоко изменяет законы трения. По этому вопросу, а также о случае, технически более важном, когда употребляется смазка, см.: A. Sommerfeld, Zur Theorie der Schmiermittelreibung, *Zeitschrift für technische Physik*, 1921, стр. 59—93. [(См. также „Гидродинамическая теория смазки", сборник статей из серии „Классики естествознания", 1934. (*Прим. ред.*)]

коэффициент трения существенным образом (и пока еще не вполне выясненным) зависит от скорости v, от нормального давления N и от коэффициента вязкости μ смазки; можно принять, что коэффициент трения зависит только от произведения $(\mu v N^{-1})$.

46. Принцип независимости действия связей от способа, каким они осуществляются, уже использованный в статике (т. I, гл. IX, п. 12), с успехом может быть введен и в динамику. Так, например, при трении во время движения предполагается, что всякий раз, когда материальная точка подходящими приспособлениями удерживается на определенной кривой или поверхности, она будет вести себя так, как если бы она опиралась на материальную поверхность.

Следствия из этого предположения находятся в достаточном согласии с наблюдаемыми фактами.

47. На основании предыдущих общих рассуждений мы можем тотчас же составить уравнение, согласно которому совершается движение точки по заданной траектории, если известна активная сила $\boldsymbol{F}$ и коэффициент трения f.

Для этого, очевидно, достаточно спроектировать на направление касательной $\boldsymbol{t}$ уравнение (1')

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}$$

и принять во внимание (п. 45), что $R_t=\pm A=\pm fN$, где знак выбирается в согласии с тем, что сила будет всегда сопротивлением; поэтому необходимо взять знак минус, когда (относительно направления $\boldsymbol{t}$) движение является прямым, т. е. когда $\dot{s}>0$, и знак плюс, когда $\dot{s}<0$.

Из этого замечания о двойном знаке следует:

$$\begin{aligned} &(а) \qquad m\ddot{s}=F_t-fN \quad \text{при } \dot{s}>0, \\ &(б) \qquad m\ddot{s}=F_t+fN \quad \text{при } \dot{s}<0. \end{aligned} \tag{35}$$

Остается выразить N (абсолютное значение нормальной реакции), для чего необходимо еще раз вернуться к основному уравнению (1'), спроектировав его на два другие главные направления (главную нормаль $\boldsymbol{n}$ и бинормаль $\boldsymbol{b}$). Что касается проекции на главную нормаль, то на основании формулы (3) имеем

$$R_n=m\frac{v^2}{r}-F_n;$$

так как для бинормали соответствующая составляющая ускорения $\boldsymbol{a}$ равна нулю, то

$$R_b=-F_b.$$

Если теперь заметим, что нормальная реакция в силу своего определения представляет собой проекцию полной реакции $\boldsymbol{R}$ на нормальную плоскость, т. е. вектор в этой плоскости с составляющими R_n и R_b, то, очевидно, получим

$$N=\sqrt{R_n^2+R_b^2}=\sqrt{\left\{m\frac{v^2}{r}-F_n\right\}^2+F_b^2},$$

где радикал берется по абсолютной величине.

Это и будет искомым выражением N, которое справедливо в самом общем случае. Как мы видим, оно зависит от нормальных составляющих *активной* силы F_n и F_b, от скорости v движущейся точки (или от $\dot{s}$) и от радиуса кривизны r траектории в любом положении (или же от s).

Наконец, если, как мы предполагаем, закон действия силы известен и F_n и F_b являются известными функциями от s, $\dot{s}$, t, то то же можно будет сказать и об N.

Мы ограничимся случаем, когда активная сила $\boldsymbol{F}$ *лежит в соприкасающейся плоскости.* Тогда $F_b=0$, и выражение для N упрощается

$$N=\left|m\frac{v^2}{r}-F_n\right|.$$

Таким образом для реакции трения имеем

$$R_t=\mp fN=\mp f\left|m\frac{v^2}{r}-F_n\right|,$$

где верхний или нижний знак берется всегда в зависимости от того, будет ли значение $\dot{s}$ положительным или отрицательным.

В форме, отличной от этой, но по существу эквивалентной, можно написать

$$R_t=\begin{cases} f\left(F_n-m\dfrac{v^2}{r}\right) & \text{всякий раз, когда } \left(m\dfrac{v^2}{r}-F_n\right)\dot{s}>0,\\ -f\left(F_n-m\dfrac{v^2}{r}\right) & \text{всякий раз, когда } \left(m\dfrac{v^2}{r}-F_n\right)\dot{s}<0.\end{cases}$$

Действительно, когда произведение $\left(m\frac{v^2}{r}-F_n\right)\dot{s}$ положительно, то множители $\dot{s}$ и $m\frac{v^2}{r}-F_n$ будут оба положительными или оба отрицательными. В первом случае $N=m\frac{v^2}{r}-F_n$, $R_t=-fN$, во втором $N=-\left(m\frac{v^2}{r}-F_n\right)$, $R_t=fN$, откуда получается в том или другом случае верхнее выражение для R_t. Аналогично проверяется и тот случай, когда произведение $\left(m\frac{v^2}{r}-F_n\right)\dot{s}$ отрицательно, тогда для R_t будем иметь нижнее выражение. Если бы указанное произведение было равно нулю, то из обоих выражений мы имели бы $R_t=0$, так как речь идет о динамическом трении, где существенно предположение, что $\dot{s}$ отлично от нуля; поэтому рассматриваемый случай может представиться только тогда, когда исчезает первый множитель $m\frac{v^2}{r}-F_n$.

Уравнение (35) равносильно уравнению

$$m\ddot{s}=F_t\pm f\left(F_n-m\frac{v^2}{r}\right), \tag{35'}$$

где знак выбирается согласно только что указанному критерию.

Если заметим, что F_t и F_n даже в более общих условиях должны рассматриваться как известные функции от s, $\dot{s}$ и t, а f (коэффициент трения) и r (радиус кривизны) являются также известными функциями положения движущейся точки, т. е. функциями s, и, с другой стороны, $v^2=\dot{s}^2$, то увидим, что уравнение (35′) действительно является дифференциальным уравнением второго порядка только с одной неизвестной функцией $s(t)$.

48. Если сила $\boldsymbol{F}$ позиционная, то F_t и F_n будут зависеть исключительно от s, и правая часть уравнения (35′) представится в виде

$$A(s)v^2+B(s),$$

где $A(s)$ и $B(s)$ означают соответственно $-f\frac{m}{r}$, F_t+fF_n или $f\frac{m}{r}$, F_t-fF_n, в зависимости от того, какой берется знак. Из выражения $\pm f\frac{m}{r}$ для $A(s)$ следует, что, если речь идет о шероховатой опоре (для которой надо предположить $f>0$), то эта функция может исчезать только в случае прямолинейной траектории (бесконечно большой радиус кривизны). В этом случае (который мы рассмотрим в следующем параграфе) правая часть равенства (35′) сведется к функции только от s; следовательно, в отношении интегрирования мы приходим здесь к случаю, подробно разобранному выше (§ 4).

Но и в общем случае, какова бы ни была функция $A(s)$, порядок уравнения (35′) можно понизить до первого и тем самым свести уравнение к типу, непосредственно интегрируемому в квадратурах.

Достаточно принять за неизвестную функцию v^2 вместо s, а за независимую переменную s вместо t. Действительно, имеем тождественно

$$\ddot{s}=\frac{d\dot{s}}{dt}=\frac{d\dot{s}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{d\dot{s}}{ds}\dot{s}=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds},$$

и уравнение (35′) принимает вид

$$\frac{1}{2}m\frac{dv^2}{ds}=A(s)v^2+B(s),$$

т. е. становится линейным дифференциальным уравнением по отношению к v^2, если рассматривать v^2 как функцию от s. Интегрирование его, требующее, вообще говоря, двух квадратур, приводит к выражению v^2 в функции от s. Таким образом, скорость движущейся точки будет функцией занимаемого ею положения. Чтобы полностью определить движение, надо выразить положение точки в зависимости от времени, указав соотношение между s и t. Эта зависимость получится в результате новой квадратуры, если заметим, что выражение скорости в функции от s равносильно формуле вида

$$\frac{ds}{dt} = \text{известной функции от } s.$$

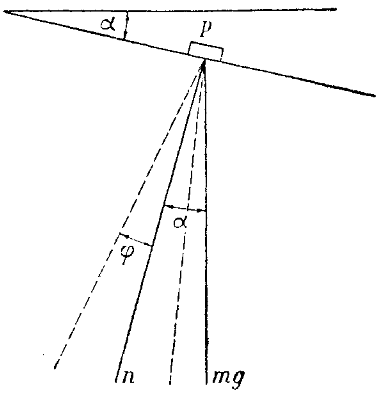
Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь t в функции от s, откуда, обратно, мы выразим также и s в функции от t. Следовательно, задача полностью разрешима в квадратурах.

49. Остается еще учесть влияние двойного знака в правой части уравнения (35′) или в правой части первоначального уравнения (35) (которое в этом исследовании удобнее, чем уравнение (35′)). Как уже отмечалось в п. 47, движение определяется уравнением (35) (а) в том промежутке времени, в котором оно остается прямым ($\dot{s} > 0$), и уравнением (35) (б) в промежутке времени, когда оно оказывается обратным ($\dot{s} < 0$). Поэтому, при непрерывности $\dot{s}$, случай, когда мы должны будем заменить для определения движения одно уравнение другим, может представиться только в момент t_1 остановки ($\dot{s} = 0$). На этот момент надо обратить особое внимание, так как он может означать конец движения. По законам динамического трения (п. 45) это может произойти только тогда, когда в момент остановки t_1 будет выполняться условие статического равновесия $|F_t| \leqslant fN$ (где f обозначает коэффициент статического трения). В противном случае тотчас же за моментом t_1 движение начнется снова. Более точно, в силу закона возникающего движения движущаяся точка направится в ту сторону, в которую в момент t_1 направлена касательная сила F_t, так что в новой фазе движение будет определяться равенством (35) (а) или равенством (35) (б), смотря по тому, будет ли в момент $t = t_1$ сила $F_t > 0$ или < 0. Таким образом, закон движения, начиная от положения $s = s_1$ (и с момента $t = t_1$), будет однозначно определен тем интегралом уравнения (35) (а) или соответственно (35) (б), которое характеризуется начальными условиями

$$s = s_1, \quad \dot{s} = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1.$$

Этот интеграл будет представлять движение неопределенно долго, если $\dot{s}$ сохраняет свой знак; в противном же случае — до первого следующего момента t_2, когда $\dot{s}$ снова обратится в нуль. В последнем случае необходимо проверить, как и в момент t_1, не окончилось ли движение, и, если этого нет, определить, принимая во внимание, в какую сторону действует касательная сила, какое из двух уравнений вступает в силу, и т. д.

50. Шероховатая наклонная плоскость. Изложенную выше теорию можно непосредственно приложить к движению тяжелого тела по шероховатой наклонной плоскости в предположении, что начальная скорость равна нулю или направлена по прямой наибольшего наклона. Вследствие очевидной симметрии движение будет происходить вдоль этой прямой наибольшего наклона.



Фиг. 8.

Обозначим через α угол наклона плоскости и через φ угол трения (статического) (фиг. 8). Можно утверждать, что если в какой-нибудь момент скорость равна нулю, то тяжелое тело или останется неподвижным, или начнет опускаться, смотря по тому, будет ли $\alpha \leqslant \varphi$ или $> \varphi$. Далее, если s будем отсчитывать по направлению вниз (исходя, например, от начального положения), то

$$F_t = mg\sin\alpha, \quad N = mg\cos\alpha.$$

Если предположим для определенности, что коэффициент динамического трения остается постоянным и совпадает с коэффициентом статического трения, то будем иметь $f = \operatorname{tg}\varphi$, и сила $F_t \mp fN$ в обоих случаях будет постоянной.

Полагая для краткости

$$g_1 = \frac{g}{\cos\varphi}\sin(\alpha - \varphi), \quad g_2 = \frac{g}{\cos\varphi}\sin(\alpha + \varphi),$$

на основании равенств (35) (а) и (35) (б) соответственно будем иметь

$$\ddot{s} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha = g_1,$$
$$\ddot{s} = g\sin\alpha + fg\cos\alpha = g_2;$$

первое из этих уравнений остается в силе, когда тело опускается ($\dot{s} > 0$), второе — когда оно поднимается. Постоянная g_2 всегда положительна, поэтому из тождества

$$\frac{dv^2}{dt} = 2\ddot{s}\dot{s}$$

вытекает, что в течение восходящего движения ($\ddot{s} = g_2$, $\dot{s} < 0$) абсолютная величина скорости, как это и следовало ожидать, будет постоянно уменьшаться; при постоянном ускорении g_2 движение будет равнозамедленным.

Аналогично убедимся, что нисходящее движение, уравнение которого имеет вид $\ddot{s}=g_1$, будет равнозамедленным или равноускоренным (включая и предельный случай, когда ускорение равно нулю) в зависимости от того, будет ли g_1 отрицательным или нет, т. е. в зависимости от того, будет ли φ больше или меньше α. Это зависит исключительно от физической природы опоры.

51. Остановимся, например, на случае, когда угол наклона больше угла трения ($\alpha > \varphi$) (фиг. 8). Представим себе, что телу был дан начальный толчок, направленный вверх, со скоростью v_0 (по абсолютной величине).

При $t=0$ будем иметь $s=0$, $\dot{s}=-v_0$; движение вначале будет восходящим и поэтому представится тем интегралом уравнения $\ddot{s}=g_2$, который соответствует начальным значениям $s=0$ и $\dot{s}=-v_0$. Очевидно, будем иметь

$$s=\frac{1}{2}g_2t^2-v_0t.$$

Уравнение $\dot{s}(t)=0$, т. е.

$$g_2t-v_0=0,$$

допускает один (и только один) положительный корень

$$t_1=\frac{v_0}{g_2}.$$

От момента $t=0$ до $t=t_1$ движение будет восходящим, и пройденный путь будет измеряться (по абсолютной величине) значением

$$-s=t\left(v_0-\frac{1}{2}g_2t\right).$$

При $t=t_1$, в частности, имеем $-s_1=\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g_2}$. Хотя скорость будет равна нулю, движение, однако, не прекратится (в предположении, что $\alpha > \varphi$). Начнется, следовательно, нисходящая фаза движения, определяемая уравнением $\ddot{s}=g_1$ (где $g_1 > 0$) и начальными условиями $s=s_1$, $\dot{s}=0$ при $t=t_1$. Соответствующий интеграл будет выражен равенством:

$$s=\frac{1}{2}g_1(t-t_1)^2+s_1.$$

Уравнение $\dot{s}(t)=0$ не имеет корня, большего, чем t_1 (или, иначе, скорость не исчезает при $t > t_1$), потому что движение будет равноускоренным, начинаясь из состояния покоя в момент t_1. Поэтому предыдущее выражение для s остается в силе для всякого значения $t > t_1$.

Совершенно аналогично разбираются и случаи $\alpha > \varphi$, $\dot{s}_0 > 0$, или $\alpha \leqslant \varphi$ с вариантами $\dot{s}_0 < 0$ и $\dot{s}_0 > 0$.

§ 9. Вертикальное движение тяжелого тела с учетом сопротивления воздуха

52. В виде приложения теории, изложенной в § 4, рассмотрим простой случай свободного падения тяжелого тела, принимая во внимание сопротивление воздуха.

Предположим, что падение происходит по вертикали и сопротивление воздуха может быть представлено силой, пропорциональной квадрату скорости.

Условимся отсчитывать расстояния s от начального положения вниз; тогда будем иметь $\dot{s} = v$, $\ddot{s} = \frac{dv}{dt}$,

$$F_t = mg - KA\alpha v^2.$$

Если для краткости введем положительную постоянную V, определяемую равенством

$$V^2 = \frac{mg}{KA\alpha}, \tag{36}$$

то уравнение движения примет вид

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right). \tag{37}$$

Это уравнение показывает, что если скорость v меньше V, то ускорение $\frac{dv}{dt}$ положительно и, следовательно, движение будет ускоренным; если, наоборот, скорость v больше V, движение будет замедленным.

Отметим, что одно из частных решений определяется равенством $v = V$, т. е. мы имеем равномерное движение с критической скоростью V. Чтобы составить себе представление о порядке величины V, положим в равенстве (36) $\alpha = 1$ и $K = 0{,}08$ (п. 22), в силу этого $1/\sqrt{K}$ будет немного меньше 3.

Тогда V приблизительно будет равно утроенному значению корня

$$\sqrt{\frac{\text{вес (выраженный в } \textit{кг}\text{)}}{\text{площадь наибольшего сечения, перпендикулярного к скорости (выраженная в } m^2\text{)}}}$$

При весе в 100 *кг* парашюта с радиусом в 5 или 6 *м* (т. е. с площадью наибольшего сечения около 100 $м^2$) можно предполагать для V значение около 3 *м/сек*; такая скорость сама по себе не опасна.

Как увидим немного ниже, V представляет собой асимптотическое значение скорости падения.

53. Формальное интегрирование уравнения (37) непосредственно выполняется путем разделения переменных. Прежде чем выполнять это интегрирование, отметим, что если в какой-нибудь момент скорость тела меньше критической скорости V, то она, постоянно возрастая, никогда не будет превосходить V и будет асимптотически стремиться к V при $t \to \infty$. Равным образом, если в какой-нибудь момент скорость превосходит V, то она будет постоянно оставаться больше V и, убывая, будет асимптотически стремиться к V при бесконечном возрастании t.

В обоих случаях доказательства совершенно аналогичны. Рассмотрим, например, первый случай и покажем, что, допустив противное, мы придем к противоречию.

Допустим, следовательно, что скорость может превзойти V. Так как речь идет о непрерывной функции, то она должна, по крайней мере один раз, принять значение V. Пусть t_1 будет момент времени, когда это произойдет в первый раз; пусть, далее, t' и $t'' > t'$ будут два какие-нибудь момента времени, предшествующие t_1, v' и v'' (причем $v'' > v'$, в силу того, что скорость возрастает вместе с t) — соответствующие значения v.

Разделяя переменные в уравнении (37) и интегрируя от t' до t'' (при этом заметим, что при возрастании t от t' до t'' v изменяется, все время возрастая, от v' до v''), получим

$$\int_{v'}^{v''} \frac{dv}{1-\frac{v^2}{V^2}} = g(t''-t').$$

Противоречие, о котором было сказано выше, можно увидеть из этой формулы, если заставить t'' приближаться к t_1'. Действительно, в то время как правая часть стремится к конечному пределу $g(t_1-t')$, левая часть (v'' стремится к V, когда t'' стремится к t_1) имеет пределом бесконечность, так как функция под знаком интеграла при $v=V$ имеет бесконечность первого порядка.

54. Перейдем теперь к интегрированию уравнения (37) в предположении, что движущееся тело предоставлено самому себе без начальной скорости, или в более общем случае, что оно брошено вниз со скоростью $v_0 < V$. Как мы уже видели, v все время меньше V, поэтому, если написать уравнение (37) с разделенными переменными в виде

$$\frac{2g\,dt}{V} = \frac{2}{V}\frac{dv}{1-\frac{v^2}{V^2}} = \left\{\frac{1}{1+\frac{v}{V}} + \frac{1}{1-\frac{v}{V}}\right\}\frac{dv}{V},$$

то в правой части знаменатели всегда будут положительными. Отсюда, интегрируя, получим

$$\frac{2g}{V}t = \ln\frac{1+\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}} + \mathrm{const},$$

где постоянную интегрирования можно обозначить через $\frac{2g}{V}t^*$ мы определим ее исходя из условия, что $v = v_0$ при $t = 0$, что, в частности, дает $t^* = 0$, когда начальная скорость $v_0 = 0$[1]).

Если перейдем от логарифмов к числам, разрешим уравнение относительно v и положим для краткости $\tau = g\frac{t-t^*}{V}$, то найдем

$$\frac{v}{V} = \frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}} \tag{38}$$

или

$$v = V - \frac{2V}{e^{2\tau}+1}.$$

Последнее соотношение, в котором v явно выражено через τ, а потому и через t подтверждает тот факт, что скорость всегда меньше V и стремится к V при безграничном возрастании t.

55. Пройденное пространство s можно вычислить посредством новой квадратуры. Действительно, так как $ds = v dt$, то на основании соотношения между t и τ можно написать

$$ds = \frac{V}{g} v d\tau$$

и, следовательно, в силу уравнения (38)

$$ds = \frac{V^2}{g}\frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}}d\tau = \frac{V^2}{g}d\ln(e^{\tau}+e^{-\tau}).$$

Отсюда, интегрируя и принимая $s = 0$ при $t = 0$, т. е. при $\tau = -\frac{gt^*}{V} = \tau_0$, получим искомое выражение для s

$$s = \frac{V^2}{g}\ln\frac{e^{\tau}+e^{-\tau}}{e^{\tau_0}+e^{-\tau_0}}. \tag{39}$$

[1]) Так как в течение всего движения предполагается, что сопротивление пропорционально квадрату скорости, то необходимо предварительно проверить, что предельные скорости v_0 и V не превосходят значений, при которых этот закон справедлив. При строгом доказательстве случай начальной скорости, равной нулю, следовало бы исключить (п. 29), потому что при очень малых скоростях этот закон не имеет места. Поэтому приложение формулы к этому случаю можно оправдать только тем, что скорость возрастает достаточно быстро, и, следовательно, можно пренебречь возмущающим влиянием первого периода, когда закон квадратичного сопротивления еще не имеет места.

К тому же результату, но в другой форме можно прийти, если взять уравнение (37) и рассматривать (как в п. 48) $v=\frac{ds}{dt}$ как сложную функцию от t через посредство s. В силу этого будем иметь

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}v=\frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds}$$

и уравнению (37) можно придать вид

$$\frac{2g}{V^2}ds=\frac{1}{V^2}\frac{d(v^2)}{1-\frac{v^2}{V^2}}.$$

Интегрируя и замечая, что при $v=v_0$ должно быть $s=0$, придем к равенству

$$s=\frac{V^2}{2g}\ln\frac{V^2-v_0^2}{V^2-v^2}, \tag{39'}$$

которое вместе с равенством (38) даст выражение s через τ. Эквивалентность выражений (39') и (39) можно установить, принимая во внимание равенство (38) и его выражение в начальный момент

$$\frac{v_0}{V}=\frac{e^{\tau_0}-e^{-\tau_0}}{e^{\tau_0}+e^{-\tau_0}}.$$

56. Равенством (39') можно воспользоваться для установления соотношения между высотой падения и энергией, потерянной вследствие сопротивления воздуха. В любой момент полная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергий) равна

$$m\left(\frac{v^2}{2}-gs\right).$$

Вычитая эту величину из ее начального значения $\frac{mv_0^2}{2}$, получим меру потерянной энергии (которая преобразуется главным образом в тепловую)

$$q=\frac{m}{2}(v_0^2-v^2+2gs).$$

Теперь равенство (39') можно написать в виде

$$-\frac{2gs}{V^2}=\ln\left\{1+\frac{v_0^2-v^2}{V^2-v_0^2}\right\}.$$

Если перейдем теперь от логарифмов к числам, разрешим уравнение относительно $v_0^2-v^2$ и подставим результат в предыдущее равенство, то получим

$$q=\frac{m}{2}\{(V^2-v_0^2)(e^{-\lambda}-1)+2gs\},$$

где для краткости положено

$$\lambda = \frac{2gs}{V^2}.$$

Предположим, в частности, что $v_0 = 0$ и высота падения мала; точнее, рассмотрим такие значения s, при которых величина $\sqrt{2gs}$, т. е. скорость, которую приобрело бы в пустоте тяжелое тело при высоте падения s, мала по сравнению с предельной скоростью V. Можно пренебречь тогда степенями отношения $\lambda = 2gs/V^2$ выше второй и положить

$$e^{-\lambda} = 1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2}.$$

(Вместо $e^{-\lambda}$ мы берем здесь разложение этой функции в ряд Маклорена, ограничиваясь первыми тремя членами, так как четвертый и следующие члены имеют степени λ выше второй и потому отбрасываются.) В таком случае получим

$$q = \frac{m}{4} V^2\lambda^2 = \frac{1}{2}\lambda mgs,$$

откуда видно, что энергия, потерянная на пути s, есть часть работы, совершенной силой тяжести, или, если угодно, часть живой силы, которую имело бы падающее тело, падая по тому же пути в пустоте. $\left(\frac{\lambda}{2} = \frac{gs}{V^2}\right.$ при нашем предположении — величина малая.$\left.\right)$

57. Следует добавить, что при вертикальном движении вверх имеем $F_t = mg + KA\alpha v^2$ (вертикальная сила, направленная вниз) и $\dot{s} = -v$. Принимая во внимание равенство (36), можно уравнение движения представить в виде

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(1 + \frac{v^2}{V^2}\right). \tag{37'}$$

Если вначале движущееся тело имеет скорость, направленную вверх, то надо воспользоваться уравнением (37'). Оно будет справедливым до тех пор, пока скорость тела не станет равной нулю (при этом сила тяжести и сопротивление воздуха вместе противодействуют движению). Это произойдет даже скорее, чем в пустоте (как это непосредственно ясно и как к тому же это следует из уравнения (37')). До этого момента между t и v имеем соотношение

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{V} = -\frac{g}{V}t + \text{const},$$

которое получается непосредственно из уравнения (37'), если мы разделим в нем переменные и проинтегрируем его. Постоянная определяется на основании значения начальной скорости. Обозначив ее через $\frac{g\tau}{V}$ и, придав предыдущему уравнению вид

$$v = V \operatorname{tg} \frac{g}{V}(\tau - t), \tag{38'}$$

мы убедимся, что v убывает, начиная с момента $t = 0$, и к концу промежутка времени τ принимает значение, равное нулю.

При дальнейшем интегрировании уравнения (38′) можно получить выражение для пути при движении вверх для промежутка времени $(0, \tau)$. Начиная с этого момента, будет происходить свободное падение, определяемое уравнением (37).

§ 10. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс

58. В виде приложения теории, развитой в § 4 и 5, рассмотрим движение по заданной траектории материальной точки P с массой m, находящейся под действием восстанавливающей силы $-\lambda s$ и пассивного сопротивления вязкого трения $-b\dot{s}$ [1]).

Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\ddot{s} = -b\dot{s} - \lambda s,$$

где b и λ обозначают две положительные постоянные; достаточно положить

$$\frac{b}{m} = 2h, \quad \frac{\lambda}{m} = k,$$

чтобы привести его к виду

$$\ddot{s} + 2h\dot{s} + ks = 0. \tag{40}$$

Таким образом мы снова нашли дифференциальное уравнение (линейное, с постоянными коэффициентами), исчерпывающим образом разобранное в отношении определяемых им движений в кинематике (т. I, гл. II, п. 41—43). Вспоминая установленные там результаты, мы можем прямо утверждать, что точка P при указанных выше условиях совершает или затухающие колебания около точки O, или же апериодическое движение (самое большее с одним обращением направления и с асимптотической точкой на конечном расстоянии или в бесконечности).

Наиболее интересным случаем, которым мы здесь и ограничимся, является случай затухающих колебаний; он, как мы знаем, характеризуется условием $k > h^2$. Если положим тогда $k = h^2 + \omega^2$, то уравнение (40) примет известную уже форму

$$s + 2h\dot{s} + (h^2 + \omega^2)s = 0; \tag{40'}$$

[1]) Глубокое исследование для случая, когда сопротивление выражается квадратичным законом, можно найти в мемуаре Синьорини (Signorini, *Atti del R. Ist. Ven*, т. 73, 1914, стр. 803—858).

здесь ω определяет постоянную частоты колебаний и h — постоянную затухания; тогда закон движения (общий интеграл уравнения (40′)) принимает вид

$$s = re^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0),$$

где r и θ_0 суть две произвольные постоянные.

Первым примером движений этого типа, реализуемым физически, является пример колебаний простого маятника в вязкой среде (п. 41). Не менее наглядным и интересным является случай *свободных колебаний* камертона, когда камертон, после возбуждения в нем колебаний, предоставлен самому себе в спокойном воздухе.

В этом случае конец одной из ножек можно рассматривать как материальную точку, которая колеблется, описывая линию, очень мало отличающуюся от прямой. Его связь с ножкой определяет восстанавливающую силу и пассивные сопротивления (трение, несовершенную упругость и т. п.), к которым присоединяется пассивное сопротивление воздуха. Эти пассивные сопротивления в первом приближении можно свести к простому вязкому сопротивлению, так что приблизительно будут осуществлены условия действия силы, предположенные в самом начале. Тогда, если обозначим через s дугу, описываемую концом ножки и отсчитываемую от положения равновесия (положительную в одном направлении и отрицательную в другом), то движение определится как раз уравнением типа (40). Так как, далее, результирующее (касательное) пассивное сопротивление крайне мало по сравнению с упругой силой, то с большим избытком выполнится условие $k > h^2$, обеспечивающее для движения характер затухающего колебания.

То обстоятельство, что в предположенных условиях период $T = 2\pi/\omega$ не зависит от начальных условий (способа возбуждения), а зависит только от h и k, т. е. только от внутренних свойств камертона, оправдывает его назначение как инструмента, служащего для получения звука определенной высоты.

59. Вынужденные колебания. Обыкновенно так называют те колебания, которые возбуждаются заданной периодической силой, действующей вместе с силами уже рассмотренного типа (восстанавливающая сила и вязкое сопротивление).

Обозначая через Q касательную составляющую этой силы в направлении возрастания s, деленную на m, т. е. отнесенную к единице массы движущейся точки, и через $E(s)$ — дифференциальное выражение в левой части равенства (40), получим уравнение движения в виде

$$E(s) = Q. \tag{41}$$

Периодическая сила Q в любой момент предполагается численно определенной и, следовательно, рассматривается как функция только одного t с некоторым заданным периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$.

60. При интегрировании уравнения (41) (линейное неоднородное уравнение) все сводится, как известно, к определению частного интеграла $J(t)$, так как из него далее сразу же выводится общий интеграл, если положить

$$s = J + \sigma, \tag{42}$$

где σ обозначает общий интеграл уравнения без правой части $E(s) = 0$, т. е. (п. 58)

$$\sigma = re^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0), \quad \omega = \sqrt{k - h^2}$$

с двумя произвольными постоянными интеграции r и θ_0.

Что сумма $J + \sigma$ действительно представляет собой общий интеграл уравнения (41) — очевидно. Прежде всего, складывая оба уравнения, которым по определению удовлетворяют J и σ,

$$E(J) = Q, \quad E(\sigma) = 0,$$

получим

$$E(J) + E(\sigma) = E(J + \sigma) = Q,$$

и, следовательно, $J + \sigma$ удовлетворяет уравнению (41). Кроме того, эта сумма содержит (как и σ) две независимые произвольные постоянные.

Из выражения общего интеграла (42), приняв во внимание то обстоятельство, что σ стремится к нулю при бесконечном возрастании t (или практически становится равным нулю через сравнительно небольшой промежуток времени), мы получим важнейший критерий для конкретных приложений. Именно, *чтобы характеризовать режим вынужденных колебаний* (режим, который устанавливается тем быстрее, чем больше затухание h), достаточно *рассмотреть частный интеграл J*.

61. Постоянная добавочная сила. Рассмотрим прежде всего простейший случай постоянной добавочной силы (которая является пределом периодически изменяющейся силы, когда стремится к нулю период, в конце которого восстанавливаются те же условия). Частный интеграл J уравнения $E(s) = Q$ при постоянном Q определяется, естественно, значением, тоже постоянным, $s = Q/k$, соответствующим состоянию *вынужденного равновесия*; положение вынужденного равновесия несколько смещено от положения естественного равновесия ($s = 0$).

Добавочное возбуждение является статическим, статическим же будет и соответствующее ему состояние. Что же касается общего интеграла $s = J + \sigma$, то он представляет собой (как это легко видеть, принимая положение $s = J$ за начало дуг) затухающие колебания, тождественные с теми, которые имели бы место при отсутствии Q, за исключением лишь того, что центр колебания оказывается смещенным и находится в новом положении равновесия.

62. Синусоидальная возмущающая сила. Явное выражение J легко может быть получено еще в одном особенно важном случае, когда периодическая функция Q является синусоидальной, т. е. выражается функцией вида

$$q \sin(\omega_1 t + \alpha),$$

где q, α (и ω_1) суть какие-нибудь заданные постоянные. Заметим, что если мы хотим иметь косинус вместо синуса, то можно заменить α на $\alpha + \pi/2$; с другой стороны, смещая начало отсчета времени, всегда можно сделать $\alpha = 0$, $q > 0$.

Положим

$$Q = q \sin \omega_1 t, \qquad (q > 0)$$

и покажем, что дифференциальное уравнение (41) допускает частный интеграл вида

$$J(t) = p \sin(\omega_1 t - \varphi), \tag{43}$$

где постоянные p и φ, разумеется, должны быть выбраны надлежащим образом.

и С этой целью будем исходить из тождества

$$E(J) = \ddot{J} + 2h\dot{J} + kJ = p\,\{2h\omega_1 \cos(\omega_1 t - \varphi) + \\ + [k - \omega_1^2] \sin(\omega_1 t - \varphi)\}$$

и заметим, что для того, чтобы сделать $E(J)$ тождественным с

$$Q = q \sin \omega_1 t = q \sin[\varphi + (\omega_1 t - \varphi)] = \\ = q\,\{\sin\varphi \cos(\omega_1 t - \varphi) + \cos\varphi \sin(\omega_1 t - \varphi)\},$$

достаточно в обоих выражениях приравнять коэффициенты при

$$\cos(\omega_1 t - \varphi) \quad \text{и} \quad \sin(\omega_1 t - \varphi).$$

Таким образом получим систему

$$2hp\omega_1 = q \sin\varphi,$$
$$p\,(k - \omega_1^2) = q \cos\varphi,$$

однозначно определяющую обе постоянные p и φ, если примем $p > 0$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Действительно, возводя в квадрат последние два равенства, складывая их и извлекая квадратный корень, получим

$$p = \frac{q}{\sqrt{(k - \omega_1^2)^2 + 4h^2\omega_1^2}}, \tag{44}$$

где согласно принятому условию радикал надо понимать в арифметическом смысле. С другой стороны, если эти равенства разделим одно на другое, то получим соотношение

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2h\omega_1}{k - \omega_1^2}, \tag{45}$$

которым в согласии с условием $0 \leqslant \varphi < \pi$ и определяется угол φ.

Частное решение (43), определенное таким образом, является, очевидно, периодическим с периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$ возмущающей силы $Q = q \sin \omega_1 t$; в нем p есть амплитуда вынужденных колебаний, а φ можно истолковать как *разность фаз* или *запаздывание фазы* между силой и перемещением. Из равенства (45) следует, что $\operatorname{tg}\varphi$ будет положительным или отрицательным и, следовательно, φ меньше или больше $\pi/2$ (т. е. четверти периода[1]) в зависимости от того, будет ли ω_1^2 меньше или больше k.

63. Случай слабого затухания. Если предположим, что постоянная затухания h очень мала (как это, в частности, имеет место для камертона) и если, следовательно, величиной h^2 можно пренебречь по сравнению с k, то можно отождествить k с $k - h^2 = \omega^2$ (квадрат постоянной частоты свободных колебаний). Тогда установленному выше критерию различения $\omega_1^2 \lessgtr k$ можно придать вид $\omega_1^2 \lessgtr \omega^2$ или

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^2 \lessgtr \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2.$$

Отсюда приходим к заключению, что при очень слабом затухании запаздывание фазы будет меньше четверти периода ($\varphi < \pi/2$) всякий раз, когда частота (величина, обратная периоду) внешней (возмущающей) силы будет меньше частоты свободных колебаний; в противном случае запаздывание фазы будет больше четверти периода.

Полезно, кроме того, заметить, что при вычислении амплитуды p нельзя пренебречь в знаменателе (44) слагаемым $4h^2\omega_1^2$ по сравнению с $(k - \omega_1^2)^2$, если известно только, что h^2 мало по сравнению с k. Этого, конечно, нельзя делать, если ω_1^2 и k (или ω^2) близки по величине. В этом случае надо придерживаться точной формулы (44). Но если при очень малом h частота ω_1 возмущающей силы не очень близка к частоте ω свободных колебаний системы, то вместо формулы (44) можно будет воспользоваться приближенной формулой

$$p = \frac{q}{k - \omega_1^2} \tag{44'}$$

или, если угодно,

$$p = \frac{q}{\omega^2 - \omega_1^2}.$$

Далее, если, помимо допущенных до сих пор предположений, имеет место также и то обстоятельство, что величина ω_1 очень мала, так что ею можно пренебречь по сравнению с ω (или, что одно и то же, по сравнению с k), то из равенства (45) следует, что

---

[1] Поскольку по отношению к фазе $(\omega_1 t - \varphi)$ интеграла J, определяемого уравнением (43), $\pi/2$ представляет как раз четверть от периода 2π.

приближенно $\varphi=0$. В этом случае можно сказать, что следствие (перемещение) находится в одной фазе с причиной (сила). Амплитуду p можно положить на основании формулы (44′) приближенно равной q/k, т. е. *статическому смещению*, которое было бы вызвано постоянной силой, по величине равной максимальному значению q периодической возмущающей силы.

64. Идеальный случай, когда сопротивление равно нулю. Обратимся прямо к идеальному предположению об абсолютном отсутствии всякого пассивного сопротивления ($h=0$, $k=\omega^2$), и для соответствующего уравнения

$$\ddot{s}+\omega^2 s=q\sin\omega_1 t \tag{41'}$$

будем искать периодическое решение в форме (43). При фактической подстановке придем к системе

$$\begin{aligned} 0&=q\sin\varphi,\\ p(\omega^2-\omega_1^2)&=q\cos\varphi, \end{aligned} \tag{46}$$

которая (если также и здесь принимается ограничение $0\leqslant\varphi<\pi$) дает

$$\varphi=0,$$

и при условии

$$\omega\lessgtr\omega_1$$

$$p=\frac{q}{\omega^2-\omega_1^2}.$$

Таким образом, в качестве точного выражения амплитуды вынужденных колебаний мы получили то, что в предыдущем пункте было получено как приближенная величина при очень малом значении h и при значении ω, заметно отличающемся от ω_1.

Если, далее, $\omega_1=\omega$, т. е. если период $2\pi/\omega_1$ возмущающей силы равен периоду свободных колебаний системы, то, так как требуется, чтобы возмущающая периодическая сила не была постоянно равна нулю (т. е. чтобы не было $q=0$), система (46) становится противоречивой, т. е. в этом случае для уравнения (41′) не существует интеграла чисто синусоидального типа. Непосредственная подстановка показывает, что при $\omega_1=\omega$ уравнение (41′) допускает частный интеграл

$$J(t)=\frac{q}{2\omega^2}t\sin\omega t,$$

который соответствует колебаниям, имеющим период $2\pi/\omega$, общий для свободных колебаний и возмущающей силы, но обладает тем свойством, что амплитуда колебаний возрастает до бесконечности вместе с временем.

65. Резонанс. Обращаясь к общей теории, мы будем предполагать, что постоянные h и k (а следовательно, ω и T), характеризующие колеблющуюся систему, остаются неизменными, равно как и максимальная величина q возмущающей силы; изменяя частоту ω_1 возмущающей силы (или же ее период $T_1 = 2\pi/\omega_1$), мы увидим, что вместе с этим будет изменяться амплитуда p соответствующих вынужденных колебаний. Мы покажем, что p всегда допускает единственный максимум. Если постоянная затухания h, свойственная колеблющейся системе, мала, то максимум этот будет достигнут при значении ω_1, близком (почти равном) к частоте ω свободных колебаний.

Отсюда вытекает объяснение явления *резонанса* (для колеблющихся систем с очень малой постоянной затухания), которое, как известно, заключается в следующем. Пусть внешняя периодическая возмущающая сила с заданной максимальной величиной q при каком-либо значении частоты ω_1 вызывает едва ощутимый эффект (очень малая амплитуда); если величина ω_1 очень близка к собственной частоте ω колеблющейся системы, то эффект (характеризуемый величиной амплитуды p) усиливается и может сделаться значительным.

Типичным примером этого является камертон (постоянная затухания h которого, как мы уже знаем, очень мала).

Предположим, что в окружающем воздухе происходят звуковые колебания, возбуждаемые каким-нибудь другим внешним телом (например, камертоном или органной трубой и т. п.). В этих условиях рассматриваемый камертон подвергается некоторому (очень слабому) периодическому и приближенно синусоидальному воздействию (см. последнее замечание п. 66), которое накладывается на действие внутренних упругих сил.

Мы имеем здесь, таким образом, случай вынужденных колебаний. Обычно они слабы и даже незаметны. Однако, когда внешний звук имеет высоту, равную (или очень близкую) к высоте, характерной для этого камертона, то получается значительное усиление, и колебания камертона оказываются довольно заметными.

Чтобы исследовать изменение p в зависимости от изменения ω_1, возьмем снова равенство (44) и положим

$$\frac{\omega_1^2}{k} = x, \qquad \frac{4h^2}{k} = \varepsilon^2,$$

благодаря чему переменная x, заменяющая частоту ω_1, получается существенно положительной, а при предполагаемой малости h величина ε будет правильной и даже очень малой дробью. В силу этого уравнение (44) можно написать в виде

$$p = \frac{q}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + \varepsilon^2 x}}. \qquad (44'')$$

Функция $(1-x)^2+\varepsilon^2 x$ имеет первую производную, равную $-2(1-x)+\varepsilon^2$, и вторую производную, равную постоянной 2, так что она допускает минимум (и притом только один) при $x=1-\varepsilon^2/2$. Отсюда следует, что p при изменении ω_1 имеет максимум (и только один), который соответствует частоте ω_1, определяемой равенством

$$\omega_1^2=k\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)=k-2h^2=\omega^2-h^2. \tag{47}$$

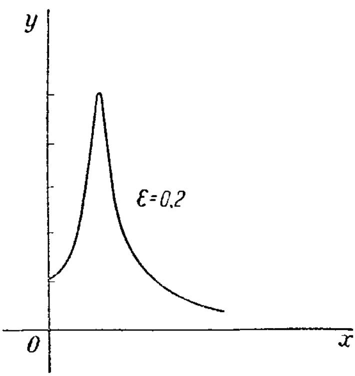
Этот максимум, как легко проверить, полагая в формуле (44)

$$k-\omega_1^2=2h^2, \quad \omega_1^2=\omega^2-h^2,$$

равен

$$\frac{q}{2h\omega}=\frac{\omega}{2h}\cdot\frac{q}{\omega^2}. \tag{48}$$

Из равенств (47) и (48) непосредственно следует, что при очень малых по сравнению с ω значениях h максимум p получится в том случае, когда частота ω_1 близка к ω; этот максимум будет иметь очень большую величину по сравнению с величиной q/ω^2 или, что то же самое, по сравнению с величиной q/k, которая на основании формулы (44″) представляет собой значение p при $x=0$, или же при $\omega_1=0$.



Фиг. 9.

Чтобы получить более отчетливое представление о характере максимума при указанных выше условиях, достаточно обратить внимание на то, что если бы можно было вполне пренебречь величиной h по сравнению с ω и, следовательно, тем более величиной h^2 по сравнению с k, т. е. величиной ε^2 по сравнению с единицей, то максимум величины

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+\varepsilon^2 x}}$$

был бы просто равен бесконечности (при $x=1$). Но и при небольших значениях ε (например, не превышающих $^1/_5$) мы будем иметь при $x=1-\varepsilon^2/2$ резко выраженный максимум. Кривая (см. фиг. 9)

$$y=\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+\varepsilon^2 x}}$$

очень быстро падает с той и другой стороны от вершины.

66. Случай произвольной периодической возмущающей силы. Мы подробно рассмотрели свойства интеграла J в частном предположении, что периодическая сила Q является синусоидальной, т. е. приводится к виду $q \sin \omega_1 t$.

Важное значение, которое мы придаем этому специальному виду возмущающей силы, вполне оправдывается следующими соображениями.

Прежде всего, если в уравнении (41)

$$E(s) = Q(t)$$

функция $Q(t)$ является суммой двух или нескольких других функций Q_1, Q_2, ..., для каждой из которых мы умеем определить частные интегралы J_1, J_2... уравнений $E(s) = Q_1$, $E(s) = Q_2, \ldots$, то, очевидно, достаточно положить

$$J = J_1 + J_2 + \ldots,$$

чтобы иметь интеграл уравнения (41).

Таким образом, если Q есть сумма членов вида

$$q \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

при постоянных q, ω_1, α, выбираемых как угодно для каждого члена, то тотчас же можно будет определить частный интеграл J уравнения (41) в виде суммы стольких же членов типа (43) (плюс возможная постоянная, если среди значений ω_1 имеется и нуль (п. 61)).

Это замечание имеет большую важность, если его связать с одним результатом анализа, известным под названием теоремы Фурье[1]), в силу которой какая угодно функция $Q(t)$, конечная, непрерывная и с заданным периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ (при любом t), может быть представлена рядом (абсолютно и равномерно сходящимся) вида

$$q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n), \tag{49}$$

где q_n и α_n суть надлежащим образом выбранные постоянные.

---

[1]) Жан Баптист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier) родился в Оксерре в 1768 г., умер в Париже в 1830 г., особенно прославился благодаря своему фундаментальному сочинению о распространении тепла (Théorie analytique de la chaleur), представляющему собой классический образец физико-математической теории, не зависящей от схем теоретической механики и выступающей в самостоятельной трактовке. В этом исследовании широко применяются ряды и интегралы, носящие его имя. Он занимался также статикой, обосновав новыми путями принцип виртуальной работы. Был профессором в Высшей политехнической школе в Париже, совершил с Наполеоном I поход в Египет, с 1802 по 1816 г. управлял префектурой Изера и с 1817 г. до конца жизни был непременным секретарем Академии наук в Париже. Полное собрание его сочинений составляют два больших тома, опубликованных в 1890 г. (Paris, Gauthier — Villars).

Разложение определенной функции $Q(t)$ в ряд указанного вида представляет задачу так называемого *гармонического анализа*.

Теорема Фурье вместе с предыдущим замечанием позволяет непосредственно определить (в виде суммы ряда, сходимость которого легко может быть доказана) частный интеграл J уравнения (41) при любом законе действия периодической возмущающей силы.

Заметим еще, что в большинстве практических случаев первый отличный от постоянного член ряда (49) (*основной тон* в акустике) значительно превосходит последующие *(высшие гармоники)*, так что частный интеграл J (если отвлечься от несущественной постоянной) приблизительно приводится к типичной форме (43).

67. Энергия, поглощаемая колеблющейся системой. Сделаем последнее замечание, касающееся энергии, которая при вынужденных колебаниях сообщается (или отнимается, если окажется представленной отрицательным числом) колеблющейся системе действием возмущающей силы Q. В любой промежуток времени dt, которому соответствует перемещение ds движущейся точки, рассматриваемая энергия будет не чем иным, как элементарной работой силы, и, следовательно, поскольку Q относится к единице массы, мы имеем (п. 59)

$$mQds = mQ\dot{s}dt.$$

Энергия, сообщенная в течение целого периода T_1, может быть, таким образом, выражена в виде

$$e = m\int_t^{t+T_1} Q\dot{s}dt. \tag{50}$$

Если примем во внимание, что движение определяется уравнением $E(s) = Q$ и что, следовательно, имеем тождественно

$$Q\dot{s} = E(s)\dot{s} = \ddot{s}\dot{s} + 2h\dot{s}^2 + ks\dot{s} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{s}^2}{dt} + 2h\dot{s}^2 + \frac{k}{2}\frac{ds^2}{dt},$$

то равенству (50) можно будет придать вид

$$e = \frac{m}{2}\left[\dot{s}^2 + ks^2\right]_t^{t+T_1} + 2hm\int_t^{t+T_1} \dot{s}^2 dt.$$

Замечая, что s в рассматриваемом случае имеет вид $J + \sigma$ и что при достаточно большом t слагаемым σ можно пренебречь, мы найдем, что при установившемся режиме проинтегрированная часть равна нулю, так как (предыдущий пункт) функция J и, следовательно, $\dot{J}^2 + kJ^2$, так же как и Q, имеет период T_1. Остается, следовательно только интеграл, в котором вместо $\dot{s}$ можно также подставить J, так что

$$e = 2hm \int_{t}^{+T_1} \dot{J}^2 dt.$$

Эта формула показывает, что энергия e получается существенно положительной, т. е. *чтобы поддерживать вынужденные колебания, необходимо сообщать энергию колеблющейся системе.*

Следует заметить, что энергия e не зависит от t, т. е. что при установившемся режиме затрата энергии, соответствующая интервалу в один период, является всегда одной и той же, каков бы ни был момент t начала интервала. Чтобы это показать, достаточно взять производную по t от предыдущего выражения e; так как определенный интеграл зависит от t только через посредство двух пределов, верхнего и нижнего, это даст

$$\frac{de}{dt} = 2hm \{\dot{J}^2(t+T_1) - \dot{J}^2(t)\}.$$

Правая часть равна нулю в силу периодичности функции $\dot{J}$.

Ввиду независимости величины e от t можно условиться выражать затрату энергии в течение одного периода *при установившемся режиме* в виде

$$e = 2hm \int_{0}^{T_1} \dot{J}^2 dt. \qquad (50')$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассматривая хорды сферы, имеющие один конец в самой нижней (или самой верхней) точке, доказать, что падение тяжелой точки вдоль какой нибудь из этих хорд при отсутствии трения совершается в течение одного и того же промежутка времени.

2. На основании предыдущего упражнения определить прямолинейный путь, по которому должна двигаться тяжелая точка при отсутствии трения и с начальной скоростью, равной нулю от заданного положения, чтобы достигнуть данной кривой или данной поверхности в наименьшее возможное время.

3. Математик Т. Бонати предложил и разрешил (Венеция, 1781) следующую задачу. Дана точка O в некоторой вертикальной плоскости; провести через эту точку в заданной плоскости такую кривую, чтобы тяжелая точка, пущенная из точки O без начальной скорости, пробежала по ней некоторую дугу в то же самое время, что и соответствующую хорду, предполагая, что обе опоры лишены трения. Некоторыми авторами эта задача цитируется под именем задачи Саладини, которым она была снова решена (1806).

В полярных координатах ρ и θ с полюсом в O и полярной осью, направленной вдоль нисходящей вертикали, при движении по хорде имеем $2\rho = g\cos\theta t^2$; при движении же по кривой интеграл живых сил дает

$\dot{\rho}^2 = 2g\rho\cos\theta$. Исключая t, получим для кривой дифференциальное уравнение, которое, по выполнении выкладок, приводится к виду

$$d\rho = \rho \operatorname{ctg} 2\theta d\theta.$$

Интегрирование этого соотношения дает уравнение лемнискаты (с осью, наклоненной под углом в 45°) $\rho^2 = c^2 \sin 2\theta$.

4. Исследовать прямолинейное движение точки, притягиваемой или отталкиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

5. Материальная точка с массой m притягивается к центру O силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Предполагая, что точка предоставлена самой себе без начальной скорости на расстоянии a от O, доказать, что время, которое она употребляет, чтобы достигнуть O, равно $a^2\sqrt{\frac{m}{\mu}}$, где μ есть величина силы, отнесенной к единице массы на единице расстояния.

6. На две материальные точки с одинаковой массой наложена такая связь, что они могут двигаться без трения по двум взаимно перпендикулярным прямым Ox и Oy. Они притягиваются с силой, зависящей только от взаимного расстояния r. Доказать, что если начальные скорости их равны нулю, то обе точки одновременно придут в O.

7. Машина Атвуда. Два груза p и p_1 прикреплены к концам одной веревки, проходящей по жолобу блока с горизонтальной осью. Предполагая, ради определенности, $p > p_1$, представим себе, что система предоставлена самой себе в состоянии покоя. Доказать, что p опускается, и, следовательно, p_1 поднимается с постоянным ускорением

$$\frac{p - p_1}{p + p_1} g.$$

Примечание. Это выражение для ускорения используется в машине Атвуда. При помощи этой машины, как известно, преследуется цель уменьшения в желаемом отношении ускорения g, соответствующего свободному падению тяжелого тела, которое слишком быстро для того, чтобы его можно было удобно наблюдать.

При разборе задачи p и p_1 уподобляются двум материальным точкам, каждая из которых находится под действием двух сил: своего веса и натяжения веревки, причем для последней силы допускается, что она передается вдоль веревки без изменения от p к p_1. Мы уже знаем, что в *статических условиях* принимается в соображение предположение, что можно отвлечься от собственного веса веревки, от ее несовершенной гибкости и, сверх того, от трения, развивающегося на протяжении части веревки, помещающейся в жолобе блока (т. I, гл. XIV, п. 36). При тех же ограничениях можно принять натяжения в точках прикрепления веревки к грузам p и p_1 равными между собой также и во время движения, как это можно было бы легко доказать на основании так называемой *теоремы о движении центра тяжести* (п. 6, гл. V).

Указанный выше результат устанавливается исключением натяжения из уравнений движения двух точек p и p_1, каждой по своей (прямолинейной) траектории.

8. Для точки, находящейся под действием консервативной силы с потенциалом U и вынужденной двигаться по кривой без трения, в силу замечаний гл. I существуют соотношения:

$$R_n = \frac{mv^2}{r} - F_n, \quad mv^2 = 2(U+E)$$

и, следовательно, по исключении v,

$$R_n = \frac{2(U+E)}{r} - F_n.$$

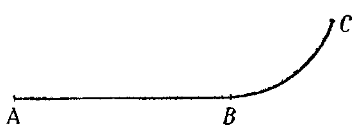
Применить эту формулу к случаю тяжелой точки, находящейся на параболе с вертикальной осью и с вогнутостью, обращенной вверх; в частности доказать, что если скорость точки равна нулю на высоте фокуса, то реакция параболы в самой нижней точке равна удвоенному весу.

9. Кривая c, расположенная в вертикальной плоскости, обращена своею выпуклостью кверху и служит опорой для тяжелой точки, которой сообщается в заданном положении P_0 касательная скорость v_0. Точка покидает кривую, как только реакция перестает быть направленной во внешнюю сторону, так что условие отрыва есть $R_n = 0$, где для R_n, в предположении отсутствия трения, сохраняет силу выражение предыдущего упражнения.

Рассмотреть случаи круга и параболы с вертикальной осью. В этом втором случае ввести скорость u_0, принадлежащую тяжелой точке, которая проходила бы через P_0 в свободном движении (т. е. при отсутствии опоры), описывая данную параболу; доказать, что если $v_0 > u_0$, то движущаяся точка покидает параболу сразу же после начала движения.

10. При предположениях предыдущего упражнения рассмотреть параболический профиль с горизонтальной осью и представить себе, что тяжелая точка оставлена без начальной скорости на высоте h над осью. Доказать, что если p есть параметр параболы, то высота y положения отрыва является положительным корнем кубического уравнения $y^3 + 3p^2y - 2p^2h = 0$, и показать, что при начальной высоте h, очень малой по сравнению с p, отрыв произойдет на высоте $\frac{2h}{3}$.

11. Эллиптический профиль без трения расположен так, что его большая ось вертикальна. В конце малой оси с внутренней стороны профиля бросается тяжелая точка с вертикальной (и, следовательно, касательной), направленной вверх скоростью v_0, определяемой из равенства $v_0^2 = \frac{a^2 + 8b^2}{3\sqrt{3b}} g$, где a и b суть полуоси эллипса. Показать, что точка по истечении небольшого промежутка времени покидает профиль и движется свободно, описывая дугу параболы, проходящую через центр эллипса.



Фиг. 10.

12. Тяжелая точка брошена вдоль горизонтальной опоры со скоростью 5 *м/сек*. Если коэффициент трения опоры есть 0,1, то какой путь будет пройден движущейся точкой, когда ее энергия сведется к половине начальной?

13. Тяжелое колечко, которое можно рассматривать как материальную точку, может скользить с легким трением вдоль направляющей, состоящей из горизонтального прямолинейного участка AB (фиг. 10) длиной l и из плавно

сопряженной с ним дуги BC, представляющей дугу круга в вертикальной плоскости с центром над AB, с радиусом r и центральным углом α. Обозначая через f коэффициент трения, определить скорость, которую надо сообщить движущейся точке (колечку) в A, чтобы она достигла конца C без удара о находящийся там упор (т. е. с нулевой скоростью).

14. Поезд, масса которого M, движется с постоянной скоростью по горизонтальным прямолинейным рельсам так, что, если пренебречь сопротивлением воздуха, тяговое усилие будет равно сопротивлению, происходящему от трения (качения) fMg, где f — постоянная. В некоторый момент несколько вагонов с общей массой m отрываются. Так как двигателя нет, то движение их замедляется в силу сопротивления fmg, и по истечении некоторого времени они останавливаются. Если l есть путь, пройденный ими за время до остановки, то показать, что остальная часть поезда будет находиться от них на расстоянии $Ml/(M-m)$.

15. Показать, обозначая через R полное сопротивление (предполагаемое постоянным), испытываемое поездом, масса которого есть M, и через H — мощность (тоже постоянную) силы тяги, что время, необходимое для того, чтобы сообщить поезду скорость v, меньшую предельной $\frac{H}{R}$, определяется выражением

$$\frac{MH}{R^2}\ln\frac{H}{H-Rv}-\frac{Mv}{R}.$$

16. Сопротивление воздуха движению железнодорожного поезда приближенно выражается в килограммах формулой [1] $R=(0{,}0193+0{,}00172\,n)\,v^2$, где n — число вагонов, составляющих поезд, включая паровоз и тендер, и v — скорость в *км/час*. Если ветер дует со скоростью u в направлении, противоположном движению поезда, то v в этой формуле надо заменить через $v+u$.

Предполагая, что поезд состоит из паровоза, тендера и восьми вагонов и весит 400 *т*, определить добавочную энергию, которую должен дать двигатель, чтобы поддерживать постоянную скорость в 72 *км/час* на пути в 10 *км* и с наклоном 5‰ при встречном порывистом ветре ($u=60$ *км/час*). Ответ 24 528 800 *кг/м*.

17. Тело заданной формы и размеров (в силу чего можно считать известным коэффициент $K\alpha A$, п. 22 предыдущей главы) брошено вертикально вверх. Предполагая энергию заданной и равной Q, определить массу, которую должно иметь тело, чтобы достигнуть максимальной высоты [2].

Очевидно, надо принять во внимание сопротивление воздуха, так как иначе можно было бы сделать высоту какой угодно, уменьшая неограниченно массу.

18. В прямом круговом движении, изученном в п. 36, гл. I, рассмотреть точку Q, расположенную на вертикали над точкой O, на расстоянии $OQ=l/e$ (и поэтому находящуюся внутри круга, поскольку $e>1$) и доказать, что всякая хорда, проходящая через Q, делит окружность на две дуги, пробегаемые движущейся точкой в равные промежутки времени.

19. Исследовать движение математического маятника, принимая во внимание сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Дифференциаль-

---

[1] Cavalli, Meccanica applicata alle macchine, Napoli, Trani, 1908, стр. 84,

[2] См. Lecornu, Dynamique appliquée 2-е изд., т. I, Париж, 1921, стр. 264—272.

ное уравнение движения в этом случае будет типа $m\ddot{s}=Av^2+B$, рассмотренного в п. 48, гл. I.

20. Изучить циклоидальное движение (п. 42, гл. I), принимая во внимание сопротивление, пропорциональное квадрату скорости, или же сопротивление трения. В случае с трением доказать, что существует с той и другой стороны от вершины M положение таутохронности, т. е. такая точка N, которую тяжелая точка, начинающая двигаться без начальной скорости из любого более высокого положения (расположенного с той же стороны, что и N, по отношению к M), достигает за одно и то же время. Исследовать движение в соответствии с общими выводами § 8.

21. Исследовать движение без трения по однородной цепной линии (т. I, гл. XIV, п. 50):

а) тяжелой точки,

б) точки, притягиваемой основанием с силой, пропорциональной расстоянию.

22. При свободном колебании груза на пружине (m есть масса, msk — восстанавливающая сила, $-2mh\dot{s}$ — пассивное сопротивление, при $k>h^2$; см. п. 58) полная энергия (кинетическая энергия + упругая потенциальная энергия) $E=m(\dot{s}^2+ks^2)/2$ неограниченно убывает с течением времени.

Проверить это, вычислив производную dE/dt и показав, что $dE/dt<0$ (*рассеяние энергии*).

23. Если к нижнему концу упругой нити с закрепленным верхним концом подвесить груз mg, то нижний конец будет колебаться вдоль вертикали в течение некоторого времени, после чего система примет некоторое положение равновесия. Обозначить удлинение через s. Подвешенное тело подвергается действию упругой силы ks (направленной вертикально вверх), где k есть коэффициент упругости (коэффициент жесткости) нити. Статическое влияние веса выражается в том, что определяет (статическое) удлинение mg/k (п. 61).

Рассматривая то колебание, которое получится, если мы предоставим тело самому себе без начальной скорости и в том положении, когда нить находится в естественном состоянии, располагаясь по вертикали, показать, что максимум удлинения (динамического), если отвлечься от пассивных сопротивлений, равен удвоенному статическому удлинению mg/k. Если же принять во внимание также и вязкое сопротивление $-2mh\dot{s}$, то максимум динамического удлинения равен произведению статического удлинения на $1+e^{-h\pi/\omega}$, где, как обычно, $\omega^2=k-h^2$.

24. Пружина, модуль упругости которой k, растянута силой Q и находится в равновесии. Показать, что если направление силы изменить на противоположное, то максимальное сжатие, происходящее вследствие этого, будет равно утроенному начальному удлинению. Пассивными сопротивлениями при этом пренебрегают.

25. Материальная точка (массы 1), движущаяся по заданной траектории, притягивается к началу с силой, равной $\omega^2 s$, и испытывает сопротивление среды, пропорциональное квадрату скорости, с очень малым множителем пропорциональности ε, т. е. таким, квадратом которого можно пренебречь. Уравнение движения есть $\ddot{s}\pm\varepsilon\dot{s}^2+\omega^2 s=0$, причем знак у ε выбирается обратный знаку $\dot{s}$.

Из уравнения живых сил следует, что энергия движущейся точки $E=(\dot{s}^2+\omega^2 s^2)/2$ за любой интервал времени от t_0 до t_1 уменьшается на

$\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{s}^3 dt$. Пренебрегая величиной ε^2, можно подставить под знак интеграла вместо $\dot{s}$ то значение этой величины, которое она имеет при $\varepsilon = 0$ и которое соответствует гармоническому движению $s = r \cos(\omega t + \theta_0)$ при постоянных r и θ_0.

При полном колебании s не возвращается к своему начальному значению s_0 и получает значение s_1, немного меньшее s_0. Показать, что если принять величину $\Delta s = s_1 - s_0$ за величину первого порядка и, следовательно, вместо $s_1^2 - s_0^2$ величину $2s_0 \cdot \Delta s$, то получится $\Delta s = -4\varepsilon s_0^2/3$.

26. Изложить теорию индикатора Уатта[1]).

27. Вычислить энергию, необходимую для одного периода вынужденного синусоидального колебания при условиях п. 62. Исследовать изменение ее при изменении частоты.

28. Исследовать вынужденные колебания в предположении, что возмущающая сила $Q(t)$ является затухающей синусоидальной, т. е. вида $Q(t) = qe^{-bt} \sin pt$, где b, pq — положительные постоянные.

29. Точка массы m удерживается на гладкой кривой c, которая движется, как неизменяемая система, по заданному закону. Если обозначить через $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$ приложенную к точке силу и реакцию связи и принять во внимание теорему Кориолиса (т. I, гл. IV, п. 3), в силу которой $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_r + 2\boldsymbol{a}_c$, то основное уравнение можно написать в виде

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F}' + \boldsymbol{R} - 2m\boldsymbol{a}_c,$$

где $\boldsymbol{F}'$ представляет собой результирующую силы $\boldsymbol{F}$ и силы инерции переносного движения $-m\boldsymbol{a}_\tau$. Доказать, что уравнение движения точки по кривой c при очевидном значении символов будет $m\ddot{s} = F'_t$, т. е. что отличие от случая неподвижной опоры (заданной траектории) состоит в том, что вместо активной силы подставляется результирующая этой силы и силы инерции переносного движения системы.

Предполагая, что прямо приложенная сила является позиционной (зависящей только от положения) и что c равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, доказать, что теорема живых сил дает $\frac{m\dot{s}^2}{2} - U(s) - \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \text{const}$, где U имеет значение, указанное в п. 12, гл. I, а r означает расстояние движущейся точки от оси, вообще говоря, изменяющееся вместе с s. Этот результат, в частности, представляет интерес для теории гидравлических турбин[2]).

---

[1]) См. Lecornu, цит. на стр. 78 соч., т. I, стр. 353.

[2]) Müller—Prange, Allgemeine Mechanik, Hannover, 1923, стр. 211

Глава II

ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ ТОЧКИ И ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ЗАДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Общие соображения. Первые интегралы

1. Рассмотрим прежде всего движение свободной материальной точки P, находящейся под действием силы $\boldsymbol{F}$. Заметим при этом, что наиболее важными конкретными задачами, приводящими к движению свободной точки (или системы точек) будут:

1°. Баллистические задачи, при решении которых приходится принимать во внимание, что система отсчета, связанная с землей, не является галилеевой, если траектория имеет значительные размеры.

2°. Задачи небесной механики. Мы уже видели (т. I, гл. VII, § 9), что, исходя из основного уравнения $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$, можно получить, проектируя его на оси галилеевой системы координат, три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(x,\ y,\ z;\quad \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\,|\,t),\\ m\ddot{y} &= Y(x,\ y,\ z;\quad \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\,|\,t),\\ m\ddot{z} &= Z(x,\ y,\ z;\quad \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\,|\,t). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Задача об определении движения свободной точки сводится к интегрированию этой системы дифференциальных уравнений второго порядка по отношению к трем неизвестным функциям x, y, z от одной независимой переменной t, так что при предположенных условиях для точки P возможны ∞^6 отличных друг от друга движений в соответствии с возможным выбором шести произвольных постоянных, от которых зависит общее решение системы (1).

Чтобы выбрать одно из этих движений, необходимо добавить столько дополнительных условий, сколько будет достаточно для определения шести постоянных интеграции. Наиболее простой и обычный способ для этой цели состоит в указании положения и скорости, которые движущаяся точка должна иметь в заданное мгновение (удобнее всего в начальный момент движения).

Отметим также, что интегралы системы (1), вообще говоря, не могут быть получены в конечной форме, и интегрирование выполняется только при помощи разложения в ряды.

Добавим еще, что в каждом случае, чтобы облегчить решение задачи, надо стараться определить какой-нибудь *первый* интеграл системы (1). Так называют всякое соотношение вида

$$f(x,\ y,\ z;\quad \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\,|\,t) = \text{const}, \tag{2}$$

которое является *необходимым* следствием уравнений (1), т. е. тождественно удовлетворяется при подходящем значении постоянной в правой части всякой отдельно взятой тройкой функций x, y, z, удовлетворяющих системе (1), и не содержит вторых производных от неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Знание первых интегралов явно облегчает интегрирование системы (1), так как позволяет заменить все уравнения движения или часть их (смотря по тому, будут ли найдены три независимых первых интеграла относительно $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ или меньше трех) уравнениями типа (2), являющимися уравнениями первого порядка.

Если удастся найти более трех независимых интегралов, можно будет произвести дальнейшие упрощения.

2. Существует довольно широкая категория сил, для которых легко найти первые интегралы:

а) Предположим, например, что сила $\boldsymbol{F}$, приложенная к материальной точке P, *постоянно перпендикулярна к некоторой неподвижной прямой* (или, в частности, равна нулю). Примем эту прямую за ось z, тогда наше предположение будет равносильно условию $Z=0$, поэтому третье уравнение системы (1) при интегрировании даст

$$m\dot{z}=c_1, \quad mz=c_1t+c_2.$$

Это два простейших интеграла, второй из которых есть не что иное, как общий интеграл первого; первый же интеграл, очевидно, показывает, что составляющая количества движения по оси z, т. е. по неподвижной оси, перпендикулярной, по предположению, к направлению действующей силы, остается постоянной. Он называется поэтому *интегралом количества движения*.

Второй интеграл показывает, что соответствующая координата есть линейная функция времени.

б) В качестве следующего примера рассмотрим случай, когда *сила $\boldsymbol{F}$ постоянно пересекает неподвижную прямую* (или, в частности, равна нулю). То же будет иметь место в силу уравнений (1) и для вектора $m\boldsymbol{a}$, приложенного к точке P. Отсюда следует, что момент этого вектора относительно рассматриваемой неподвижной прямой равен нулю. Но если примем эту прямую за ось z, то этот момент (скалярный) определится соответствующей составляющей векторного произведения $\overrightarrow{OP}\times m\boldsymbol{a}$, откуда получим уравнение

$$m(x\ddot{y}-y\ddot{x})=0, \tag{3}$$

которое сразу же дает первый интеграл

$$m(x\dot{y}-y\dot{x})=\text{const}. \tag{4}$$

Этот первый интеграл носит название *интеграла площадей* или интеграла *момента количества движения*, так как он выражает постоянство секторной скорости (т. I, гл. II, п. 20) проекции точки P на плоскость $z=0$ или (что сводится к тому же), постоянство момента количества движения точки относительно оси z.

Если существует первый интеграл (4), то можно сказать, что движение подчиняется *закону площадей* на плоскости $z=0$ относительно точки O; написав этот интеграл в виде

$$x\dot{y}-y\dot{x}=c, \tag{5}$$

будем иметь постоянную c (удвоенную секторную скорость относительно точки O проекции точки P на плоскость $z=0$), называемую *постоянной площадей*.

Поэтому можно сказать, что *для движения точки под действием силы, постоянно пересекающей некоторую ось, на любой плоскости, перпендикулярной к этой оси, имеет место закон площадей относительно точки, в которой рассматриваемая плоскость пересекает ось*.

Таким же образом, если сила постоянно пересекает ось x или ось y, мы будем иметь соответственно тот или другой из двух первых интегралов

$$m(y\dot{z}-z\dot{y})=\text{const}, \quad m(z\dot{x}-x\dot{z})=\text{const}.$$

Если, далее, речь идет о *центральной* силе $\boldsymbol{F}$ (т. I, гл. VII, п. 29, в) и точка O есть ее центр, то ускорение $\boldsymbol{a}$ точки P в силу своей пропорциональности силе $\boldsymbol{F}$ в любом положении точки будет проходить через O (или, в частности, будет равно нулю). Вследствие этого движение будет *центральным*, и будет иметь место уравнение

$$\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}, \tag{6}$$

выражающее постоянство секторной скорости относительно точки O в векторной форме. Это уравнение равносильно системе трех первых интегралов, написанных выше (интегралов площадей относительно трех координатных осей с началом в точке O).

Из уравнения (6), как мы знаем (т. I, гл. II, пп. 46—47), следует, что движение будет плоским и, еще точнее, будет происходить в плоскости, проходящей через центр.

в) Если сила $\boldsymbol{F}$, приложенная к точке P, *консервативна*, то уравнения (1) допускают, как мы знаем (т. I, гл. VIII, п. 11), *интеграл* (первый) *живых сил*

$$T-U=E,$$

где согласно обычным обозначениям T есть живая сила точки, U — потенциал силы и E — полная энергия (постоянная).

§ 2. Движение точки под действием центральной силы

3. Наиболее известным примером динамической задачи, которая благодаря наличию соответствующего числа первых интегралов оказывается интегрируемой в квадратурах, является задача о движении свободной точки под действием *центральной* силы F.

В этом случае, как мы видели в предыдущем пункте (б), прежде всего существует векторный интеграл площадей (6); движение, следовательно, происходит в некоторой плоскости, проходящей через центр силы O. Эту плоскость движения удобно принять за одну из координатных плоскостей, например за плоскость $z=0$, в силу чего из трех (скалярных) интегралов площадей

$$\dot z - z\dot y = \text{const}, \quad z\dot x - x\dot z = \text{const}, \quad x\dot y - y\dot x = \text{const},$$

два первых сведутся к тождеству, так как в любой момент z и $\dot z$ (а также и соответствующие постоянные в правой части) будут равны нулю, третье же уравнение

$$x\dot y - y\dot x = c$$

дает действительно соотношение между двумя неизвестными координатами и их производными.

С другой стороны, F как центральная сила консервативна (т. I, гл. VII, п. 29, в); точнее, если, как это обычно принято в теории центральных сил, обозначим через r расстояние OP и через $\varphi(r)$ составляющую по направленной прямой OP силы F (отнесенной к единице массы), то потенциал U будет определенной функцией от r (по крайней мере с точностью до аддитивной постоянной), определяемой равенством

$$\frac{dU}{dr} = \varphi(r), \tag{7}$$

т. е.

$$U(r) = \int_{r_0}^{r} \varphi(r)\,dr.$$

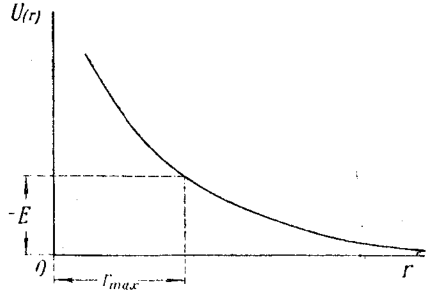
На основании п. 2, б в этом случае имеет место интеграл живых сил; если для простоты за единицу массы принять массу движущейся точки, то этот интеграл примет вид:

$$\frac{v^2}{2} - U(r) = E; \tag{8}$$

из существования двух первых интегралов (5) и (8), как мы увидим, и вытекает интегрируемость в квадратурах задачи (приведенной к плоскости xy) о движении свободной точки под действием центральной силы.

Заметим еще, что в плоскости движения xy неизвестными являются координаты x, y движущейся точки P, и обе эти неизвестные можно определить (с точностью до начальных условий) из уравнений, представляющих два первых интеграла (5) и (8) и составляющих систему двух дифференциальных уравнений первого порядка. Интегрирование этой системы введет две произвольные постоянные, так что, если мы примем во внимание, что c и E тоже являются постоянными (постоянная площадей и постоянная энергии), то увидим, что рассматриваемое нами движение зависит от четырех произвольных постоянных.

Далее, если движение относится к произвольным осям, то необходимы еще два параметра для определения плоскости движения (проходящей через центр O), так что окончательно получится шесть произвольных постоянных, т. е. как раз столько, сколько и должно появиться в общем интеграле всякой задачи о движении свободной точки под действием какой угодно силы.



Фиг. 11.

4. Прежде чем приступить к интегрированию системы (5), (8), остановимся немного на одном замечании качественного характера, относящемся к случаю, когда полная энергия E движущейся точки оказывается отрицательной и потенциал U при беспредельном возрастании r стремится к конечному пределу. Пользуясь произволом выбора аддитивной постоянной интегрирования, этот предел можно всегда сделать равным нулю, как в случае потенциала Ньютона.

Из интеграла живых сил следует, что $U(r) \geqslant -E$, так как $\frac{v^2}{2} \geqslant 0$. Если $E < 0$, то $(-E)$ есть наименьшее возможное значение функции $U(r)$ при движении точки. Отсюда, ввиду того, что при $r \to \infty$ потенциал $U(r)$ исчезает, следует, что при движении точки r имеет конечный верхний предел (фиг. 11). Таким образом мы видим, что если потенциал $U(r)$ центральной силы в бесконечности есть правильная функция, а полная энергия движущейся точки отрицательна, то вся орбита расположена на конечном расстоянии.

В случае притягивающих сил, так как

$$\varphi(r) < 0, \quad U(r) = -\int_r^{\infty} \varphi(r)\,dr > 0,$$

полная энергия E может оказаться отрицательной, тогда как в случае отталкивающих сил она всегда положительна, так что в этом последнем случае только что сделанное замечание неприложимо.

5. Обращаясь теперь к интегрированию системы (5), (8), начнем с преобразования ее. Отнесем ее к полярным координатам r и θ, имеющим полюс в точке O и полярную ось, направленную по оси x. На основании известных формул (см. т. I, гл. II, п. 19, 20)

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta;\quad x\dot{y}-y\dot{x}=r^2\dot{\theta},\quad v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$$

получим дифференциальные уравнения задачи в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} r^2\dot{\theta}&=c,\\ \frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)&=U(r)+E. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Прежде всего полезно рассмотреть частный случай, когда постоянная площадей c равна нулю. Если исключим не имеющее интереса предположение о состоянии покоя точки P в центре силы ($r=0$), то будем иметь $\dot{\theta}=0$, т. е. $\theta=\mathrm{const}$, так что в данном случае речь идет о прямолинейном движении (вдоль прямой, проходящей через центр), и исследование закона движения, т. е. определение r в функции от t, сведется к изучению уравнения живых сил, которое принимает вид

$$\dot{r}^2=2[U(r)+E].$$

За исключением различия в обозначениях мы снова получим уравнение типа, подробно разобранного в § 6 предыдущей главы. Применяя непосредственно полученные там выводы, мы заключаем, что возможными движениями будут колебательные периодические движения (между простыми нулями функции $U(r)+E$, где она остается положительной) или апериодические самое большее с одним обращением направления. В этом последнем случае речь будет итти либо о движении к асимптотической точке на конечном расстоянии (т. е. к кратным нулям функции $U(r)+E$), либо о движении к бесконечно удаленной точке (если в направлении начальной скорости не встретится ни одного нуля функции $U(r)+E$). Наконец, возможны и состояния равновесия (во всяком возможном кратном нуле функции $U(r)+E$).

6. Принимая теперь постоянную c отличной от нуля, из закона площадей получим, что угол θ будет изменяться вместе с t всегда в одном и том же направлении, так как $\dot{\theta}$ постоянно имеет один и тот же знак. Не ограничивая общности, можно предположить, что $c>0$ (так как в случае необходимости можно изменить положительное направление отсчета угла θ на обратное), так что θ будет возрастать вместе с t.

Можно получить теперь дифференциальное уравнение траектории (или *орбиты*, как часто говорят в теории центрального движения), исключая из уравнения (9) время и принимая за независимое переменное угол θ вместо t, что возможно, так как θ является монотонной функцией от t.

Если, интегрируя полученное таким образом дифференциальное уравнение, мы придем к полярному уравнению орбиты $r=r(\theta)$, то качественная картина движения получится из интеграла площадей

$$r^2\dot{\theta}=c.$$

Именно, подставляя в это уравнение вместо r выражение его в функции от θ, мы получим дифференциальное уравнение, которое, очевидно, интегрируется посредством разделения переменных, т. е. посредством одной квадратуры, и дает выражение θ в функции от t, т. е. закон движения (по известной уже орбите).

7. Для того чтобы из уравнений (9) вывести дифференциальное уравнение, характеризующее неизвестное уравнение орбиты $r=r(\theta)$, достаточно рассмотреть в уравнении живой силы $\dot{r}$ как сложную функцию от t через посредство θ и исключить затем $\dot{\theta}$ при помощи уравнения площадей. Таким образом, для орбиты получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{c^2}{2}\left\{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right\}=U(r)+E. \qquad (10)$$

Заметим еще, что уравнение (10) является первым интегралом дифференциального уравнения второго порядка, к которому можно прийти и прямым путем, прилагая к настоящему случаю формулу Бинэ (т. I, гл. II, п. 53). Эта формула, как мы знаем, дает выражение ускорения (радиального) для центрального движения, каким и является наше движение (п. 4). Если мы напишем, что ускорение (радиальное) движущейся точки (по предположению масса ее равна единице) должно быть равно соответствующей составляющей силы, т. е. $\varphi(r)$, то получим упомянутое уравнение второго порядка

$$-\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}+\frac{1}{r}\right)=\varphi(r). \qquad (11)$$

Если возьмем производные от обеих частей уравнения (10) по θ и примем во внимание уравнение (7), то увидим, что уравнение (10) (зависящее от произвольной постоянной E) дает как раз первый интеграл уравнения (11).

Относительно уравнения (11) заметим еще, что, если выполнить замену зависимого переменного посредством соотношения

$$u = \frac{1}{r}, \tag{12}$$

то оно примет вид, который будет полезен в дальнейшем:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{c^2u^2}\varphi\left(\frac{1}{u}\right). \tag{11'}$$

8. При изучении орбиты мы будем исходить из соответствующего дифференциального уравнения первого порядка (10). Если выполнить в нем замену зависимого переменного (12) и положить

$$\frac{2}{c^2}\left\{U\left(\frac{1}{u}\right)+E\right\} - u^2 = \Phi(u), \tag{13}$$

то уравнение (10) примет вид

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \Phi(u); \tag{14}$$

если не обращать внимания на различие в обозначениях, то мы имеем здесь знакомое уравнение типа (8') из § 6 предыдущей главы.

Это уравнение интегрируется одной квадратурой, так что, принимая во внимание замечания п. 6, мы найдем, как уже упоминалось в п. 3, что *задача о движении свободной точки под действием центральной силы всегда может быть разрешена посредством двух квадратур.*

Более того, здесь благодаря самой форме дифференциального уравнения (14) мы можем предвидеть поведение u при изменении θ, т. е. геометрическую природу орбиты в каждом отдельном случае, на основе общих выводов § 6 предыдущей главы. Необходимо только в кинематической интерпретации заменить независимую переменную t геометрической величиной θ. Так, например, в наиболее интересном случае, когда начальное значение u_0 заключено в промежутке между двумя простыми нулями u_1, u_2 (включая концы) функции $\Phi(u)$, между которыми $\Phi(u)$ является правильной и положительной, функция $u(\theta)$ при возрастании θ будет сколь угодно долго колебаться между крайними значениями u_1, u_2. При каждом прохождении u от u_1 до u_2 или обратно θ будет возрастать на некоторую постоянную величину Θ (аналогичную продолжительности τ одного простого колебания в § 6 предыдущей главы), которая (если положим $u_1 < u_2$) определится равенством

$$\Theta = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{\Phi(u)}}. \tag{15}$$

Для того чтобы выяснить геометрический смысл этого результата, вспомним, что $u = \frac{1}{r}$: вся орбита развертывается в круговом кольце, заключенном между двумя концентрическими окружностями с центром в O и радиусами $r_1=\frac{1}{u_1}$, $r_2=\frac{1}{u_2}$, и касается последовательно то одной, то другой из этих окружностей таким образом, что разность углов двух последовательных точек касания всегда равна постоянной Θ. Эти точки касания называются апсидами и, поскольку они попеременно соответствуют максимумам и минимумам радиуса-вектора r, их обыкновенно различают, называя первые афелиями и вторые перигелиями, что связано с движением Земли вокруг Солнца (ἥλιος). Угол Θ, определяемый равенством (15), называется *апсидальным углом*.

Когда Θ соизмеримо с 2π, орбита будет замкнутой, в противном случае она должна бесконечное число раз обертываться вокруг центра. В последнем предположении посредством некоторого рассуждения (которого мы здесь не будем приводить, оставляя его до п. 39, где оно будет применено к особенно наглядному случаю) доказывается, что орбита *практически заполняет* круговое кольцо в том смысле, что, какую бы точку внутри кольца мы ни выбрали, орбита в конце концов пройдет от нее на расстоянии, меньшем любого наперед заданного числа.

9. Круговые орбиты. В частном случае, когда начальное значение u_0 переменной u есть кратный нуль функции $\Phi(u)$, u будет сохранять свое значение u_0, как бы ни изменялся угол θ, и мы будем иметь простой, но особенно интересный случай *круговой орбиты* с радиусом $r_0=\frac{1}{u_0}$, которая в силу закона площадей будет описываться с постоянной угловой скоростью $\frac{c}{r_0^2}$ и, следовательно, равномерно.

Изучение этих круговых орбит очень удобно связать с дифференциальным уравнением второго порядка (11'); если положим в этом уравнении

$$\Psi(u)=-\frac{1}{c^2u^2}\varphi\left(\frac{1}{u}\right)-u, \tag{16}$$

то можно написать его в виде

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=\Psi(u). \tag{17}$$

Для того чтобы существовала орбита, удовлетворяющая этому уравнению, которая была бы окружностью с радиусом a, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы это уравнение удовлетворялось постоянной $u_0=\frac{1}{a}$, т. е. чтобы имело место равенство

$$\Psi(u_0)=0. \tag{18}$$

Допуская существование такого нуля функции $\Psi(u)$, можно связать с соответствующей круговой орбитой изучение орбит, близких к ней, т. е. таких, для которых

$$u = u_0 + \varepsilon(\theta), \tag{19}$$

где неизвестную функцию $\varepsilon(\theta)$ для всех значений θ или по крайней мере для значений, лежащих в заданном интервале, можно рассматривать как бесконечно малую величину первого порядка. Допуская это и принимая во внимание соотношение (18), будем иметь

$$\Psi(u_0 + \varepsilon) = \varepsilon \Psi'(u_0),$$

если пренебречь членами, содержащими ε^2. Из уравнения (17) и соотношения (19) мы получим для неизвестной функции $\varepsilon(\theta)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\theta^2} = \varepsilon \Psi'(u_0). \tag{20}$$

Так как это уравнение является линейным с постоянными коэффициентами, то оно может быть проинтегрировано в конечном виде (см. т. I, гл. II, пп. 43, 44).

Если $\Psi'(u_0) < 0$, то достаточно положить $\Psi'(u_0) = -\omega^2$, чтобы уравнению (20) придать вид

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\theta^2} + \omega^2\varepsilon = 0;$$

общее решение этого уравнения определяется равенством

$$\varepsilon = p \cos(\omega\theta + q), \tag{21}$$

где p и q — произвольные постоянные. При изменении θ функция ε будет колебаться между p и $-p$; если примем p достаточно малым по абсолютной величине, то будем иметь орбиту, определяемую равенством (19) и уклоняющуюся сколь угодно мало от круговой при всяком возможном значении θ. По этой причине круговая орбита, для которой $\Psi'(u_0) < 0$, называется *устойчивой*.

Орбита (19) пересекает круговую орбиту при тех значениях θ, при которых ε обращается в нуль. Апсидальный угол (разность аномалий между последовательными максимумом и минимумом ε, а следовательно, u и r), который в этом случае совпадает с разностью аномалий между двумя последовательными пересечениями с круговой орбитой, определится равенством

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{-\Psi'(u_0)}},$$

как это следует из формулы (21). Когда $\Psi'(u_0) > 0$, равенство (20) перейдет в следующее:

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\theta^2} = \omega^2\varepsilon, \tag{22}$$

где

$$\omega = \sqrt{\Psi'(u_0)}.$$

Из выражения для общего решения

$$\varepsilon = c_1 e^{\omega\theta} + c_2 e^{-\omega\theta}$$

видно, что, как бы ни выбирались начальные условия (постоянные интегрирования), функция ε по абсолютному значению в конце концов будет возрастать беспредельно при изменении θ в том или другом направлении. Поэтому предположение о том, что может существовать орбита, бесконечно близкая к круговой, на основании которого мы получили дифференциальное уравнение (20), оправдывается a posteriori только для достаточно малой дуги, т. е. для достаточно ограниченного интервала значений θ. К аналогичному заключению мы придем и в том случае, когда $\Psi'(u_0) = 0$.

Естественно поэтому, в случае когда $\Psi'(u_0) \geqslant 0$, называть круговую орбиту, рассматриваемую в целом, *неустойчивой*.

Рассмотрим, например, случай центральной силы, обратно пропорциональной ν-ой степени расстояния от центра, т. е. предположим

$$\varphi(r) = \frac{k}{r^\nu} = ku^\nu \tag{23}$$

при постоянном (положительном или отрицательном) k.

На основании определения (16) функции $\Psi(u)$ будем иметь

$$\Psi(u) = -\frac{k}{c^2}u^{\nu-2} - u = -\frac{1}{c^2u^2}\varphi\left(\frac{1}{u}\right) - u,$$

$$\Psi'(u) = (2-\nu)\frac{k}{c^2}u^{\nu-3} - 1 = \frac{2-\nu}{c^2u^3}\varphi\left(\frac{1}{u}\right) - 1.$$

Из равенства $\Psi(u_0) = 0$ следует

$$\varphi\left(\frac{1}{u_0}\right) = -c^2u_0^3$$

и поэтому

$$\Psi'(u_0) = \nu - 3.$$

Следовательно, при законе действия силы, определяемом равенством типа (23), круговые орбиты будут устойчивыми, если $\nu < 3$, и неустойчивыми, если $\nu \geqslant 3$.

10. Сила притяжения, пропорциональная расстоянию. В этом случае орбита представляет собой эллипс (в частности окружность или прямую) с центром в центре притяжения O. Это почти непосредственно следует из дифференциальных уравнений второго порядка (1) в декартовых координатах. Действительно, если ω^2 есть постоянное отношение величины силы (отнесенной к единице массы) к расстоянию OP точки от центра, то для точки P с массой, равной 1, будем иметь два уравнения движения

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y,$$

из которых непосредственно следует, что проекции точки P на оси координат совершают гармоническое колебательное движение с одним и тем же центром O и с одной и той же частотой ω (т. е. с одним и тем же периодом).

В конечном виде будем иметь уравнения

$$x = r_1 \cos(\omega t + \theta_1), \quad y = r_2 \cos(\omega t + \theta_2), \tag{24}$$

где r_1, r_2, θ_1, θ_2 — четыре произвольных постоянных, из которых первые две можно предполагать положительными, а две другие — заключенными между $-\pi$ и π. Если уравнения (24) напишем в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= r_1(\cos\omega t \cos\theta_1 - \sin\omega t \sin\theta_1) \\ y &= r_2(\cos\omega t \cos\theta_2 - \sin\omega t \sin\theta_2), \end{aligned}\right\} \tag{24'}$$

то увидим, что они разрешимы относительно $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, кроме случая, когда $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$, т. е. $\theta_1 = \theta_2$, или же $\theta_1 = \theta_2 \pm \pi$ (гармонические колебания, совпадающие по фазе или с разностью фаз в полпериода, в смысле, указанном в примечании на стр. 69). В обоих этих исключительных случаях соответственно получим, разделив почленно равенства (24'),

$$\frac{x}{r_1} = \pm\frac{y}{r_2},$$

откуда и заключаем, что речь идет о гармоническом прямолинейном движении.

В общем случае, т. е. в предположении, что $\sin(\theta_1 - \theta_2) \neq 0$, из равенства (24') получим:

$$\cos\omega t = \frac{r_1 y \sin\theta_1 - r_2 x \sin\theta_2}{r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}, \quad \sin\omega t = \frac{r_1 y \cos\theta_1 - r_2 x \cos\theta_2}{r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Возводя в квадрат и складывая, будем иметь уравнение

$$r_2^2 x^2 + r_1^2 y^2 - 2 r_1 r_2 x y \cos(\theta_1 - \theta_2) = r_1^2 r_2^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2),$$

представляющее эллипс с центром в центре притяжения (в частности, окружность при $r_1 = r_2$ и $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$, т. е. когда оба гармонических колебания имеют равные амплитуды и по фазе отличаются на четверть периода).

Поэтому, если исключим случай круговой орбиты, мы будем иметь четыре апсида соответственно числу вершин эллипса, и апсидальный угол будет прямым.

11. Поучительно найти этот последний результат, относящийся к апсидам, при помощи общих рассуждений пп. 5—8; тогда мы будем иметь то преимущество, что установим соотношение, в случае эллиптической орбиты связывающее длины главных полуосей a, b с механическими постоянными интеграции (постоянной c — площадей и постоянной E — энергии).

Если $c=0$, то можно говорить о прямолинейном движении по прямой, проходящей через центр O (п. 5), а так как действующая сила, согласно ее определению, имеет характер восстанавливающей силы, то движение будет гармоническим (предыдущая глава, п. 18).

Предположим поэтому, что $c>0$ (п. 6). Радиальная составляющая силы и потенциал (в предположении, что аддитивная произвольная постоянная выбрана так, что он обращается в нуль в точке O) определяются соответственно равенствами

$$\varphi(r)=-\omega^2 r, \quad U(r)=-\frac{1}{2}\omega^2 r^2.$$

Поэтому, вводя, как обычно, переменную $u=\frac{1}{r}$ для определения орбиты, получим уравнение (14)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\Phi(u),$$

где

$$\Phi(u)=\frac{2}{c^2}\left\{E-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{u^2}-\frac{c^2}{2}u^2\right\}. \tag{25}$$

Чтобы исследовать характер движения, достаточно рассмотреть возможное распределение нулей функции $\Phi(u)$ между $u=0$ и $u\to+\infty$ (поскольку u как величина, обратная радиусу-вектору, существенно положительна). Функция $\Phi(u)$ стремится к $-\infty$ как при $u\to 0$, так и при $u\to+\infty$. С другой стороны, непосредственно можно проверить, что ее производная обращается в нуль только при $u=\sqrt{\frac{\omega}{c}}=u^*$; поэтому $\Phi(u)$ в этой точке необходимо имеет максимум, причем до наступления максимума (т. е. при $0\leqslant u<u^*$) она постоянно возрастает, а после него (т. е. при $u>u^*$) постоянно убывает.

Этот максимум $\Phi(u^*)$, зависящий естественно от постоянных c и E, т. е. по существу от начальных условий, не может быть отрицательным для действительного движения (гл. I, п. 25). Если $\Phi(u^*)=0$, то u^* будет двукратным корнем уравнения $\Phi(u)=0$, при всяком же другом значении будем иметь $\Phi(u)<0$, так что единственным действительным решением уравнения (14) является круговая орбита $u=u^*$ (п. 9). Наконец, когда $\Phi(u^*)>0$, функция $\Phi(u)$ необходимо будет иметь два простых нуля u_1, u_2: первый — заключенный между O и u^* (исключая концы), и второй — больший, чем u^*; u_1 и u_2 ограничивают единственный промежуток значений u, внутри которого функция $\Phi(u)$ остается положительной.

Мы имеем, следовательно, случай, когда u колеблется между двумя крайними значениями u_1 и u_2. Чтобы определить соответствующий апсидальный угол Θ, заметим, что функцию $\Phi(u)$, как это вытекает из (25), можно рассматривать как функцию от аргумента u^2; при членах с u^2 она имеет коэффициент -1, и так как она имеет два нуля: $u^2=u_1^2$ и $u^2=u_2^2$, то мы можем написать

$$\Phi(u)=\frac{1}{u^2}(u^2-u_1^2)(u_2^2-u^2).$$

Поэтому на основании формулы (15) имеем

$$\Theta=\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{udu}{\sqrt{(u^2-u_1^2)(u_2^2-u^2)}};$$

полагая

$$u^2=\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)-\frac{1}{2}(u_2^2-u_1^2)\cos\xi$$

и, следовательно,

$$udu=\frac{1}{4}(u_2^2-u_1^2)\sin\xi d\xi,$$

$$u^2-u_1^2=\frac{1}{2}(u_2^2-u_1^2)(1-\cos\xi),\quad u_2^2-u^2=\frac{1}{2}(u_2^2-u_1^2)(1+\cos\xi),$$

получим

$$\Theta=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}d\xi=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, действительно имеем четыре апсида, попарно диаметрально противоположные (вершины эллиптической орбиты).

Если возьмем снова радиус-вектор $r=\frac{1}{u}$ и примем во внимание, что $u_1<u_2$, то увидим, что полуоси этой орбиты определяются равенствами $a=\frac{1}{u_1}$, $b=\frac{1}{u_2}$.

12. Замечание относительно случая отталкивающей центральной силы. В этом случае радиальная составляющая сила $\varphi(r)=\frac{dU}{dr}$ остается положительной при всяком (положительном) значении r. Отсюда следует, что производная

$$\frac{dU}{du}=-r^2\frac{dU}{dr}$$

постоянно отрицательна, и такой же будет [ср. (13)] при изменении u от 0 до ∞ производная

$$\frac{d\Phi}{du}=\frac{2}{c^2}\frac{dU}{du}-2u.$$

Поэтому функция $\Phi(u)$ изменяется постоянно в одном и том же направлении и, следовательно, может обратиться в нуль самое большее один раз. Отсюда следует, что орбита имеет самое большее один апсид.

Легко видеть, что когда апсид существует, он необходимо является перигелием. Действительно, ускорение во всяком случае составляет острый (или прямой) угол с нормалью к траектории, обращенной в сторону вогнутости (т. I, гл. II, п. 26). То же самое можно сказать и относительно силы и, следовательно, так как сила является центральной отталкивающей, относительно радиуса-вектора. Поэтому кривая в окрестности любой ее точки является выпуклой относительно центра силы. Так как в возможном апсиде касательная перпендикулярна к радиусу-вектору, то он необходимо представляет собой минимум. Следовательно, это действительно есть перигелий.

В этом можно убедиться и чисто аналитическим путем при помощи следующего рассуждения.

Дифференцируя уравнение (14) по θ, получим

$$2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{d\Phi}{du}\frac{du}{d\theta},$$

или, полагая временно $\frac{du}{d\theta}\neq 0$, т. е. исключая временно апсид $\left(\frac{du}{d\theta}=0\right)$,

$$2\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{d\Phi}{du}.$$

Вследствие непрерывности это соотношение останется в силе также и для временно исключенного положения в апсиде.

Так как $\frac{d^2u}{d\theta^2}$, так же как и $\frac{d\Phi}{du}$, отрицательно, то мы заключаем, что если при изменении θ переменная u проходит через предполагаемый существующим нуль функции $\Phi(u)$, то она имеет там максимум, а радиус-вектор $r=\frac{1}{u}$ — соответственно минимум.

§ 3. Основная задача внешней баллистики. Замечание о вторичных задачах [1]*)

13. Предпосылки и формулировка основной задачи. Внешняя баллистика изучает движение снаряда с момента выхода его из канала ствола орудия. Если снаряд уподобляется материальной точке, то

[1]) Для углубленного изучения этих вопросов, имеющих очевидную важность для военных наук, мы отсылаем к специальным трактатам, из которых укажем здесь только на следующие: F. Siacci, Balistica, 2-е изд., Torino, 1888; G. Bianchi, Corso teorico-pratico di Balistica esterna, текст и числовые таблицы (посмертное издание), Torino, 1922; C. Cranz, Lehrbuch der Balistik, 4т., Leipzig, 1910—1918; P. Charbonnier, Traité de Balistique extérieure, т. I, Paris, 1921.

*) См. также Н. Забудский, Внешняя баллистика, Петербург, 1895; Вентцель Д. А., Окунев Б. Н., Шапиро Я. М., Внешняя баллистика, Ленинград, т. I, III (1933), т. II (1934). Levi-Civita e Amaldi, Principi di Balistica esterna, Bologna, 1935. *(Прим. ред.)*

перед нами возникает задача изучить движение тяжелой (свободной) точки P, брошенной в воздух с какого-нибудь места земной поверхности с произвольной начальной скоростью v_0. Как уже отмечалось в начале главы, эта задача представляет собой одну из немногих задач о движении свободной материальной точки, встречающихся в действительности; баллистическое истолкование ее является как раз таким, которое освещает в ней все существенно важное.

Если отвлечься не только от движения Земли (относительно неподвижных звезд), но также и от сопротивления воздуха, то останется только рассмотреть движение в пустоте под действием силы тяжести, которую в достаточно ограниченном пространстве можно рассматривать как постоянную по величине и направлению.

Таким образом, снова приходим к уже рассмотренной в кинематической постановке задаче в § 6 гл. II т. I.

Но, как мы уже подчеркивали в свое время, схематическое представление, которое мы получили о движении тяжелой точки, является первым приближением, справедливым для очень малых траекторий и, следовательно, при малых начальных скоростях. В случае же скоростей, даваемых современными орудиями, сопротивление воздуха коренным образом изменяет картину движения снаряда; так, например, для ружейной пули, имеющей начальную скорость 625 *м/сек*, теория параболического движения (соответственно углу возвышения в 45°) дала бы максимальную горизонтальную дальность в 40 *км* и высоту подъема в 4 *км* (см. т. I, гл. II, п. 32), опытным же путем установлено, что в действительности максимальная горизонтальная дальность, которая получается при угле возвышения около 32°, немного превосходит 3 *км*, а высота подъема не превосходит 1/2 *км*.

Мы дадим здесь описание движения снаряда, ближе соответствующее действительности. С этой целью, отвлекаясь пока от вращения Земли и изменения силы тяжести вдоль траектории, мы будем учитывать сопротивление воздуха, т. е. будем изучать задачу о движении тяжелой материальной точки, брошенной с произвольной начальной скоростью в воздухе, предполагая, что последний оказывает сопротивление движению. Это и есть так называемая *основная задача* баллистики (внешней).

Существенным для постановки такой задачи является уточнение, зависящее от поведения сопротивления воздуха, которое, так как речь идет о поступательном движении снаряда, можно схематически представить так, как это сделано в п. 23 первой главы. Согласно этому, в любой момент сопротивление воздуха имеет направление, прямо противоположное скорости $\boldsymbol{v}$ снаряда, и задается в виде некоторой величины, зависящей от плотности μ среды и от абсолютного значения v скорости по закону, устанавливаемому опытным путем. Эта величина f сопротивления воздуха, отнесенная к единице массы (которая, по Сиаччи, называется в баллистике *замедлением*) определяется функцией следующего вида:

$$f = \frac{\mu i}{C} F(v), \tag{26}$$

где i обозначает коэффициент, зависящий от формы снаряда, C — так называемый *баллистический коэффициент* и $F(v)$ — существенно положительную конечную и непрерывную функцию от v. Баллистический коэффициент C прямо пропорционален весу p снаряда и обратно пропорционален площади миделева сечения (гл. I, § 5, п. 22), т. е., так как речь идет о круглых снарядах, квадрату (a^2) радиуса a; точнее,

$$C = \frac{p}{1000 a^2},$$

где предполагается, что вес p измерен в килограммах, а радиус a в метрах.

Для данного снаряда величины i и C сами по себе являются постоянными, тогда как плотность воздуха μ может оставаться постоянной только при выстрелах с незначительной высотой поднятия снаряда. Но в современной баллистике приходится изучать также и выстрелы, при которых высота поднятия достигает нескольких километров. Тогда необходимо принимать во внимание изменение плотности μ с высотой и поэтому рассматривать сопротивление f как функцию не только от v, но и от высоты снаряда, так как μ изменяется с высотой[1]).

Наконец, что касается существенно положительной функции $F(v)$, то, даже отвлекаясь от всякого количественного предположения, надо иметь в виду (например, на основании диаграммы Сиаччи), что не только сама функция $F(v)$, но и отношение $\frac{F(v)}{v}$ постоянно возрастает вместе с v, откуда следует, что функция $F(v)$, постоянно возрастая, стремится к бесконечности вместе с v.

Таковы предпосылки основной задачи баллистики в ее наиболее общей постановке. Имея в виду в предстоящем изложении исследовать выстрелы, при которых высота не слишком велика, мы ограничимся упрощенным предположением $\mu = \mathrm{const}$, т. е. будем считать сопротивление f зависящим только от v. При этом заметим, что все качественные результаты, которые мы получим в ближайших пп. 18—20, останутся в силе также и в случае закона сопротивления вида (26) при μ, изменяющемся с высотой, *лишь бы μ убывало при возрастании высоты полета снаряда.*

---

[1]) С этой целью см. две статьи E. Cavalli, озаглавленные „Il problema balistico dell'avvenire" в „*Riv. di Art. e Genio*", 1921—1922.

Последнее замечание: не делая предположения, что сопротивление f исчезает вместе со скоростью[1]), допустим, что $f(0)<g$. Это равносильно предположению, что сопротивление воздуха при скорости, равной нулю, оказывается меньше веса снаряда.

Отсюда вытекает непосредственное следствие, которым мы воспользуемся в дальнейшем. Так как непрерывная функция $f(v)$, так же как $F(v)$, стремится к бесконечности, всегда возрастая вместе с v, то это справедливо и для разности $f(v)-g$. Таким образом, из того, что эта разность при $v=0$ отрицательна, мы заключаем, что она при изменении v от 0 до ∞ обращается в нуль только один раз. Обозначим через v_1 единственный конечный и положительный корень уравнения

$$f(v)-g=0, \tag{27}$$

существование которого таким образом доказано.

14. Уравнение основной задачи. Если для простоты за единицу массы примем массу снаряда и обозначим через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$ ускорение и скорость снаряда, через $\boldsymbol{t}$ — единичный вектор скорости $\boldsymbol{v}$, через $\boldsymbol{g}$ — ускорение (вектор) силы тяжести, предполагая его постоянным, то уравнение основной задачи будет иметь вид

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}-f(v)\boldsymbol{t}. \tag{28}$$

Если начальная скорость $\boldsymbol{v}_0$ вертикальна или, в частности, равна нулю (снаряд, предоставленный самому себе без начального импульса на некоторой высоте), то движение благодаря полной симметрии будет прямолинейным и вертикальным, и его можно было бы изучить, исходя из соображений, аналогичных тем, которые были развиты для частного случая сопротивления, пропорционального квадрату скорости (§ 9 предыдущей главы).

Поэтому мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда начальная скорось $\boldsymbol{v}_0$ не совпадает с вертикалью; сейчас же заметим на основе соображения о симметрии, подобного только что упоминавшемуся (которое, кроме того, можно было бы строго формулировать на основании уравнения (28)), что движение будет происходить в вертикальной плоскости, проходящей через начальную скорость $\boldsymbol{v}_0$.

Фиксируем теперь систему отсчета. За начало O координатных осей возьмем место выстрела или, точнее, центр отверстия ствола орудия в момент выстрела. За ось x возьмем горизонтальную прямую в плоскости движения, направленную в сторону выстрела, за ось y — вертикаль, направленную вниз; далее обозначим через φ угол *наклона траектории*, т. е. угол между единичным вектором $\boldsymbol{t}$ (касательной к траектории в направлении движения) и осью x. Если предположим,

[1]) К этому допущению $f(0)\geqslant 0$ мы обращаемся лишь для того, чтобы не исключать биномиальные законы сопротивления типа $a+bv^n$, с постоянными положительными a, b, n.

принимая во внимание обычные условия стрельбы, что начальная скорость v_0 направлена вверх от горизонтальной плоскости, то начальное значение угла наклона φ будет определено заданием некоторого отрицательного угла $-\alpha$, где $0<\alpha<\pi/2$.

Уравнение (28) при проектировании на введенные таким образом оси x и y даст два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}&=-f(v)\cos\varphi, \\ \ddot{y}&=g-f(v)\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{28'}$$

которые на основании соотношений

$$\dot{x}=v\cos\varphi, \quad \dot{y}=v\sin\varphi \tag{29}$$

можно написать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v}\cos\varphi-v\dot{\varphi}\sin\varphi&=-f(v)\cos\varphi, \\ \dot{v}\sin\varphi+v\dot{\varphi}\cos\varphi&=g-f(v)\sin\varphi. \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно $\dot{v}$ и $v\dot{\varphi}$, найдем

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}&=g\sin\varphi-f(v), \\ v\dot{\varphi}&=g\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{28''}$$

При изучении основной задачи пользуются еще одним уравнением, которое выводится из предыдущих (28''). Заметим, что в начальный момент имеем $v\neq 0$, $\varphi\neq\pm\pi/2$ и, следовательно, во втором из уравнений системы (28'') производная $\dot{\varphi}$ конечна и не равна 0.

Пока сохраняют силу эти неравенства (а мы увидим, что это действительно будет иметь место в течение всего движения), первое из уравнений (28'') можно почленно разделить на второе, и мы получим уравнение

$$\frac{dv}{d\varphi}=\frac{v}{\cos\varphi}\left(\sin\varphi-\frac{f(v)}{g}\right), \tag{30}$$

которое можно написать в виде

$$\frac{d}{d\varphi}(v\cos\varphi)=-\frac{v}{g}f(v). \tag{30'}$$

15. Уравнение годографа. Уравнение (30) или (30'), определяющее величину скорости v снаряда в функции от наклона, называется в баллистике *уравнением годографа* [1]).

Важность этого уравнения в баллистических исследованиях вытекает из того, что, каков бы ни был количественный закон $f(v)$ сопротивления воздуха, достаточно, как увидим в п. 19, проинтегрировать это уравнение, чтобы свести задачу о движении снаряда к квадратурам.

[1]) Достаточно принять v и φ за радиус-вектор и угол полярных координат, чтобы видеть, что уравнение (30) для снаряда определяет траекторию движения по годографу (см. т. I, гл. VI, упражнение 26).

К сожалению, уравнение годографа удается проинтегрировать в конечном виде только при весьма частных предположениях относительно вида функции $f(v)$. Классическими являются случаи интегрируемости, указанные Даламбером в 1744 г.[1]),

$$f=a+b\ln v, \quad f=a+bv^n \text{ (a и b постоянные)};$$

второе из этих соотношений, при $a=0$, $n=2$, содержит случай гидравлического сопротивления (гл. I, п. 22). Другие виды функции, для которых уравнение (30) оказывается интегрируемым, были указаны Сиаччи[2]). Недавно Драх (Drach) перечислил все случаи интегрируемости уравнения годографа[3]), а Данжуа (Denjoy) подверг эти случаи остроумному анализу, чтобы видеть, какие из них, хотя бы качественно, представляют движение в согласии с опытными данными[4]). Однако ни один из рассмотренных им случаев не способен представить закон сопротивления воздуха в достаточно широком интервале значений v с удовлетворительным приближением.

16. Замечание о баллистических таблицах. Из сказанного в предыдущем пункте следует, что пока сопротивление остается неопределенным или определено эмпирическим путем (диаграмма Сиаччи), уравнение годографа можно использовать при числовых подсчетах только для приближенного интегрирования.

Метод, теперь уже ставший классическим, был указан Сиаччи[5]). Он основывается: 1) на введении так называемой *псевдоскорости*

$$u=\frac{v\cos\varphi}{\cos\alpha},$$

отличающейся от горизонтальной составляющей скорости v снаряда только постоянным множителем (зависящим от начального наклона); 2) на том, что уравнение (30′) годографа становится интегрируемым в квадратурах, если в качестве аргумента подставить вместо v псевдоскорость u и затем принять, что

$$f(v)=\beta f(u)\frac{\cos^2\alpha}{\cos\theta},$$

где β считается постоянной. Хотя β (определяющаяся в действительности предшествующей подстановкой) изменяется при движении снаряда, однако мы увидим, что последнее предположение допустимо для достаточно коротких дуг траектории.

[1]) Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides (Paris); п. 356, стр. 380—383 нового издания, 1770 г.

[2]) Alcune nuove forme di resistenza, che riducono il problema balistico alle quadrature. *Riv. di Art. e Genio,* 1901, т. III, стр. 5—25; т. IV, стр. 5—22, 165—189.

[3]) См. изложение исследований Данжуа в упоминавшемся уже трактате Шарбонньe, т. I, стр. 497—514.

[4]) Там же, стр. 514—519.

[5]) Сиаччи, цит. соч., ч. I, гл. IV.

Представляя себе траекторию разбитой на такие дуги и располагая на каждой дуге выбором постоянной β, мы можем принять во внимание также и изменение плотности воздуха с высотой.

Отправляясь от определенных начальных условий, можно строить интегралы так, чтобы положение и скорость были согласованы при переходе от одной частичной дуги (вдоль которой β рассматривается как постоянная) к следующей. Результаты численного подсчета собираются затем в таблицы, в которых табулируются четыре функции от псевдоскорости u [1]).

17. То обстоятельство, что в общем случае мы не умеем интегрировать в конечном виде уравнение годографа, естественно, приводит к аналогичной невозможности решения системы дифференциальных уравнений (28″) главной задачи. Поэтому за отсутствием (строгих) количественных результатов мы вынуждены удовлетвориться качественным изучением (но с полной математической строгостью) поведения любого интеграла этой системы.

Такое изучение предполагает, что интеграл, соответствующий заданным начальным условиям, существует и является вполне определенным, по крайней мере внутри известного множества значений независимой переменной и неизвестных функций. Известно, что для систем дифференциальных уравнений нормального типа теорема существования и единственности интеграла имеет место, вообще говоря, только внутри тех множеств значений независимого переменного и неизвестных функций, в которых правые части остаются правильными *) функциями.

Наша система (28″) после приведения к нормальной форме принимает следующий вид:

$$\dot{v} = g \sin\varphi - f(v), \quad \dot{\varphi} = \frac{g}{v} \cos\varphi.$$

Требование правильности будет удовлетворено при условии, что скорость остается отличной от нуля. Поэтому мы прежде всего должны убедиться, выполняется ли и в каких интервалах это ограничение. С этой целью мы не обратимся сразу к системе (28″), а начнем с уравнения годографа (30) и, качественно изучив предварительно какой-нибудь его интеграл, придем затем путем обычного исключения к выяснению поведения соответствующего интеграла системы (28″).

Чтобы ориентироваться в выборе интервала, внутри которого надлежит рассматривать независимое переменное φ уравнения (30),

---

[1]) Кроме трактата Сиаччи, см. работу Бианки, тоже упоминавшуюся на стр. 112, часть I, гл. VI.

*) Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений (1945), стр. 128, 129. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (1950), стр. 72 и сл. *(Прим. ред.)*

мы начнем с какого-нибудь вывода, имеющего предварительный наводящий характер, и подтвердим этот вывод строгим путем в последующих рассуждениях.

Допустим, как это оказывается возможным на основании предположения о правильности, что движение снаряда остается правильным в течение всего времени движения в том смысле, что траектория во всякой ее точке имеет конечную и отличную от нуля кривизну $1/r$ и что такой же (т. е. конечной и отличной от нуля) остается также и скорость v. В этом предположении рассмотрим натуральное уравнение, получающееся путем проектирования векторного уравнения (28) на главную нормаль траектории, т. е. уравнение

$$\frac{v^2}{r}=F_n, \tag{31}$$

где F_n означает центростремительную *существенно положительную* составляющую действующей силы. В нашем случае эта действующая сила состоит из силы тяжести и сопротивления воздуха, а так как эта последняя, как касательная, ничего не прибавляет к F_n, то мы видим, что во все время движения должна оставаться положительной составляющая веса по направлению главной нормали, направленной к центру кривизны. Иными словами, угол главной нормали к траектории, направленной к центру кривизны, с нисходящей вертикалью должен оставаться острым, т. е. траектория в любой своей точке вогнутостью должна быть обращена вниз, и угол наклона φ, начиная от начального значения $-\alpha > -\pi/2$, должен всегда возрастать, никогда, однако, не превосходя значения $\pi/2$.

18. Качественное поведение любого интеграла уравнения годографа. Рассмотрим интеграл $v(\varphi)$, определяемый единственным начальным условием, что $v=v_0$ при $\varphi=-\alpha>-\pi/2$, и, руководствуясь выводами предыдущего пункта, будем изменять наклон φ от $-\alpha$ до $\pi/2$. Так как во всем этом интервале, за исключением верхней границы, правая часть уравнения (30) остается правильной (для какого угодно конечного значения v), то таким же будет и интеграл $v(\varphi)$, лишь бы только было известно, что он остается конечным. Действительно, мы докажем даже несколько больше этого, а именно, что *во всем этом интервале функция $v(\varphi)$ остается всегда меньше некоторого конечного числа W и больше некоторого числа w, большего нуля* [1]).

Чтобы доказать первую часть, прежде всего заметим, что из уравнения (30) следует, что при изменении φ от $-\alpha$ до 0 производная $dv/d\varphi$ остается отрицательной, так что v, постоянно убывая, остается всегда меньше своего начального значения v_0. С другой

[1]) A. Signorini, Sulla velocità minima, *Rend. Acc. Lincei*, серия 5, т. **31** (1922), стр. 101—104.

стороны, для остальной части интервала, от 0 до $\pi/2$, из того же уравнения (30) следует, что при возрастании v, когда $dv/d\varphi > 0$, отношение $f(v)/g$ должно соответственно получиться меньше $\sin\varphi$ и, следовательно, меньше единицы, т. е.

$$f(v) - g < 0.$$

Отсюда на основании возрастания функции $f(v)$ и предположения $f(0) < g$ следует, что скорость v должна оставаться меньше единственного положительного корня v_1 (п. 13) уравнения (27)

$$f(v) - g = 0;$$

поэтому, если W есть большее из двух чисел v_0 и v_1, то во всем интервале от $\varphi = -\alpha$ до $\varphi = \pi/2$ мы будем иметь

$$v < W. \tag{32}$$

Чтобы доказать, что v в том же интервале допускает нижний предел, отличный от нуля, будем вести доказательство от противного, предположив, что такой нижний предел равен нулю. Представим себе, что независимое переменное φ возрастает от $-\alpha$ до $\pi/2$. Тогда или функция $v(\varphi)$ не обращается в нуль при значениях $\varphi < \pi/2$, или же встретится первое значение φ_1 угла наклона, при котором $v(\varphi_1) = 0$; в этом втором случае будем иметь $v(\varphi) > 0$ при всяком $\varphi < \varphi_1$. Во всяком случае, если бы нуль был нижним пределом функции $v(\varphi)$, то существовали бы значения $\bar{\varphi}$ переменной φ, для которых функция $\bar{v} = v(\bar{\varphi})$ сделалась бы сколь угодно малой и, в частности, меньше положительного числа w, определяемого равенством

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{v_0 \cos\alpha} + \frac{f(W)}{gW}(1 + \operatorname{tg}\alpha). \tag{33}$$

В интервале от $-\alpha$ до $\bar{\varphi}$ функция $v(\varphi)$ не обращается в нуль, и поэтому равенство (30′) можно написать в виде

$$-\frac{g}{v^2}\frac{d(v\cos\varphi)}{d\varphi} = \frac{f(v)}{v},$$

откуда на основании того, что функция $f(v)/v$ является возрастающей, и на основании равенства (32) имеем

$$-\frac{g}{v^2}\frac{d(v\cos\varphi)}{d\varphi} \leqslant \frac{f(W)}{W};$$

разделив обе части на $\cos^2\varphi$, получим

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{v\cos\varphi}\right) \leqslant \frac{f(W)}{gW}\frac{d}{d\varphi}\operatorname{tg}\varphi.$$

Интегрируя теперь от $\varphi = -\alpha$ до $\varphi = \bar{\varphi}$ и умножая на положительное число $\cos\bar{\varphi}$, получим при $\bar{v} = v(\bar{\varphi})$ неравенство

$$\frac{1}{\bar{v}} \leqslant \frac{\cos\bar{\varphi}}{v_0\cos\alpha} + \frac{f(W)}{gW}(\sin\bar{\varphi} + \operatorname{tg}\alpha\cos\bar{\varphi}).$$

Так как $v_0 \cos\alpha$, $f(W)/W$, $\operatorname{tg}\alpha$ суть какие-то положительные числа, то правая часть увеличится, если $\sin\overline{\varphi}$ и $\cos\overline{\varphi}$ заменить единицей. Сравнивая с равенством (33), заключаем, что

$$\bar{v} > w$$

вопреки предположению, что

$$\bar{v} < w.$$

Таким образом, не только исключена возможность, что v исчезнет между $-\alpha$ и $\pi/2$, но также еще и доказано, что в этом интервале (за исключением лишь $\varphi = \pi/2$) она остается бо́льшей числа

$$w > 0.$$

19. Определение и качественное изучение общего интеграла основной задачи. На основании результатов предыдущего пункта можно строго установить, что, начиная от заданных начальных условий, функции $\varphi(t)$, $v(t)$, составляющие общее решение уравнений (28″) основной задачи, остаются конечными и непрерывными, вместе с их производными, при изменении времени t от начального своего значения до бесконечности. Этот вывод о характере правильности общего решения (28″) из аналогичного свойства уравнения (30) годографа непосредственно следует из того обстоятельства, уже указанного в п. 15, что если известен какой-нибудь интеграл уравнения (30), то соответствующий интеграл уравнений (28″) получится посредством только одной квадратуры (с последующими возможными исключениями).

Начнем со второго уравнения системы (28″) и будем рассматривать в нем v как такую функцию от φ, которая определяется из уравнения (30) на основании обычного начального условия $v = v_0$ при $\varphi = -\alpha$. Так как $\cos\varphi$ между $-\alpha$ и $\pi/2$ уже не обращается в нуль, то это уравнение в таком интервале эквивалентно уравнению

$$dt = \frac{v\,d\varphi}{g\cos\varphi}; \tag{34}$$

поскольку в том же интервале v остается больше $w > 0$ (предыдущий пункт), это уравнение определяет t как функцию $f(\varphi)$, всегда возрастающую от $\varphi = -\alpha$ до $\varphi = \pi/2$. Более того, интегрируя от начального значения $-\alpha$ до любого φ, мы получим

$$t - t_0 = \int\limits_{-\alpha}^{\varphi} \frac{v\,d\varphi}{g\cos\varphi}.$$

Так как всегда имеем $v > w > 0$ и $1/\cos\varphi$ при $\varphi \to \pi/2$ становится бесконечностью первого порядка, то мы видим, что $t(\varphi)$ стремится к бесконечности, всегда возрастая, когда φ стремится к $\pi/2$. Отсюда следует, что, обратно, φ есть вполне определенная монотонная функция от t, которая изменяется, всегда возрастая, от $-\alpha$ до $\pi/2$ при возрастании t от своего начального значения t_0 до бесконечности. Достаточно подставить эту функцию $\varphi(t)$ в найденный интеграл $v(\varphi)$ уравнения (30), чтобы получить функцию $v(t)$, производная от которой $\dot{v} = dv/d\varphi\ \dot{\varphi}$ удовлетворит на основании того же уравнения (30) первому из уравнений системы (28'').

Наконец, обе функции: $\varphi(t)$ и $v(t)$, определенные таким образом, удовлетворяют системе (28''); при $t = t_0$ они принимают заданные значения $\varphi = -\alpha$, $v = v_0$ и обе остаются правильными при возрастании t от t_0 до бесконечности. Так как, далее, во всем этом интервале существует условие $v > w > 0$, обеспечивающее возможность применения теоремы единственности (помимо теоремы существования интеграла для системы (28'') (п. 17), то таким образом движение снаряда охарактеризовано однозначно. В частности, мы получили при этом следующие результаты: 1) касательная к траектории (ориентированная в сторону движения) вращается всегда в одном и том же направлении, стремясь стать в вертикальное положение при $t \to \infty$; 2) скорость допускает отличный от нуля минимум.

Из последнего вывода следует, что снаряд движется по траектории постоянно в одну и ту же сторону, поэтому, если мы обозначим через s криволинейную абсциссу снаряда, отсчитываемую в сторону движения от произвольного начала, так что будем иметь $v = ds/dt$, то в *течение всего времени движения* можно принять за независимую переменную дугу s и придать равенству (34) вид

$$v^2 \frac{d\varphi}{ds} = g \cos\varphi. \qquad (34')$$

Вспомним теперь, что для любой плоской кривой $d\varphi/ds$ представляет кривизну с соответствующим знаком, т. е. $1/r$ или $-1/r$ (где r — радиус кривизны), смотря по тому, составляет или нет касательная, направленная в сторону возрастания s, и нормаль, направленная к центру кривизны, систему осей, одинаково ориентированную с осями координат (т. I, гл. XIV, п. 50). Так как в нашем случае величина $d\varphi/ds$ на основании соотношения (34') при каком угодно конечном значении t будет положительной, то можно заключить, что угол между нормалью, направленной к центру кривизны траектории снаряда, и вертикалью y, направленной вниз, в любой момент будет равен углу наклона φ, который постоянно будет острым, так что траектория в любой своей точке вогнутостью обращена вниз. Кроме того, из равенства (34') на основании неравенства $v < W$ (п. 18) получим, что кривизна в точке, соответствующей любому наклону φ, будет наверное больше $g \cos\varphi / W^2$.

Таким образом, выводы из естественного уравнения движения (31), п. 17, допускавшие a priori, что в течение всего движения скорость снаряда и кривизна траектории остаются конечными и отличными от нуля, оказываются строго обоснованными.

Здесь уместно сделать еще следующее замечание: если функции $\varphi(t)$, $v(t)$ известны, то *кинематические уравнения* движения, т. е. соответствующие выражения для x и y как функции от t, можно получить двумя квадратурами на основании хорошо известных соотношений (29). Если же, наоборот, предполагается известным только интеграл $v(\varphi)$ уравнения годографа и требуется получить выражения для x и y в функциях от угла наклона φ, то удобно воспользоваться двумя уравнениями, которые получатся после исключения dt из уравнений (29) и второго из уравнений системы (28″), т. е. уравнениями

$$dx = \frac{v^2}{g}\,d\varphi, \quad dy = \frac{v^2 \operatorname{tg}\varphi}{g}\,d\varphi. \tag{35}$$

Этими уравнениями мы скоро воспользуемся.

20. Влияние сопротивления воздуха на движение снаряда. Если мы примем во внимание полученные таким образом свойства движения снаряда, то из уравнений движения (из уравнений (30′), (29) и из теоремы живых сил) можно тотчас же вывести некоторые следствия, которые выявляют глубокие изменения в этом движении, вызываемые сопротивлением воздуха, по сравнению с движением, которое имело бы место в пустоте (т. I, гл. II, § 6).

Прежде всего из уравнения (30′) и из того обстоятельства, что v остается всегда больше $w > 0$, мы видим, что *горизонтальная составляющая $v \cos\varphi$ скорости снаряда есть функция всегда убывающая* (между тем как в пустоте, как мы уже знаем, она оставалась бы постоянной).

Далее, так как во время движения наклон φ, начиная от значения $-\alpha$, стремится, постоянно возрастая, к $\pi/2$, то на траектории в некоторый определенный момент времени встретится точка V, *в которой касательная горизонтальна* ($\varphi = 0$). Эта точка или *вершина* делит траекторию на две дуги. Дугу OV мы будем называть восходящей, другую дугу — нисходящей.

Докажем теперь, что *если точки P_1, P_2 траектории находятся на одинаковой высоте и лежат по разные стороны от вершины V, то*:

а) *наклон (отрицательный) φ_1 в точке P_1 по абсолютной величине меньше наклона φ_2* в P_2 (тогда как в пустоте было бы $|\varphi_1| = \varphi_2$);

б) *расстояние от вершины V (как по хорде, так и по траектории) до P_1 больше, чем до P_2* (в пустоте P_1 и P_2 были бы на одинаковом расстоянии от V);

в) *вертикальная составляющая скорости (отрицательная)* $\dot{y}_1 = v_1 \sin\varphi_1$ в P_1 *по абсолютной величине больше аналогичной составляющей* $\dot{y}_2 = v_2 \sin\varphi_2$ *в* P_2 (в пустоте было бы $|\dot{y}| = \dot{y}_2$);

г) *модуль скорости* v_1 *в* P_1 *больше модуля скорости* v_2 в P_2 (в пустоте было бы $v_1 = v_2$).

Для доказательства утверждения а) возьмем второе уравнение системы (35), которое можно написать в виде

$$\operatorname{tg}\varphi d \operatorname{tg}\varphi = \frac{g dy}{v^2 \cos^2\varphi}.$$

Если обозначим через $\bar{y}$ ординату вершины V, через y_1 — ординату точек P_1 и P_2, то, интегрируя от V до P_1 и от V до P_2, получим

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi_1 = g\int_{\bar{y}}^{y_1} \frac{dy}{v^2\cos^2\varphi}, \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi_2 = g\int_{\bar{y}}^{y_1} \frac{dy}{v^2\cos^2\varphi}.$$

Так как интегралы берутся между одинаковыми пределами, а функция $v\cos\varphi$ является убывающей, то подинтегральная функция в первом интеграле всюду меньше, чем во втором, и мы получаем

$$\operatorname{tg}^2\varphi_1 < \operatorname{tg}^2\varphi_2$$

и, следовательно,

$$|\varphi_1| < \varphi_2.$$

Далее, чтобы доказать, что и для хорд справедливо неравенство $P_1V > VP_2$, заметим, что так как точки P_1 и P_2 имеют равные ординаты, то достаточно показать, что если x_1, x_2 и $\bar{x}$ суть соответственно абсциссы точек P_1, P_2, V, то будем иметь

$$\bar{x} - x_1 > x_2 - \bar{x}.$$

С этой целью заметим, что так как

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg}\varphi},$$

то имеем

$$\bar{x} - x_1 = \int_{y_1}^{\bar{y}} \frac{dy}{\operatorname{tg}|\varphi|}, \quad x_2 - \bar{x} = \int_{\bar{y}}^{y_1} \frac{dy}{\operatorname{tg}\varphi},$$

где в первом интеграле $|\varphi|$ отсчитывается вдоль восходящей дуги P_1V, во втором φ — вдоль нисходящей дуги VP_2. Так как элементы обоих интегралов все положительны, и в силу неравенства $|\varphi_1| < \varphi_2$ всякий элемент первого больше того элемента второго, который соответствует той же самой высоте y, то действительно имеем

$$\bar{x} - x_1 > x_2 - \bar{x}.$$

Подобным же образом, если вместо хорд будем рассматривать дуги траектории $\overset{\frown}{VP_1}$, $\overset{\frown}{VP_2}$, определяемые соответственно равенствами

$$\overset{\frown}{VP_1}=\int\limits_{\bar{y}}^{y_1}\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}\,dy,\quad \overset{\frown}{VP_2}=\int\limits_{\bar{y}}^{y_2}\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}\,dy,$$

то непосредственно увидим, что $\overset{\frown}{VP_1}>\overset{\frown}{VP_2}$, если примем во внимание, что в точках с равной высотой, взятых одна на восходящей дуге, а другая на нисходящей, в силу теоремы а) первый радикал больше второго.

Чтобы доказать утверждение в), возьмем снова второе из уравнений (28'), умножим обе части на dy и примем во внимание, что $\dot{y}=v\sin\varphi$ и что $d(\dot{y}^2)=2\ddot{y}\,dy$. В силу этого получим

$$d(\dot{y}^2)=2g\,dy-2f(v)\,v\sin^2\varphi\,dt.$$

Интегрируя между двумя моментами t_1 и t_2, соответствующими прохождению снаряда через точки с равной высотой P_1, P_2, мы получим нуль от первого члена правой части и существенно отрицательный интеграл от второго, так что будем иметь

$$\dot{y}_2^2-\dot{y}_1^2<0.$$

Отсюда и из замечания, сделанного вначале о том, что горизонтальная составляющая скорости всегда убывает, непосредственно следует утверждение г), т. е. неравенство $v_1>v_2$. Это последнее можно получить и прямо из теоремы живых сил, если заметить, что при движении от точки P_1 до точки P_2, находящейся на той же высоте, работа силы тяжести равна нулю, тогда как работа пассивного сопротивления на основании свойства самой силы отрицательна: поэтому отрицательным будет также и изменение живой силы, т. е.

$$\frac{1}{2}(v_2^2-v_1^2).$$

21. Минимальная скорость и предельная скорость. Интересно, далее, уточнить, как изменяется вдоль траектории под действием сопротивления $f(v)$ скорость снаряда; необходимо, однако, заметить, что результаты, к которым мы придем, в отличие от результатов двух предыдущих пунктов (которые сохраняют свою силу при всяком законе сопротивления общего типа (26)) основаны на том, что сопротивление не зависит от высоты снаряда.

Возьмем снова уравнение годографа (30) и напишем его в форме

$$\frac{dv}{d\varphi}=(g\sin\varphi-f(v))\frac{v}{g\cos\varphi}. \tag{30''}$$

Как уже было отмечено в п. 18, правая часть при $-\alpha \leqslant \varphi \leqslant 0$ остается отрицательной, так что вдоль восходящей дуги скорость всегда убывает. В вершине ($\varphi = 0$) скорость приобретает некоторое значение v^*, наверное положительное (п. 18), тогда как ее производная на основании уравнения (30″) принимает отрицательное значение (не равное нулю)

$$-\frac{v^* f(v^*)}{g}.$$

Поэтому производная $\frac{dv}{d\varphi}$ в вершине будет все еще отрицательной и такой же будет оставаться и за вершиной, по крайней мере на некотором участке нисходящей дуги, т. е. именно до тех пор, пока не обратится в нуль; если случится, что производная $\frac{dv}{d\varphi}$ при некотором значении $\bar\varphi < \frac{\pi}{2}$ будет равна нулю, то скорость v, остающаяся во всем интервале от $-\alpha$ до $\pi/2$ большей $w > 0$ (п. 18), при $\varphi = \bar\varphi$ должна будет принять некоторое значение $\bar v$ *необходимо положительное,* для которого мы будем иметь

$$g \sin \bar\varphi - f(\bar v) = 0. \tag{36}$$

Более того, всякое значение $\bar v$ скорости v, при котором $\frac{dv}{d\varphi}$ обращается в нуль, может быть только *минимумом,* так как если в выражении производной (30″) положим $\varphi = \bar\varphi$, $v = \bar v$, $\frac{dv}{d\varphi} = 0$ и примем во внимание соотношение (36), то найдем

$$\left(\frac{d^2v}{d\varphi^2}\right)_{\varphi = \bar\varphi} > 0.$$

На основании непрерывности v легко убедиться, что может осуществиться только одна из следующих двух возможностей: 1) скорость v, начиная от своего начального значения v_0, убывает до минимума $\bar v$, которого она достигает при наклоне $\bar\varphi > 0$, т. е. в некоторой точке нисходящей дуги, после чего при $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, т. е. при бесконечном возрастании времени, она будет постоянно возрастать; 2) скорость, начиная от своего начального значения, постоянно убывает.

Покажем, что при указанных предположениях для сопротивления $f(v)$ вторая возможность должна быть исключена[1]).

Для этого полезно прежде всего изучить поведение скорости при стремлении φ к $\pi/2$. Так как в силу только что сказанного

---

[1]) Siacci, Sulla velocità minima, *Riv. di Art. e Genio,* XVIII ежегодник, т. I, II. См. также Signorini, сочинение, упоминавшееся на стр. 102.

скорость v или всегда убывает, или в конце концов становится всегда возрастающей, а, с другой стороны, при изменении φ от $-\alpha$ до $\pi/2$ остается всегда заключенной между w и W (п. 18), то она во всяком случае при $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ должна стремиться к такой *предельной скорости* v_l, чтобы

$$w \leqslant v_l \leqslant W.$$

Теперь мы непосредственно устанавливаем, что эта предельная скорость v_l является как раз единственным конечным и положительным корнем v_1 уравнения (27)

$$f(v) - g = 0.$$

Действительно, если бы было

$$f(v_l) - g \neq 0,$$

то производная $dv/d\varphi$, как это следует из уравнения (30″), обращалась бы при $\varphi = \pi/2$ в бесконечность первого порядка, что противоречит уже подтвержденному выводу, что предельная скорость является конечной (не большей W).

Второй из двух указанных выше случаев, допущенный только как возможный a priori (случай постоянно убывающей скорости v) при всяком наклоне φ, заключенном между $-\alpha$ и $\pi/2$, приводил бы к неравенству

$$v > v_1. \tag{37}$$

Легко видеть, однако, что это неравенство не может сохранить своей силы во всем интервале от $\varphi = -\alpha$ до $\varphi = \pi/2$. Действительно, поступая так, как в п. 18, напишем уравнение годографа в виде

$$-\frac{g}{v^2}\frac{d(v\cos\varphi)}{d\varphi} = \frac{f(v)}{v}.$$

Принимая во внимание, что отношение $\frac{f(v)}{v}$ возрастает с возрастанием скорости и $v > v_1$, найдем

$$-\frac{g}{v^2}\frac{d(v\cos\varphi)}{d\varphi} = \frac{f(v)}{v} > \frac{f(v_1)}{v_1}.$$

Заменив теперь $f(v_1)$ через g, получим

$$-\frac{1}{v^2}\frac{d(v\cos\varphi)}{d\varphi} > \frac{1}{v_1}$$

или же, разделив обе части на $\cos^2\varphi$,

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{v\cos\varphi}\right) > \frac{1}{v_1}\frac{d}{d\varphi}\operatorname{tg}\varphi.$$

Если теперь проинтегрируем это неравенство от $-\alpha$ до любого $\varphi < \pi/2$ и умножим обе части на положительное число $\cos\varphi$, то получим

$$\frac{1}{v} > \frac{\cos\varphi}{v_0 \cos\alpha} + \frac{1}{v_1}\frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Достаточно взять φ в интервале $\pi/2 - 2\alpha < \varphi < \pi/2$, для того чтобы дробь $\sin(\varphi+\alpha)/\cos\alpha$ была больше единицы, а следовательно, чтобы существовало более сильное неравенство

$$\frac{1}{v} > \frac{1}{v_1},$$

что явно противоречит (37).

Поэтому можно заключить, что *скорость снаряда, достигнув своего (положительного) минимума за вершиной траектории, начинает снова возрастать и стремится к конечной предельной скорости,* определяемой уравнением (27) (тогда как в пустоте она достигла бы минимума в вершине и затем, возрастая, стремилась бы к бесконечности).

22. Вертикальная асимптота траектории. Выводы предыдущего пункта вместе с выводами п. 18 позволяют доказать, что *траектория снаряда имеет вертикальную асимптоту.*

С этой целью снова возьмем первое из уравнений (35), п. 19

$$dx = \frac{v^2}{g}\,d\varphi;$$

так как величина v остается конечной, то функция v^2/g интегрируема от $-\alpha$ до $\varphi = \pi/2$, так что x при $\varphi \to \pi/2$ стремится к конечному и определенному пределу x_1. С другой стороны, из второго из упомянутых уравнений (35), т. е. из уравнения

$$dy = \frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi,$$

следует

$$\frac{dy}{d\varphi} > \frac{\bar{v}^2}{g}\operatorname{tg}\varphi,$$

так как, начиная от $\varphi = \bar{\varphi}$, имеем $v > \bar{v}$. Но интеграл от функции в правой части стремится к бесконечности, если φ стремится к $\pi/2$; то же должно произойти и с интегралом от $dy/d\varphi$, т. е. с ординатой y.

Поэтому заключаем, что прямая $x = x_1$ действительно представляет асимптоту для траектории (тогда как в пустоте при движении точки вдоль траектории ее абсцисса x стремилась бы к бесконечности вместе с y).

23. Замечания о вторичных задачах внешней баллистики. Как уже было сказано, качественные результаты, установленные в пп. 18—20 для основной задачи внешней баллистики в предположении, что сопротивление f зависит только от скорости v снаряда, остаются в силе также и при законах сопротивления, в которых вместе с плотностью воздуха входит высота снаряда согласно общей формуле (26). Даже и в этом случае, так как скорость v не опускается ниже некоторого положительного минимума, дифференциальное уравнение (28) основной задачи может быть написано в форме

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}-\frac{1}{v}f(y,\ v)\boldsymbol{v}. \tag{28a}$$

Но этой основной задачей не исчерпываются вопросы, которые выдвигает перед исследователями современная баллистика. Помимо веса снаряда и сопротивления воздуха, которые учитываются в этой задаче, иногда приходится принимать во внимание и другие физические обстоятельства (хотя бы для того, чтобы убедиться, в каких пределах приближения можно от них отвлечься), так как в действительности они все же влияют на движение снаряда. Эти последние факторы, хотя и являются ощутительными, все же оказываются менее важными в сравнении с основными, т. е. с силой тяжести и сопротивлением воздуха, и называются *вторичными* факторами, а вторичными задачами называются те задачи, которые возникают при учете и механической схематизации этих вторичных воздействий.

Общий прием, которым пользуются при количественной оценке влияния вторичных факторов, по существу тот же самый, что и классический метод небесной механики, называемый *методом возмущений* (§ 5).

Чтобы дать пример этого метода в интересующей нас баллистической задаче, представим отнесенную к единице массы результирующую вторичных факторов в виде некоторого вектора $\boldsymbol{\Psi}$, который следует принять за известную функцию положения P снаряда и его скорости $\boldsymbol{v}$. В качестве основного положения, вытекающего из природы задачи, допустим, что модуль Ψ вектора $\boldsymbol{\Psi}$ настолько мал по сравнению с силами главной задачи и, в частности, по сравнению с g, что его можно рассматривать как величину первого порядка малости по сравнению с ними. Точнее, мы будем считать, следуя алгоритму бесконечно малых, как вектор $\boldsymbol{\Psi}$, так и его частные производные по различным аргументам, от которых он зависит, бесконечно малыми первого порядка.

Дифференциальное уравнение вторичной задачи

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}-\frac{1}{v}f(y,\ v)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Psi}(P,\ \boldsymbol{v}) \tag{38}$$

определяет для снаряда движение, которое в противоположность движению, изученному в основной задаче, называется *возмущенным*, причем вторичное действие $\mathbf{\Psi}$ называется *возмущающей силой*. Необходимо теперь же предупредить, что, как это подсказывается и самой задачей, всякое частное возмущенное движение, определяемое заданными начальными условиями, сравнивается с невозмущенным движением, соответствующим тем же начальным условиям.

Предположим теперь, что общее решение основной задачи, т. е. решение уравнения (28″), предварительно определено, например взято из таблиц (п. 16); обозначая через $P^*(t)$, $\boldsymbol{v}^*(t) = \dot{P}^*$, $a^*(t) = \dot{v}^*$ геометрические или векторные функции, представляющие это решение, примем, что искомое решение уравнения (38) имеет вид

$$P = P^* + \delta P, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^* + \delta\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^* + \delta\boldsymbol{a}. \tag{39}$$

В соответствии со сделанным предположением относительно модуля возмущающей силы $\mathbf{\Psi}$ и относительно ее производных, предположим, что модули δP, $\delta\boldsymbol{v}$, $\delta\boldsymbol{a}$ (возмущения величин P, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{a}$) можно рассматривать как величины первого порядка малости. Важно отметить, что в силу только что установленного соглашения относительно начальных условий возмущенного движения и соответствующего невозмущенного движения, возмущения δP, $\delta\boldsymbol{v}$, $\delta\boldsymbol{a}$ в начальный момент можно будет положить равными нулю.

Подставим выражения (39) в (38) и примем во внимание, что на основании уравнения (28a) имеем

$$\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{g} - \frac{1}{v^*} f^* \boldsymbol{v}^*,$$

где через f^* временно обозначен результат подстановки v^* и y^* вместо v и y в f.

Таким образом, с точностью по крайней мере до членов второго порядка, получим уравнение

$$\delta\boldsymbol{a} = -\frac{1}{v^*} f^* \delta\boldsymbol{v} + \left\{\frac{\partial}{\partial v^*}\left(\frac{1}{v^*} f^*\right)\delta v + \frac{1}{v^*}\frac{\partial f^*}{\partial y}\delta y\right\}\boldsymbol{v}^* + \mathbf{\Psi}(P^*, v^*). \tag{40}$$

Но из равенства $v^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$, после дифференцирования и разрешения относительно δv, получим

$$\delta v = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{v}}{v}.$$

Полагая

$$\delta y = \eta, \quad \delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nu}, \quad \delta\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{\nu}}$$

и обозначая через ν_1, ν_2, ν_3 составляющие вектора $\boldsymbol{\nu}$ по трем осям x, y, z, найдем для возмущения η функции y соотношение

$$\dot{\eta} = \nu_2. \tag{41}$$

С другой стороны, уравнение (40), если для простоты отбросить звездочки, можно переписать в виде

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = -h\boldsymbol{\nu} + \{h_1\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu} + h_2\eta\}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Phi}, \tag{42}$$

где положено

$$\left.\begin{aligned} h=\frac{1}{v}f,\quad h_1=\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v}f\right),\quad h_2=\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial y},\\ \boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Psi}(P,\ \boldsymbol{v}),\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

причем предполагается, что в h, h_1, h_2 и $\boldsymbol{\Phi}$ вместо $\boldsymbol{v}$ и координат точки P подставлены их выражения в функции времени, которые получены при предварительном интегрировании основной задачи.

Следовательно, скаляры h, h_1, h_2 и вектор $\boldsymbol{\Phi}$ представляют собой известные функции времени. Уравнения (41) и (42), из которых второе надо спроектировать на три оси, дают четыре линейных неоднородных уравнения с четырьмя неизвестными функциями η, ν_1, ν_2, ν_3 вторичной задачи (в первом приближении). Коэффициенты этих уравнений представляют собой известные функции t.

Заметим при этом, что если область, в которой мы рассматриваем влияние возмущающей силы, по высоте достаточно ограничена, для того чтобы можно было пренебречь изменением плотности воздуха с высотой, то сопротивление f можно рассматривать не зависящим от y, так что из третьего из уравнений (43) получим $h_2=0$. В этом случае равенство (42) не будет содержать неизвестную η; в него будет входить только $\boldsymbol{\nu}$, и достаточно будет проинтегрировать три линейных дифференциальных уравнения с тремя неизвестными функциями ν_1, ν_2, ν_3, к которым оно приводит, чтобы затем иметь возможность определить посредством квадратур также и $\eta=\delta y$ и, если угодно, δx и δz, т. е. по существу вариацию δP положения снаряда.

Во всяком случае, как это всегда имеет место в случае линейной неоднородной дифференциальной системы, интегрирование уравнений (41) и (42) сводится только к квадратурам всякий раз, когда удается каким-либо способом определить общий интеграл соответствующей однородной системы. В настоящем случае член $\boldsymbol{\Phi}$ уравнения (42), делающий уравнение неоднородным, объединяет в себе все, что относится к возмущающей силе. С другой стороны, однородная система, зависящая исключительно от уравнения (28″) основной задачи, дает в силу этого последнего уравнения так называемые *уравнения в вариациях*, которыми мы будем заниматься в общем случае в § 5 гл. VI. Мы увидим тогда, что если известен общий интеграл какой-нибудь дифференциальной системы, то из него можно получить посредством одного только дифференцирования общий интеграл соответствующих уравнений в вариациях. Применяя к нашему случаю это замечание и вспоминая сказанное ранее относительно линейных неоднородных систем, можно утверждать, что, по крайней мере теоретически, знание общего интеграла основной задачи позволяет разрешить (в первом приближении) путем дифференцирования и последующих квадратур также и вторичные задачи.

Относительно природы самой основной задачи здесь нужно сделать одно существенное замечание. Вспомним, что если мы исключим частные законы сопротивления, плохо соответствующие действительности, то не сможем найти интегралы основной задачи точно, а определим их только приближенно, выводя из баллистических таблиц. Если некоторая функция определена посредством графика, вычерченного непрерывно механическими средствами или полученного путем графической интерполяции из какого-нибудь разрывного ряда точек, заданного в виде числовых таблиц, то интегрирование можно будет выполнить при помощи подходящих способов суммирования, с приближением, сравнимым с тем, которое имело место при построении графика. Наоборот, операция дифференцирования, поскольку требуется, чтобы от точки к точке оценивалось направление касательной, порождает неуверенность в том, что мы не придем таким путем к значительно бо́льшим ошибкам. Поэтому в баллистическом случае нельзя прийти к приемлемым результатам, выводя общий интеграл уравнений (41) и (42) из интеграла основной задачи через интегралы соответствующих однородных уравнений (в вариациях). В этом случае лучше прямо получить последний интеграл, применяя к однородным уравнениям те же самые способы табличных и графических приближений, которые служат для решения основной задачи.

Мы не будем заниматься длинными рассуждениями о действительном применении этих критериев и ограничимся перечислением наиболее важных вторичных задач, встречающихся в баллистике. Эти задачи можно разделить на три типа в соответствии с тремя следующими возмущающими действиями:

1) *Ветер*, для динамического истолкования которого как определенной силы $\Psi(P, \boldsymbol{v})$ еще не найдено окончательной механической схемы, так как различные эмпирические формулы, предложенные до сих пор, представляют собой предмет постоянного спора между исследователями в области баллистики.

2) *Гравитационное поле*. В основной задаче поле силы рассматривается однородным, и в векторе $\boldsymbol{g}$ объединяются и притяжение к Земле, и центробежная сила (т. I, гл. XVI, § 7). В действительности же, в силу ли формы Земли или в силу неоднородного распределения ее масс необходимо присоединить к $\boldsymbol{g}$ поправочный член, представляющий собой производную от некоторого потенциала U_1, при вычислении которого можно ограничиться членами второго порядка малости в соответствии с тем, что при

постановке вторичной задачи ограничиваются малыми первого порядка. В этом случае мы имеем (консервативную) возмущающую силу Ψ, зависящую исключительно от P через посредство потенциала U_1.

3) *Вращение Земли*, которое учитывается введением в правую часть уравнения (38) в виде возмущающей силы Ψ сложной центробежной силы, отнесенной к единице массы,

$$-2\omega \times v,$$

где ω означает угловую скорость вращения Земли. Естественно, что в этом случае в равенстве (42) вектору $\Phi(t)$ надо приписать значение, получающееся из указанной сложной центробежной силы, если в выражении этой последней за вектор v принять скорость снаряда, которую он имел бы в невозмущенном движении (интеграл основной задачи).

Вторичными задачами, которые возникают из этого типа возмущений, мы займемся в § 5.

§ 4. Влияние вращения Земли на движение тяжелого тела в пустоте

24. В предыдущем параграфе (так же как и при изучении движения тяжелого тела, рассматривавшегося с кинематической точки зрения в § 6 гл. II т. I) совершенно не принималось во внимание движение Земли, и основное уравнение динамики относилось к осям, связанным с Землей. Постановка задачи, таким образом, была приближенная: смысл и пределы законности такого приближения были выяснены в общих рассуждениях, развитых в § 7 гл. VII т. I.

Чтобы достигнуть дальнейшего приближения, необходимо снова рассмотреть задачу, учитывая при этом и вращение Земли. Как раз этим мы и намерены здесь заняться, рассматривая, кроме того, *тяжелое тело как движущееся в пустоте*, т. е. *оставляя в стороне сопротивление воздуха*.

В следующем параграфе мы увидим, в каких пределах оказывается допустимой такая приближенная постановка задачи.

Отвлечемся поэтому от сопротивления воздуха и рассмотрим движение относительно Земли тяжелого тела (точнее, материальной точки) P, брошенного как угодно и предоставленного самому себе вблизи от поверхности Земли. При принятом выше предположении сила, действующая на P, сводится к притяжению Земли, которое мы обозначим через G, предполагая, что за единицу массы принята масса точки P, и пользуясь обозначениями § 7 гл. XVI т. I. При этом, хотя это нам и не необходимо, полезно вспомнить, что притяжение G направлено всегда к центру O Земли и имеет (для точки P с единичной массой) величину $\frac{fM}{r^2}$, где M обозначает массу Земли, r — расстояние OP и f — известную постоянную притяжения. При этом предполагается, что Земля представляет собой сферу, состоящую из однородных концентрических слоев.

Относительно абсолютной (или связанной с неподвижными звездами) системы отсчета ускорение $\boldsymbol{a}$ точки P определяется векторным равенством

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{G}, \tag{44}$$

но здесь нас интересует *относительное движение* точки P по отношению к Земле, или, точнее, относительное ускорение ее $\boldsymbol{a}_r$. Так как оно связано с ускорением $\boldsymbol{a}$ известным соотношением Кориолиса (т. I, гл. IV, п. 3)

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_\tau + 2\boldsymbol{a}_c,$$

где $\boldsymbol{a}_\tau$ обозначает переносное ускорение и $\boldsymbol{a}_c$ — добавочное (или сложное центробежное ускорение *), то достаточно на основании этого соотношения исключить $\boldsymbol{a}$ из равенства (44) для того, чтобы получить векторное уравнение нашей задачи в виде

$$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{G} - \boldsymbol{a}_\tau - 2\boldsymbol{a}_c. \tag{45}$$

В этом динамическом уравнении, относящемся к точке P с единичной массой, два члена $-\boldsymbol{a}_\tau$ и $-2\boldsymbol{a}_c$, входящие в правую часть вместе с притяжением Земли $\boldsymbol{G}$, надо истолковывать как две (фиктивные) силы, отнесенные, как и $\boldsymbol{G}$, к единичной массе. В силе $-\boldsymbol{a}_\tau$ мы узнаем ту силу $\boldsymbol{X}$, которую в гл. XVI т. I мы назвали (единичной) силой *инерции переносного движения* Земли. Аналогично сила $-2\boldsymbol{a}_c$ называется *сложной центробежной силой,* тоже отнесенной к единичной массе.

Возвращаясь еще раз к тому, что говорилось в § 7 гл. XVI т. I, вспомним, что $\boldsymbol{G} - \boldsymbol{a}_\tau = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}$ есть не что иное, как вес тяжелого тела P, т. е. сила $\boldsymbol{g}$, которую статически можно определить как прямо противоположную той силе, которую нужно было бы приложить к телу, чтобы удержать его от падения. Кроме того, обратим внимание на то, что из двух движений, которые совершает Земля, т. е. равномерного суточного вращения и переносного движения годичного обращения, второе, при достаточно малых промежутках времени по сравнению с годичным периодом, можно рассматривать как равномерное и прямолинейное. Поэтому сила инерции $\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{a}_\tau$ не увеличится заметно от этого последнего движения и сведется к центробежной силе, происходящей от суточного движения, угловая скорость которого $\boldsymbol{\omega}$ направлена по полярной оси $ПП'$ Земли с юга на север (так как

*) В русской литературе по механике добавочным (а также, следуя Н. Е. Жуковскому, поворотным) ускорением называют вектор $2\boldsymbol{a}_c$. *(Прим. ред.)*

Земля вращается с запада на восток) и имеет величину (т. I, гл. VII, п. 19).

$$\omega=\frac{2\pi}{86164}\,\frac{1}{сек}, \tag{46}$$

если время измеряется в единицах среднего солнечного времени.

Отметим, наконец, что, обозначая через $\mathbf{v}_r$ относительную скорость точки P, будем, как известно, иметь

$$\mathbf{a}_c=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r.$$

Таким образом, векторному уравнению (45) движения точки P относительно Земли можно придать окончательно вид

$$\mathbf{a}_r=\mathbf{g}-2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r. \tag{45'}$$

25. Чтобы продолжить наше исследование, надо прибегнуть прежде всего к дальнейшей схематизации. Сила тяжести

$$\mathbf{g}=\mathbf{G}+\mathbf{X}$$

на самом деле меняется по величине и направлению от точки к точке; но в радиусе нескольких километров или, лучше сказать, в том ограниченном пространстве, в котором производятся наши наблюдения, вполне допустимо, как мы это знаем (т. I, гл. II, п. 27 и гл. XVI, пп. 39, 40), считать силу тяжести постоянной как по величине, так и по направлению.

Теперь, имея в виду приближенное интегрирование уравнения (45'), необходимо уточнить, какими членами, зависящими от ω, можно пренебречь по сравнению с g и какими пренебречь нельзя. Хотя величина ω сама по себе мала, однако нельзя пренебречь по сравнению с g членами, имеющими порядок величины ω^2R/g, где R — радиус Земли (это отношение равно отношению переносного ускорения у поверхности Земли к g). То же самое можно сказать и о членах вида $\omega V/g$, где через V обозначен максимум относительной скорости, достигаемый тяжелым телом в поле наблюдения, и, наконец, обозначая через δ максимальный размер поля наблюдения, о членах порядка $\frac{\delta}{R}$. Таким образом, количества, которые окажутся того же порядка, что и одно из трех отвлеченных чисел

$$\frac{\omega^2R}{g},\quad\frac{\omega V}{g},\quad\frac{\delta}{R},$$

мы будем рассматривать, как величины первого порядка, и будем пренебрегать их квадратными или попарными произведениями. Так, например, мы будем пренебрегать членом типа $\frac{\omega^2\delta}{g}$, который может быть написан в виде $\frac{\omega^2R}{g}\,\frac{\delta}{R}$ и, следовательно, представляет собой член второго порядка. В частности, по сравнению с g можно пренебрегать членами ω^2x, ω^2y, ω^2z, где

x, y, z обозначают координаты любой точки поля наблюдения относительно какой-нибудь системы осей, начало которой принадлежит этому полю.

Заметим, наконец, что в пределах продолжительности изучаемого явления и ωt можно рассматривать как величину (отвлеченное число) первого порядка, так что членами типа $\omega^2 t^2$ можно пренебрегать.

26. Предположим теперь, что движение происходит в северном полушарии, и за систему координат, связанную с Землей, примем систему, которая получится, если:

а) начало возьмем в точке O, неизменно связанной с Землей, вблизи того места, где происходит движение;

б) ось z направим по линии действия силы тяжести в точке O (вертикаль места) вниз;

в) ось x направим в плоскости меридиана точки O к северу.

Ось y, которая тем самым определяется однозначно, будет перпендикулярна к плоскости меридиана точки O и направлена к востоку.

При проектировании векторного уравнения (45′) на оси координат заметим, что относительно только что выбранных осей вектор $\boldsymbol{g}$, который теперь мы будем рассматривать как постоянный, будет иметь составляющие

$$0,\ 0,\ g.$$

Если γ есть острый угол, образованный вектором $\boldsymbol{g}$ с экваториальной плоскостью *(географическая широта)*, то составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}$, направленного по ПП′ от П′ к П, определятся равенствами

$$p = \omega \cos\gamma, \quad q = 0, \quad r = -\omega \sin\gamma. \tag{47}$$

Поэтому из уравнения (45′) получим:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\dot{y}\omega \sin\gamma, \\ \ddot{y} &= 2\omega(\dot{x}\sin\gamma + \dot{z}\cos\gamma), \\ \ddot{z} &= g - 2\dot{y}\omega\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{45″}$$

Если в этих равенствах пренебречь сложной центробежной силой $-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$, то мы опять придем, что вполне естественно, к уравнениям движения тяжелого тела в пустоте, составленным без учета вращения Земли. Эти уравнения мы изучали в кинематике (§ 6, гл. II, т. I). Перейдем теперь к интегрированию уравнений (45″), придерживаясь порядка приближения, установленного в предыдущем пункте. Если для определенности предположить, что при $t = 0$ тяжелое тело находится в начале O и имеет скорость $\boldsymbol{v}_0$ с компонентами $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, то, интегрируя второе из уравнений (45″), найдем прежде всего

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + 2\omega(x\sin\gamma + z\cos\gamma), \tag{48}$$

откуда, подставляя $\dot{y}$ в остальные два и пренебрегая по сравнению с g членами $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, $\omega^2 z$, получим два уравнения:

$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y}_0 \sin\gamma, \quad \ddot{z} = g - 2\omega\dot{y}_0 \cos\gamma.$$

Интегрируя их и принимая во внимание начальные условия, найдем

$$x = -\omega\dot{y}_0 \sin\gamma \cdot t^2 + \dot{x}_0 t,$$
$$z = \frac{1}{2}(g - 2\omega\dot{y}_0 \cos\gamma)\, t^2 + \dot{z}_0 t. \tag{49}$$

Если внесем эти выражения x, z в уравнение (48), отбросим члены с $\omega^2 t^2$ и проинтегрируем его, то придем к уравнению

$$y = \dot{y}_0 t + \omega(\dot{x}_0 \sin\gamma + \dot{z}_0 \cos\gamma)\, t^2 + \frac{1}{3}\omega g \cos\gamma \cdot t^3, \tag{50}$$

которое вместе с уравнениями (49) даст уравнения движения тяжелого тела P относительно Земли.

Если, в частности, предполагается, что начальная скорость v_0 равна нулю, т. е. что тяжелое тело предоставлено самому себе в положении O, то уравнения движения будут

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{3}\omega g \cos\gamma t^3, \quad z = \frac{1}{2} g t^2. \tag{51}$$

Движение, следовательно, будет происходить в плоскости, проходящей через местную вертикаль и нормальной к меридиану, а траектория будет полукубической параболой, как это следует из ее уравнения

$$y^2 = \frac{8}{9}\,\frac{\omega^2 \cos^3\gamma}{g}\, z^3,$$

которое получается исключением t из второго и третьего уравнений (51).

Ордината y, определяемая вторым из этих уравнений, при $t > 0$ будет всегда положительной и очень малой, продолжительность движения t будет достаточно мала, как это обыкновенно имеет место при падении тяжелых тел. Так как ось y направлена на восток, то мы заключаем, что свободно падающее без начальной скорости тяжелое тело не движется по вертикали места, а *слегка отклоняется от вертикали к востоку*. Чтобы дать представление о порядке величины такого отклонения, заметим, что его величина за секунду времени, т. е. $\frac{\omega g \cos\gamma}{3}$, для Рима приблизительно равна 0,18 *мм* *).

Это отклонение падающих тел к востоку, которое теоретически было предсказано еще Ньютоном, экспериментально было подтверждено Тадини (1795) и более надежным способом Райхом (1831). Оно служит одним из доказательств суточного вращения Земли. О другом более наглядном доказательстве мы будем говорить в § 8.

*) Для Москвы эта величина составляет 0,13 *мм. (Прим. ред.)*

27. Для тяжелого тела, предоставленного самому себе без начальной скорости в положении O, первое из уравнений (51) было дано в виде $x=0$; но это, разумеется, справедливо лишь для порядка приближения, принятого раньше. Если же приближенное интегрирование уравнений (45″) продолжить дальше, учитывая также и члены второго порядка в смысле, установленном в п. 25, то мы найдем для падающего тела, помимо отклонения к востоку, другое значительно менее заметное отклонение к югу.

Чтобы показать кратчайшим путем, как это получается, мы прямо предположим начальную скорость равной нулю ($\dot{x}_0=\dot{y}_0=\dot{z}_0=0$) и ограничимся вычислением с указанной точностью координаты x.

Прежде всего второе из уравнений (45″) при точном интегрировании, как и в предыдущем пункте, дает равенство (48), в котором здесь надо положить $\dot{y}_0=0$, так что мы будем иметь

$$\dot{y}=2\omega(x\sin\gamma+z\cos\gamma). \tag{48'}$$

С другой стороны, выражения (51), к которым мы пришли в предыдущем пункте, пренебрегая членами второго порядка в смысле п. 25, дают для x и z в предположении нулевой начальной скорости

$$x=0, \quad y=\frac{gt^2}{2}.$$

Это означает, что неизвестные пока более точные выражения для x, z будут вида

$$x=\delta(2), \quad z=\frac{gt^2}{2}(1+(2)),$$

где δ обозначает длину, не превосходящую максимального измерения поля наблюдения, а символ (2) служит для общего обозначения отвлеченного числа по меньшей мере второго порядка, которое, естественно, не будет одним и тем же в обеих формулах. Внося эти значения x и z в уравнение (48′), умноженное на ω, и объединяя в правой части члены с g, мы получим

$$\omega\dot{y}=2g\left\{\frac{\omega^2\delta\sin\gamma}{g}(2)+\frac{\omega^2t^2}{2}\cos\gamma(1+(2))\right\}.$$

Так как ω^2t^2 и $\frac{\omega^2\delta}{g}$ суть отвлеченные числа второго порядка, то это выражение, если только в нем пренебречь членами четвертого порядка, сведется к соотношению

$$\omega\dot{y}=g\cos\gamma\cdot\omega^2t^2;$$

подставив $\dot{y}$ в первое из уравнений (45″), получим

$$\ddot{x}=-g\sin2\gamma\cdot\omega^2t^2.$$

Из этого уравнения путем интегрирования его при начальных условиях $x=\dot{x}=0$ найдется выражение для x, которое будет иметь вид

$$x=-\frac{1}{12}g\sin 2\gamma\cdot\omega^2t^4.$$

Так как предполагается, что ось x направлена к северу, то знак этого выражения показывает, что речь идет об отклонении тяжелого тела к югу. Достаточно посмотреть на второе из равенств (51), чтобы убедиться, что эта вторая девиация будет значительно меньше восточной [1]).

§ 5. Деривация снаряда, происходящая вследствие вращения Земли

28. Дифференциальное уравнение задачи. Речь идет о той вторичной задаче баллистики, которая была сформулирована под рубрикой 3) в п. 23. Тогда же мы видели, что для приближенной характеристики движения снаряда, с учетом не только основных сил (силы тяжести и сопротивления воздуха), но и эффекта вращения Земли, нужно обратиться к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\eta}=\nu_2, \tag{41}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=-h\boldsymbol{\nu}+\{h_1\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}+h_2\eta\}\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}, \tag{42'}$$

где через ω обозначена угловая скорость Земли, а через $\boldsymbol{v}$ — скорость снаряда, вычисленная в предположении, что Земля не вращается. Скорость $\boldsymbol{v}$ и скалярные величины h, h_1, h_2, определяемые формулами (43), представляют собой известные функции времени в силу того, что движение, не возмущенное вращением Земли, предполагается известным (интеграл основной задачи). Неизвестный вектор $\boldsymbol{\nu}$ дает возмущение скорости $\boldsymbol{v}$ и, следовательно, интегралы

$$\xi=\delta x=\int_0^t \nu_1 dt,$$

$$\eta=\delta y=\int_0^t \nu_2 dt,$$

$$\zeta=\delta z=\int_0^t \nu_3 dt$$

от составляющих ν_1, ν_2, ν_3 вектора $\boldsymbol{\nu}$ дают возмущения координат снаряда. Так как оси выбраны таким образом, что плоскость xy представляет собой плоскость выстрела (или вертикальную пло-

[1]) Ср G i a n f r a n c e s c h i, La deviazione dei gravi in caduta, *Nuovo Cimento*, т. VI, s. VI, октябрь 1913, стр. 3—33.

скость, проходящую через начальную скорость), то, в частности, ζ в любой момент измеряет отклонение снаряда от этой плоскости или, как мы будем говорить, *деривацию*, происходящую от вращения Земли. В сочинениях по баллистике обыкновенно сохраняют специфическое название „деривация" (drift у англичан) для аналогичного отклонения, которому подвергается снаряд вследствие очень быстрого вращения около оси, сообщаемого снаряду внутренней нарезкой современных орудий. Но этой деривацией в собственном смысле, которая существенно зависит от трения скольжения между снарядом и воздухом, мы здесь не будем заниматься.

Для того чтобы охарактеризовать деривацию ζ посредством ее производной $\dot{\zeta}=\nu_3$, достаточно спроектировать уравнение (42') на ось z, являющуюся нормалью к плоскости выстрела и (в силу соглашения п. 14) направленную влево от наблюдателя, который стоит в месте выстрела и смотрит в ту сторону, куда направлен выстрел.

Принимая во внимание, что вектор $\boldsymbol{v}$ постоянно лежит в плоскости выстрела и, следовательно, перпендикулярен к оси z и, обозначая через p, q, r составляющие вектора ω по принятым здесь осям x, y, z (их не надо смешивать с компонентами п. 26 предыдущего параграфа, которые соответствовали плоскости выстрела, совпадающей с плоскостью меридиана), мы получим для деривации ζ линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\zeta}=-h\dot{\zeta}-2(p\dot{y}-q\dot{x}); \tag{52}$$

соответствующее однородное уравнение приводится к виду

$$\ddot{\zeta}=-h\dot{\zeta}. \tag{53}$$

При интегрировании уравнения (52) полезно вспомнить о соглашении, установленном в п. 23, относительно начальных условий возмущенного движения; в силу этого соглашения необходимо предположить, что в начальный момент должны равняться нулю как $\zeta=\delta z$, так и $\dot{\zeta}=\nu_3$.

29. Интегрирование дифференциального уравнения деривации. Согласно замечанию п. 23, мы заранее знаем, что общий интеграл уравнения (52) можно определить просто (посредством дифференцирования и квадратур), если известен общий интеграл соответствующей основной задачи. Здесь можно непосредственно подтвердить возможность такого перехода. Из уравнения

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}-\frac{1}{v}f\boldsymbol{v}$$

основной задачи, проектируя его на ось x и вспоминая выражение для h, даваемое первым из равенств (43), выводим

$$\ddot{x}=-h\dot{x}, \tag{53'}$$

откуда непосредственно следует, что общий интеграл однородного уравнения (53) тождественен с абсциссой $x(t)$ снаряда в невозмущенном движении.

Установив это, мы придем к интегрированию уравнения (52), применяя прямо метод варьирования постоянных, т. е. полагая $\dot\zeta = \lambda\dot x$, где λ обозначает неизвестную функцию от t и x — *какое-нибудь* частное решение уравнения (53'), *не равное тождественно нулю,* т. е. не соответствующее вертикальному выстрелу. Таким образом, из уравнения (52) получим

$$\dot\lambda\dot x = -2(p\dot y - q\dot x).$$

Если теперь принять во внимание, имея в виду выстрел с наклоном к горизонту, что $\dot x$ никогда не будет равно нулю, то обе части этого равенства можно будет разделить на $\dot x$. Если при этом вспомним, как находился наклон φ для невозмущенного движения, то предыдущее уравнение можно написать в виде

$$\dot\lambda = 2q - 2p\operatorname{tg}\varphi.$$

Приняв за начальный момент $t=0$, проинтегрируем это уравнение от 0 до любого t. Так как p и q суть постоянные и производная $\dot\zeta = \lambda\dot x$ должна обратиться в нуль при $t=0$, то будем иметь

$$\dot\zeta = 2qt\dot x - 2p\dot x\int_0^t \operatorname{tg}\varphi\,dt.$$

Для большей ясности обозначим через t любой момент, для которого желательно вычислить деривацию ζ, и через t_1 и t_2 — две переменные интеграции. Поэтому, написав предыдущее уравнение в виде

$$\dot\zeta(t_1) = 2qt_1\dot x(t_1) - 2p\dot x(t_1)\int_0^{t_1} \operatorname{tg}\varphi(t_2)\,dt_2,$$

проинтегрируем от 0 до t, имея в виду, что $\zeta(0)=0$. Применяя интегрирование по частям и принимая за неопределенный интеграл от $\dot x(t_1)$ выражение $x(t_1)-x(t)$, мы получим для деривации ζ следующее окончательное выражение:

$$\zeta(t) = -2q\int_0^t [x(t_1)-x(t)]\,dt_1 + 2p\int_0^t [x(t_1)-x(t)]\operatorname{tg}\varphi(t_1)\,dt_1.$$

30. В дополнение к предыдущему удобно указать выражение постоянных p, q, r в функции от данных задачи, т. е. от модуля ω угловой скорости Земли, от географической широты γ, от места выстрела и от азимута A плоскости выстрела (угол нашей оси x

с касательной к меридиану, направленной к северу). С этой целью возьмем снова формулы (47) п. 26 и обозначим через x', y', z' принятые там оси, а через p', q', r' — соответствующие проекции вектора ω, тогда эти формулы примут вид

$$p' = \omega \cos\gamma, \quad q' = 0, \quad r' = -\omega \sin\gamma.$$

В п. 26 вертикалью, направленной вниз, была ось z', а оси x', y' были соответственно направлены на север и на восток; теперь вертикалью, направленной вниз, является ось y, а ось x будет составлять угол A с касательной к меридиану, направленной к северу; этот угол есть угол поворота около вертикали, направленной вниз. Поэтому переход от системы x', y', z' к системе x, y, z совершается путем поворота на $\pi/2$ около оси x' и последующего вращения A около нисходящей вертикали (с которой мы условились совместить y'). Отсюда вытекает, что

$$x = x' \cos A - y' \sin A, \quad y = z', \quad z = -x' \sin A - y' \cos A,$$

и, следовательно,

$$p = \omega \cos\gamma \cos A, \quad q = -\omega \sin\gamma, \quad r = -\omega \cos\gamma \sin A. \tag{54}$$

31. Частный случай вертикального падения при квадратичном законе сопротивления. Очевидно, постановка общей задачи о деривации, данная в п. 28, остается в силе также и тогда, когда требуется оценить деривацию при вертикальном (прямолинейном) выстреле или, в частности, при падении тяжелого тела, предоставленного самому себе без начальной скорости. В этом случае остается неопределенной только вертикальная плоскость xy выстрела. Если за плоскость xy примем для определенности плоскость меридиана и направим ось x к северу (и, следовательно, ось z к западу), то в формулах (54) мы должны положить $A = 0$, вследствие чего получим

$$p = \omega \cos\gamma, \quad q = -\omega \sin\gamma, \quad r = 0. \tag{54'}$$

С другой стороны, основываясь на выводах п. 28, мы получаем здесь в качестве основного дифференциального уравнения для деривации ζ уравнение (52)

$$\ddot{\zeta} = -h\dot{\zeta} - 2(p\dot{y} - q\dot{x}),$$

для которого вспомогательное однородное уравнение (53) имеет вид

$$\ddot{\zeta} = -h\dot{\zeta}.$$

Но в настоящем случае нужно непосредственно интегрировать это последнее уравнение, так как здесь общий интеграл однородного уравнения (53) уже не определяется горизонтальной составляющей $\dot{x}$ скорости в невозмущенном движении (эта составляющая здесь тождественно равна нулю).

Ограничимся в наших рассуждениях случаем, когда интенсивность f сопротивления воздуха не зависит от высоты y снаряда и оказывается пропорциональной квадрату скорости v. Как мы это видели в п. 52 гл. I, в этом предположении можно положить

$$f=\frac{gv^2}{V^2}, \tag{55}$$

где V есть постоянная величина (предельная скорость), так что в силу первого из уравнений (43) имеем

$$h=\frac{1}{v}f=\frac{gv}{V^2},$$

причем h здесь рассматривается как известная функция времени, поскольку v обозначает скорость снаряда при невозмущенном движении, которое предполагается уже известным. Эта скорость v в случае закона сопротивления (55) нами уже определена в п. 54 гл. I, где было получено

$$\frac{v}{V}=\frac{e^\tau-e^{-\tau}}{e^\tau+e^{-\tau}}=\frac{d}{d\tau}\ln(e^\tau+e^{-\tau}); \tag{56}$$

здесь τ обозначает некоторый параметр, связанный с временем t соотношением

$$\tau=\frac{gt}{V}, \tag{57}$$

причем предполагается, что в начальный момент $t=0$.

Теперь равенство (53), если рассматривать в нем $\dot{\zeta}$ как неизвестную функцию и на основании соотношения (57) положить

$$\ddot{\zeta}=\frac{d\dot{\zeta}}{dt}=\frac{g}{V}\frac{d\dot{\zeta}}{d\tau},$$

можно будет написать в виде

$$\frac{d\dot{\zeta}}{d\tau}=-\frac{v}{V}\dot{\zeta};$$

поэтому достаточно принять во внимание равенство (56), чтобы заключить, что

$$\dot{\zeta}=\frac{\lambda}{e^\tau+e^{-\tau}}, \tag{58}$$

где λ обозначает постоянную интеграции.

Возьмем теперь снова основное дифференциальное уравнение для деривации (52) и проинтегрируем его для случая тяжелого тела, предоставленного самому себе без начальной скорости. В этом случае горизонтальная составляющая $\dot{x}$ скорости снаряда в невозмущенном движении обратится тождественно в нуль, а аналогичная вертикальная составляющая $\dot{y}$ будет тождественна, включая и знак, со скоростью v, определяемой равенством (56); поэтому уравнение (52), если за неизвестную функцию примем $\dot{\zeta}$, а за независимое переменное τ, приведется к виду

$$\frac{d\dot{\zeta}}{d\tau}=-\frac{v}{V}\dot{\zeta}-2p\frac{V}{g}v. \tag{52'}$$

Применяя к этому уравнению метод вариации произвольной постоянной λ в интеграле (58) соответствующего однородного уравнения и принимая во внимание, что при $\tau=0$ (или $t=0$) должно быть $\dot{\zeta}=0$, получим

$$\lambda=-2p\frac{V^2}{g}(e^{\tau}+e^{-\tau}-2).$$

Следовательно,

$$\dot{\zeta}=\frac{g}{V}\frac{d\zeta}{d\tau}=-2p\frac{V^2}{g}\left(1-\frac{2}{e^{\tau}+e^{-\tau}}\right); \tag{59}$$

после этого, интегрируя от 0 до τ и вспоминая, что при $\tau=0$ должно быть $\zeta=0$, найдем, что деривация определяется равенством

$$\zeta=-2p\frac{V^3}{g^2}\left(\tau-2\operatorname{arctg}e^{\tau}+\frac{\pi}{2}\right). \tag{60}$$

32. Оценка влияния сопротивления воздуха на деривацию падающего тяжелого тела. Закон изменения деривации (60) в зависимости от времени или, что одно и то же, в зависимости от пропорционального ему аргумента прямо следует из того, что скорость $\dot{\zeta}$, вначале равная нулю, на основании соотношения (59) остается всегда отрицательной, так что деривация ζ постоянно убывает, а так как при $\tau=0$ деривация тоже равна нулю, то она остается всегда отрицательной при $\tau>0$. Если при этом мы вспомним, что ось z здесь направлена к западу (предыдущий пункт), то увидим, что $-\zeta$ дает как раз ту восточную девиацию падающего тяжелого тела, которая происходит от вращения Земли и для которой в п. 26 мы уже получили первое приближенное значение, не принимая во внимание сопротивление воздуха. Уравнение (60), наоборот, учитывает также и это важное физическое обстоятельство. Интересно количественно оценить эффект этого сопротивления воздуха, сравнивая восточную девиацию $\delta=-\zeta$, получаемую из уравнения (60), с аналогичной девиацией δ_0 в пустоте.

Эта последняя определяется вторым из уравнений (51) п. 26, которое на основании тождества $p=\omega\cos\gamma$ можно написать в виде

$$\delta_0=\frac{1}{3}pgt^3, \tag{61}$$

после чего $\delta = -\zeta$ может быть выражена на основании (60) и (57) формулой

$$\delta = \delta_0 \frac{6\psi}{\tau^3}, \tag{62}$$

где для простоты положено

$$\psi(\tau) = \tau - 2 \operatorname{arctg} e^{\tau} + \frac{\pi}{2}. \tag{63}$$

Для оценки порядка величины полученных значений, по крайней мере при достаточно малом τ, функции $\frac{6\psi}{\tau^3}$, которая дает отношение δ/δ_0, удобно вычислить первые члены разложения ψ по степеням τ. С этой целью, условившись обозначать штрихами производные по τ, заметим прежде всего, что из сравнения соотношений (59), (60) и (63) (или прямо из непосредственного дифференцирования соотношения (63)). вытекает, что

$$\psi' = 1 - \frac{2}{e^{\tau} + e^{-\tau}},$$

и, следовательно,

$$\psi'' = 2\frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{(e^{\tau} + e^{-\tau})^2}.$$

Поэтому, если введем функцию

$$\chi = \ln \frac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2} = \ln \operatorname{ch} \tau, \tag{64}$$

производная от которой имеет вид

$$\chi' = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{e^{\tau} + e^{-\tau}} = \operatorname{th} \tau,$$

то можно будет написать

$$\psi'' = (1 - \psi')\chi',$$

между тем, с другой стороны, существует известное тождество

$$\chi'' = 1 - \chi'^2.$$

Из этих двух последних соотношений обычным рекуррентным способом получим

$$\psi''' = (1 - \psi')(1 - 2\chi'^2), \quad \psi^{IV} = -(1 - \psi')\chi'(5 - 6\chi'^2),$$
$$\psi^{V} = -(1 - \psi')(1 - 2\chi'^2)(5 - 6\chi'^2) + 12(1 - \psi')\chi'^2(1 - \chi'^2).$$

Таким образом, если примем во внимание, что при $\tau = 0$ вместе с ψ будут равны нулю также ψ' и χ', то найдем

$$\psi_0 = \psi_0' = \psi_0'' = 0, \quad \psi_0''' = 1, \quad \psi_0^{IV} = 0, \quad \psi_0^{V} = -5,$$

поэтому для ψ будем иметь разложение

$$\psi(\tau)=\frac{1}{3!}\tau^3-\frac{1}{4!}\tau^5+\ldots$$

и формула (62) примет вид

$$\delta=\delta_0\left(1-\frac{1}{4}\tau^2+\ldots\right). \qquad (62')$$

Таким образом, мы видим, что отношение δ/δ_0 при $\tau\to 0$ стремится к единице, как это можно было и прямо предвидеть, так как сопротивление воздуха сказывается тем меньше, чем меньше промежуток времени, в течение которого оно действует. Более того, мы видим, что когда эта продолжительность t падения будет достаточно короткой и, следовательно, достаточно малым будет соответствующее значение (57) аргумента τ, отношение δ/δ_0 будет отличаться от своего предельного значения, равного единице, на $\tau^2/4$. Если такой поправкой можно пренебречь, то влияние сопротивления воздуха на восточную девиацию падающего тяжелого тела становится неощутимым, поэтому вполне законным будет от него отвлечься, как это и было сделано в предыдущем параграфе.

33. Критерий оценки Гаусса. Точная оценка ошибки, получаемой в том случае, когда пренебрегают сопротивлением воздуха, зависит, как мы только что видели, от численной оценки параметра τ. В предыдущем пункте этот параметр τ был определен, как отношение gt/V между конечной скоростью gt падения в пустоте продолжительностью t и предельной скоростью V. Важно отметить, что, в то время как продолжительность падения t, позволяющую вычислить скорость gt, можно определить экспериментально с вполне достаточным приближением, численное значение предельной скорости V всегда является сомнительным.

Поэтому представляет большой физический интерес показать, как, следуя критерию, указанному Гауссом[1]), можно связать численную оценку τ прямо с данными наблюдения.

Этот критерий состоит в определении порядка величины τ уже не на основании формулы (57), а на основании сравнения между высотой H_0 падения в пустоте и высотой H действительного падения равной продолжительности в воздухе. Эта высота H в отличие от предельной скорости V может быть определена удовлетворительно из опыта наравне с продолжительностью падения t. В то время как для высоты падения в пустоте мы имеем выражение

$$H_0=\frac{gt^2}{2},$$

[1]) Gauss, Werke, т. V, стр. 495—503.

высота действительного падения равной продолжительности t определяется равенством

$$H=\int_0^t v dt$$

или же на основании формулы (57) равенством

$$H=\frac{V^2}{g}\int_0^\tau \frac{v}{V}\,d\tau;$$

поэтому, принимая во внимание формулу (56), получим

$$H=\frac{V^2}{g}\ln\frac{e^\tau+e^{-\tau}}{2}.$$

Если затем ввести высоту падения H_0, принимая во внимание формулы (57) и (64) предыдущего пункта, то получим

$$H=H_0\frac{2\chi}{\tau^2}. \tag{65}$$

Так как χ представляет собой, очевидно, четную функцию от τ, то формула (65) дает соотношение между τ^2 и отношением H/H_0. Таким образом, дело сводится к тому, чтобы выразить это отношение явно через τ^2 в окрестности $\tau=0$; отсюда можно получить порядок величины τ^2, если известен порядок величины H/H_0.

С этой целью прежде всего заметим, что формулу (65), если ввести относительную разность между H_0 и H, можно написать в виде

$$\frac{H_0-H}{H_0}=\frac{2}{\tau^2}\left(\frac{\tau^2}{2}-\chi(\tau)\right). \tag{65'}$$

С другой стороны, взяв производную от χ, получим

$$\chi'=\frac{e^\tau-e^{-\tau}}{e^\tau+e^{-\tau}}=1-\frac{2}{1+e^{2\tau}}; \tag{66}$$

но, как мы уже видели в предыдущем пункте,

$$\chi''=1-\chi'^2,$$

откуда тотчас следует

$$\chi'''=-2\chi'(1-\chi'^2),\quad \chi^{IV}=-2(1-\chi'^2)(1-3\chi'^2). \tag{67}$$

Таким образом, находим для $\tau=0$

$$\chi_0=\chi_0'=0,\quad \chi_0''=1,\quad \chi_0'''=0,\quad \chi_0^{IV}=-2;$$

поэтому разложение χ в ряд Маклорена, ограниченное членом четвертого порядка с остаточным членом в форме Лагранжа, представится в виде

$$\chi(\tau)=\frac{\tau^2}{2}+\frac{\tau^4}{4!}\chi^{IV}(\tau_1)$$

при τ_1, заключенном между 0 и τ; теперь равенство (65') сведется к следующему:

$$\frac{H_0-H}{H_0}=-\frac{\tau^2}{12}\chi^{IV}(\tau_1). \qquad (65'')$$

Обращаясь снова к формуле (65'), легко убедиться, что, как бы ни изменялось τ от 0 до ∞, функция в правой части не будет отрицательной. Действительно, это очевидно для первого множителя $2/\tau^2$. Что же касается второго, то заметим прежде всего, что его первая производная функция $\tau-\chi'$ не может убывать, так как производная от функции $\tau-\chi'$, равная $1-\chi''=\chi'^2$, всегда больше или равна нулю; так как, кроме того, при $\tau=0$ функция $\tau-\chi'$ исчезает, то она будет всегда больше или равна нулю. По тем же соображениям заключаем, что и функция $\tau^2/2-\chi(\tau)$, равная нулю при $\tau=0$ и никогда не убывающая, будет всегда больше или равна нулю.

Поэтому, подставляя в правую часть формулы (65") выражение, даваемое равенством (65"), и деля на $\tau^2/12$, найдем

$$-\chi^{IV}(\tau_1)\geqslant 0$$

или же для второго из равенств (67)

$$2(1-\chi'^2(\tau_1))(1-3\chi'^2(\tau_1))\geqslant 0.$$

Но каково бы ни было τ_1, функция $\chi'(\tau_1)$, как это следует из формулы (66), будет заключена между 0 и 1, так что третий множитель $1-3\chi'^2(\tau_1)$ должен быть больше или равен нулю, а это, очевидно, означает, что этот множитель будет заключен между 0 и -1. Мы заключаем отсюда, что $0\leqslant-\chi^{IV}(\tau_1)\leqslant 2$, так что равенство (65") принимает окончательный вид

$$\frac{H_0-H}{H_0}=\theta\frac{\tau^2}{6}, \qquad (65'')$$

где

$$\theta=-\frac{\chi^{IV}(\tau_1)}{2}$$

представляет собой положительную величину, меньшую единицы, которая, как это видно из второго из равенств (67), стремится к 1 при $\tau\to 0$. Формула (65") показывает, что τ^2 будет по крайней мере порядка величины $6(H_0-H)/H_0$. Если это отношение будет равно нескольким сотым, то то же можно сказать и о τ^2 (поскольку, следуя Гауссу, можно предположить, что величина $1/\theta$ не слишком отличается от значения 1, которое она имеет при $\tau=0$). В таком случае, с аналогичным приближением можно отождествить δ с δ_0 в формуле (62'), пренебрегая величиной τ^2 и более высокими степенями τ.

Именно так получалось в опытах Гульельмини и Бенценберга, на которые опирался Гаусс. В опытах Бенценберга, производившихся в Гамбурге, имелось по определению Бенценберга $t=4''$, $H=76$ *м* (приблизительно); так как $H_0=78{,}4$ *м*, то поправочный член $\tau^2/4$ в формуле (62') получался порядка $6H_0-H/4H_0=0{,}045$. На основании этого численного результата Гаусс и утверждал (по крайней мере для тех данных наблюдения, которыми он располагал), что действием сопротивления воздуха на девиацию падающих тел можно пренебрегать.

Но равенство (65'''), в котором θ заключено между 0 и 1, показывает, что τ^2 не меньше чем $6(H_0-H)/H_0$; так что, когда относительная разница между H_0 и H становится ощутительной, отождествлять δ и δ_0 при вычислении отклонения падающего тяжелого тела к востоку нельзя даже при простой оценке порядка величины, и необходимо принимать во внимание поправочный множитель $6\psi/\tau^3$ в равенстве (62).

34. Чтобы дать представление о порядке величины τ^2 для значительных высот падения, который получился из более поздних наблюдений, приведем здесь результаты опытов, выполненных Р. Г. Ланноном[1]) в четырех угольных шахтах Ньюкэстля в условиях спокойного воздуха. Действительные высоты падения в метрах, продолжительность t в секундах, соответствующие высоты падения в пустоте и ушестеренные относительные изменения разности между H_0 и H даны в таблице

H	17	65	134	220	312	410
t	2	4	6	8	10	12
H_0	19,6	78	176	313	490	707
$6\frac{H_0-H}{H_0}$	0,79	1	1,43	1,78	2,18	2,52

Последняя строка показывает, что во всех этих опытах величиной $\tau^2 \geqslant 6(H_0-H)/H_0$ нельзя пренебречь, так как, начиная с значений, близких к 1, она достигает и превосходит значение 2 для

[1]) R. G. Lunnon, *Philosophical Magazine*, т. 47, январь 1924, стр. 173—182.

наблюдавшегося падения с больших высот. Бросается в глаза несогласие между данными Бенценберга, на которые опирался Гаусс (предыдущий пункт), и вторым из наблюдений Леннона. Оба наблюдавшихся в действительности падения в 76 и 65 *м* происходили в течение 4 *сек* в спокойном воздухе; разница ясно видна при оценке верхнего предела τ^2, который в первом случае, как мы видели, был примерно равен $4 \times 0{,}045 = 0{,}18$, а во втором достигал 1.

§ 6. Понятие о динамической устойчивости равновесия и малые колебания

35. В статике точки (т. I, гл. IX, п. 19) мы дали первое определение понятия *устойчивости* положения равновесия. Здесь, в дополнение к динамике свободной точки, надо будет уточнить это понятие с динамической точки зрения.

Равновесие материальной точки P в некотором положении M имеет устойчивый характер, если точка, предоставленная действию активной силы на достаточно малом расстоянии от M с достаточно малой начальной скоростью (а следовательно, и с достаточно малой живой силой), движется сколь угодно долго вблизи от M со скоростью, не превосходящей определенного предела. Точнее, равновесие называется *устойчивым*, если, задав два положительных произвольно малых числа δ и ε, можно соответственно определить два других положительных числа δ_0 и ε_0, таких, что точка, предоставленная действию силы на расстоянии от M, меньшем δ_0, и с живой силой, меньшей ε_0, будет неопределенно долго двигаться внутри сферы с центром в M и с радиусом δ, причем ее живая сила не будет превосходить ε.

36. ТЕОРЕМА Дирихле[1]). Ограничимся рассмотрением случая, когда действующая сила консервативна, т. е. представляет собой производную от потенциала U (конечного и непрерывного вместе со своими первыми производными в рассматриваемой области поля действия силы). Составляющие X, Y, Z активной силы в этом случае имеют вид

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

а уравнения движения точки допускают (п. 2, в) интеграл живых сил

$$T - U = \text{const},$$

где $T = \frac{mv^2}{2}$ есть живая сила точки.

[1]) Лежен-Дирихле (Peter Gustav Lejeune-Dirichlet) родился около Аахена в 1805 г.; после длительного пребывания в Париже был профессором в университете в Бреславле, потом в университете в Гёттингене и в этом же городе умер в 1859 г. Его имя связано с результатами, ставшими теперь классическими, в различных областях анализа и механики: теории чисел, рядах Фурье, теории потенциала, гидродинамике.

С другой стороны, уже в статике отмечалось (т. I, гл. IX, п. 19), что во всяком положении равновесия точки три частные производные от U должны обращаться в нуль, так что для всякого положения равновесия потенциал имеет стационарное значение. В частности, потенциал может иметь в этом положении максимум или минимум, но, как известно из анализа, это условие является только необходимым. Если в точке M для функции U имеет место действительный максимум, то справедливо известное предложение (теорема Дирихле), для доказательства которого используется только одно следствие уравнений движения, а именно упомянутый выше интеграл живых сил. Теорема эта следующая:

Для точки, находящейся под действием консервативной силы, всякое положение, в котором потенциал имеет максимум, есть положение устойчивого равновесия (в том смысле, как это определено выше).

Пусть заданы два произвольных положительных числа: δ и ε. Очевидно, можно предположить, что величина δ достаточно мала для того, чтобы во всякой точке P, не внешней для сферы с центром в M и радиусом δ (но, конечно, отличной от M), потенциал, по предположению непрерывный, был меньше максимума U_M, т. е.

$$U_M - U_P > 0 \quad \text{при} \quad 0 < MP \leqslant \delta. \tag{68}$$

Тогда, если обозначим, в частности, через Q переменную точку на поверхности этой сферы с центром в M и радиусом δ, то положительная непрерывная функция $U_M - U_Q$ будет иметь минимум, больший нуля. Всегда можно взять положительное число ε_0 таким, чтобы $2\varepsilon_0$ было одновременно меньше этого минимума и числа ε, т. е.

$$U_M - U_Q > 2\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad MQ = \delta; \quad \varepsilon > 2\varepsilon_0. \tag{69}$$

С другой стороны, в силу той же непрерывности потенциала U можно определить другое положительное число δ_0, достаточно малое для того, чтобы во всякой точке P_0, не внешней для сферы с центром в M и радиусом δ_0, потенциал отличался от максимума U_M меньше, чем на ε_0, т. е. чтобы было

$$U_M - U_{P_0} < \varepsilon_0 \quad \text{при} \quad P_0M \leqslant \delta_0. \tag{70}$$

Для того, чтобы убедиться, что точка M является положением устойчивого равновесия, достаточно показать, что точка, предоставленная действию приложенной силы в некотором положении P_0, будет сколь угодно долго двигаться внутри сферы с центром в M и радиусом δ; при этом ее живая сила будет меньше ε, если в положении P_0 она была меньше ε_0.

С этой целью будем рассуждать от противного, допустив, что точка при движении в конце концов уходит из этой сферы. В определенный момент она пройдет через поверхность в некотором положении Q с такой живой силой T, что, на основании интеграла живых сил, если T_0 является начальной живой силой, будем иметь

$$T - U_Q = T_0 - U_{P_0};$$

оставляя в левой части T, а в правой части прибавляя и вычитая максимум U_M, получим

$$T = T_0 + (U_M - U_{P_0}) - (U_M - U_Q).$$

Но это равенство неверно, так как по предположению и в силу неравенств (69), (70) имеем

$$T_0 < \varepsilon_0, \quad U_M - U_{P_0} < \varepsilon_0, \quad U_M - U_Q > 2\varepsilon_0, \tag{71}$$

а отсюда следует

$$T < 0.$$

Таким образом, мы доказали, что точка не может выходить из сферы с центром в M и радиусом δ.

Что же касается ее живой силы, то из уравнения живых сил, относящегося к любому положению P точки, т. е. из уравнения

$$T - U_P = T_0 - U_{P_0},$$

получим

$$T = T_0 + (U_M - U_{P_0}) - (U_M - U_P).$$

Так как точка P является всегда внутренней для сферы с центром M и радиусом δ, то разность $U_M - U_P$ на основании неравенства (68) будет всегда положительной (или нулем, если P попадает в M); поэтому будем иметь

$$T \leqslant T_0 + (U_M - U_{P_0})$$

и, следовательно, на основании первого из двух неравенств (71) и второго из (69),

$$T \leqslant 2\varepsilon_0 < \varepsilon.$$

37. Малые колебания около положения устойчивого равновесия. Этим названием, как легко понять, обозначают такое движение точки P, которое она совершает сколь угодно долго в непосредственной близости от своего устойчивого положения равновесия M (с живой силой, не превосходящей известного заданного предела). Здесь мы предполагаем изучить характер этого движения, имея в виду случай, когда действующая сила консервативна, а потенциал U имеет в точке M действительный максимум.

Для этой цели необходимо некоторое предварительное аналитическое рассмотрение выражения этого потенциала. Взяв для простоты начало координат в точке M, мы всегда можем выбрать аддитивную произвольную постоянную потенциала так, чтобы он исчезал в M. В этой точке, поскольку речь идет о ней как о точке максимума, исчезают также и три первых производных $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$; поэтому полагая, что членами четвертого порядка в разложении Маклорена можно пренебречь, для всякой точки M некоторой окрестности начала координат будем иметь

$$U=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 x^2+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 y^2+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 z^2+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\right)_0 yz+2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\right)_0 zx+2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)_0 xy\right\}+(3),$$

где $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)_0$ равны значениям, принимаемым в начале координат вторыми производными от U, а (3) представляет собой кубичную форму от x, y, z. Если отбросим исключительный случай, когда в точке M исчезают все вторые производные, то, как известно из анализа, для того чтобы функция U имела действительный максимум в M, требуется, чтобы квадратичная форма, состоящая из членов второго порядка, была *определенно отрицательной*, т. е. оставалась отрицательной во всей окрестности точки M, за исключением разве той точки, в которой она исчезает.

Если для удобства примем обозначения

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0=-a_{11},\quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0=-a_{22},\quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0=-a_{33},$$
$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\right)_0=-a_{23},\quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\right)_0=-a_{31},\quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)_0=-a_{12},$$

то предыдущее выражение U можно будет написать в виде

$$U=-\frac{1}{2}\left\{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy\right\}+(3),$$

где квадратичная форма в фигурных скобках будет определенной и положительной. Далее, как известно (вспомним приведение к канонической форме уравнения эллипсоида), всегда можно выбрать оси (с началом в M) так, чтобы эта форма свелась к сумме трех квадратов

$$\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2+\omega_3^2z^2;$$

так что в конце концов получается

$$U=-\frac{1}{2}\{\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2+\omega_3^2z^2\}+(3). \tag{72}$$

Выбрав таким образом оси, обратимся снова к нашей точке P. По теореме Дирихле, точка P не выходит из сферы с центром в M произвольно малого радиуса δ, лишь бы вначале она была предоставлена действию силы в некотором положении P_0, достаточно близком к $M\,(MP_0<\delta_0)$ и с достаточно малой живой силой $T_0\,(T_0<\varepsilon_0)$.

Если теперь представим себе, что величина δ достаточно мала для того, чтобы внутри сферы с центром в M и радиусом δ не только оставалось в силе равенство (72), но и можно было с достаточным приближением пренебречь членами третьего порядка (относительно расстояния MP, а следовательно, и относительно x, y, z), то можно будет принять потенциал в виде

$$U=-\frac{1}{2}(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2+\omega_3^2z^2).$$

Малые колебания около M точки P, массу которой мы для простоты вычислений будем предполагать равной единице, будут тогда определяться уравнениями

$$\ddot{x}=-\omega_1^2x,\quad \ddot{y}=-\omega_2^2y,\quad \ddot{z}=-\omega_3^2z. \tag{73}$$

Из формы этих уравнений прямо следует, что:

Малые колебания материальной точки около положения устойчивого равновесия всегда можно разложить на три гармонических колебания по трем взаимно перпендикулярным, надлежащим образом выбранным направлениям.

38. Интегралами уравнений (73), как известно, будут (т. I, гл. II, п. 36)

$$x=r_1\cos(\omega_1t+\theta_1),\quad y=r_2\cos(\omega_2t+\theta_2),\quad z=r_3\cos(\omega_3t+\theta_3), \tag{74}$$

где произвольные постоянные r_1, r_2, $r_3\,(\geqslant 0)$ и θ_1, θ_2, θ_3 можно определить по начальным положению и скорости, задаваемым, разумеется, в тех пределах, в которых сохраняют свое значение уравнения (73).

Но важно отметить, что периоды $\frac{2\pi}{\omega_1}$, $\frac{2\pi}{\omega_2}$, $\frac{2\pi}{\omega_3}$ трех составляющих гармонических движений не зависят от этих начальных условий, а зависят только от величин ω_1, ω_2, ω_3, т. е. от природы консервативной силы, действующей на движущуюся точку.

Добавим еще, что хотя три составляющих движения являются периодическими, однако движение точки P, вообще говоря, не периодично. Чтобы доказать это и в то же время охарактеризовать тот случай, когда движение P будет периодическим, заметим, что, для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы через равные промежутки времени T точка P приходила в одно и то же положение с одной и той же скоростью, или, другими словами, чтобы три функции (74) от t были периодическими *с одним и тем же периодом T*. Теперь, если рассмотрим, например, функцию $x=r_1\cos(\omega_1t+\theta_1)$, то ясно, что для того, чтобы она допускала период T, необходимо и достаточно, чтобы для любого значения t имело место равенство

$$\cos(\omega_1t+\theta_1)=\cos(\omega_1[t+T]+\theta_1)$$

и, следовательно, чтобы сумма или разность аргументов двух косинусов была равна целому кратному $2n_1\pi$ от 2π. Но равенство

$$(\omega_1[t+T]+\theta_1)+(\omega_1 t+\theta_1)=2\omega_1 t+2\theta_1+\omega_1 T=2n_1\pi$$

не может удовлетворяться тождественно, так как, если бы оно удовлетворялось при любом значении t, то должно было бы быть отдельно $2\theta_1+\omega_1 T=2n_1\pi$ и $\omega_1=0$, между тем как величина ω_1 положительна. Поэтому остается возможным только равенство

$$(\omega_1[t+T]+\theta_1)-(\omega_1 t+\theta_1)=\omega_1 T=2n_1\pi,$$

или же

$$T=n_1\frac{2\pi}{\omega_1}.$$

Подобным же образом предположение, что T есть общий период функций $y=r_2\cos(\omega_2 t+\theta_2)$, $z=r_3\cos(\omega_3 t+\theta_3)$, влечет за собой равенства

$$T=n_2\frac{2\pi}{\omega_2},\qquad T=n_3\frac{2\pi}{\omega_3},$$

где n_2 и n_3 обозначают два других целых числа. Отсюда заключаем, что для периодичности движения точки P необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения

$$n_1\frac{2\pi}{\omega_1}=n_2\frac{2\pi}{\omega_2}=n_3\frac{2\pi}{\omega_3}$$

или, если угодно, соотношения

$$\frac{\omega_1}{n_1}=\frac{\omega_2}{n_2}=\frac{\omega_3}{n_3},$$

при целых n_1, n_2, n_3, т. е. чтобы частоты ω_1, ω_2, ω_3 *трех составляющих гармонических колебаний были соизмеримы между собой.*

Если это требование выполняется, то траектория будет замкнутой и алгебраической, в противном случае движение точки P не будет периодическим, и траектория будет незамкнутой и трансцендентной.

Интересный частный случай периодических малых колебаний мы будем иметь, когда ω_1, ω_2, ω_3 будут равны одной и той же величине ω. Тогда потенциал в окрестности положения равновесия приведется к виду

$$U=-\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2+z^2)=-\frac{1}{2}\omega^2 r^2,$$

так что мы снова приходим к случаю притягивающей силы с центром в M, пропорциональной расстоянию MP (п. 10). Следовательно, речь идет о плоском движении, и траекторией, вообще говоря, будет эллипс, имеющий центр в точке M. В частном случае, в зависимости от начальных условий, этот эллипс может оказаться окружностью или отрезком прямой.

39. Во всяком случае достаточно принять во внимание максимальные и минимальные значения, достигаемые тремя функциями (74), чтобы убедиться, что траектория не выходит из прямоугольного параллелепипеда, заключенного между тремя парами параллельных плоскостей: $x = \pm r_1$, $y = \pm r_2$, $z = \pm r_3$. Легко также убедиться, что во всякой точке, общей для траектории и грани этого параллелепипеда, кривая будет касаться плоскости грани. Например, движущаяся точка будет находиться на плоскости $x = r_1$ во все такие и только такие моменты, когда $\cos(\omega_1 t + \theta_1)$ будет равен единице, т. е. когда $\omega_1 t + \theta_1$ становится кратным 2π; в эти моменты $\dot{x} = -r_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1)$ исчезает, так что скорость (а следовательно, и касательная к траектории) будет лежать как раз в плоскости $x = r_1$.

Здесь необходимо сделать одно общее замечание. *Когда величины* ω_1, ω_2, ω_3 *несоизмеримы между собой* (непериодическое движение), *траектория практически заполняет вышеуказанный параллелепипед* в том смысле, что для любой взятой внутри параллелепипеда точки P_1 и наперед заданного произвольно малого положительного δ движущаяся точка пройдет (бесконечное число раз) на расстоянии от P_1, меньшем чем δ.

Для простоты рассуждения рассмотрим случай плоского движения

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad y = r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2). \tag{75}$$

Здесь речь будет итти о том, чтобы доказать, что в предположении несоизмеримых ω_1 и ω_2 траектория пройдет (бесконечное число раз) внутри круга, имеющего центр в произвольно выбранной в прямоугольнике $x = \pm r_1$, $y = \pm r_2$ точке P_1 и с произвольно малым радиусом δ.

Для этой цели, обозначив через x_1, y_1 координаты точки P_1 (заключенные соответственно между $-r_1$ и r_1 и $-r_2$ и r_2), заметим, что если t_1 есть решение уравнения

$$r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) = x_1$$

относительно t, то движущаяся точка будет иметь абсциссу x_1 во все следующие моменты:

$$t_1 + 2n_1 \frac{\pi}{\omega_1}, \tag{76}$$

где n_1 обозначает любое целое число. Точно так же, если t_2 есть решение уравнения

$$r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) = y_1,$$

ордината движущейся точки принимает значение y_1 во все моменты

$$t_2 + 2n_2 \frac{\pi}{\omega_2}, \tag{76'}$$

где n_2 обозначает другое произвольное целое число.

С другой стороны, вследствие (равномерной) непрерывности функций (75) мы можем определить достаточно малое число ε так, чтобы в каждом промежутке времени величиной 2ε колебание как функции $x(t)$, так и функции $y(t)$ было меньше $\delta/2$. Сообразно с этим в каждом из промежутков времени от $t_1+2n_1\pi/\omega-\varepsilon$ до $t_1+2n_1\pi/\omega+\varepsilon$ мы будем иметь

$$|x-x_1|<\frac{\delta}{2}; \tag{77}$$

точно так же в каждом из промежутков времени от $t_2+2n_2\pi/\omega_2-\varepsilon$ до $t_2+2n_2\pi/\omega_2+\varepsilon$ будем иметь

$$|y-y_1|<\frac{\delta}{2}. \tag{77'}$$

Рассмотрим теперь величину промежутка времени, заключенного между любыми моментами (76) и (76′)

$$\left|t_1-t_2+2\pi\left(\frac{n_1}{\omega_1}-\frac{n_2}{\omega_2}\right)\right|.$$

При заданной несоизмеримости величин ω_1 и ω_2 бесчисленным множеством способов можно определить целые числа n_1 и n_2 таким образом, что эта величина промежутка времени получится меньше ε[1]). Тогда во всем промежутке времени, заключенном между двумя

[1]) Так как замечание, приведенное в тексте (и известное еще Якоби), представляет собой частный случай классической теоремы Кронекера (*Berl. Sitzungsber.*, 1884), то уместно будет дать здесь его доказательство. Речь идет о том, чтобы показать, что *если даны два числа α_1 и α_2, отношение которых иррационально* (эти числа в дальнейшем мы отождествляем с $2\pi/\omega_1$, $-2\pi/\omega_2$) *и какое-нибудь третье число P* (которое мы потом отождествим с t_2-t_1), *то соответственно всякому как угодно малому числу ε можно выбрать два таких целых числа n_1, n_2 (положительных или отрицательных), чтобы иметь*

$$|n_1\alpha_1+n_2\alpha_2-p|<\varepsilon.$$

Начнем с доказательства того, что биномы типа $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2$ могут как угодно близко апроксимировать нуль; с этой целью последовательно возьмем $n_1=1, 2, 3, \ldots$, и к каждому целому n_1 добавим целую часть n_2 частного $|n_1\alpha_1/\alpha_2|$, взятую со знаком, противоположным знаку частного α_1/α_2. Для всякой пары определенных таким образом чисел будем иметь

$$|n_1\alpha_1+n_2\alpha_2|<|\alpha_2|;$$

а так как вследствие иррациональности отношения α_1/α_2 биномы $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2$ будут все неравны между собой и число этих биномов бесконечно, то совокупность их допускает по крайней мере одно предельное значение (заключенное между α_2 и $-\alpha_2$). Если зададимся тогда как угодно малым и положительным ε, то в совокупности будет существовать сколько угодно биномов, отличающихся по модулю от этого предельного значения на величину, меньшую чем $\varepsilon/2$; поэтому разность между двумя из них, выбранными как моментами (76) и (76′), определенном таким образом, будут совместно выполнены оба неравенства (77) и (77′). Имея в виду неравенство

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \leqslant |x-x_1|+|y-y_1|,$$

заключаем, что движущаяся точка проходит от P_1 на расстоянии, меньшем δ. Распространение этого рассуждения на случай аналогичного движения в трех измерениях очевидно.

§ 7. Движение точки по поверхности без трения. Геодезические линии. Случай поверхности вращения

40. Перейдем теперь к некоторым задачам динамики точки в двух измерениях или с двумя степенями свободы.

Наиболее простым является случай материальной точки P, которая под действием активных сил с результирующей $\boldsymbol{F}$ вынуждена двигаться по поверхности σ без трения. Пусть уравнение поверхности σ имеет вид

$$f(x, y, z \mid t) = 0, \tag{78}$$

где аргумент t входит явно, если поверхность изменяется с течением времени.

Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, определяющие движение точки P, должны тождественно удовлетворять уравнению (78), откуда следует, что они будут удовлетворять также и равенству

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial f}{\partial t}=0. \tag{79}$$

Может случиться, что точка P, будучи свободной, движется по поверхности σ вследствие самой природы активной силы $\boldsymbol{F}$. Но, вообще говоря, это произойдет лишь тогда, когда точка P удерживается на поверхности σ связью, осуществленной каким-либо способом.

Тогда наряду с активной силой $\boldsymbol{F}$ (закон действия которой по предположению является заданным) мы будем иметь неизвестную реакцию $\boldsymbol{R}$, источником которой является связь, а потому резуль-

---

угодно, которая будет тоже биномом вида $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2$, по абсолютной величине будет меньше, чем ε.

Заметив это, возьмем теперь снова заданное число p и, выбрав на основании только что сказанного бином $n_1^*\alpha_1+n_2^*\alpha_2=q$, для которого $|q|<\varepsilon$, обозначим через N целую часть дроби $|p/q|$ так, чтобы было

$$\left|\frac{p}{q}\right| = N+r$$

при $r<1$. Отсюда следует

$$|p| = N|q| + r|q|,$$

а так как $r|q|$ меньше $|q|$ и, следовательно, меньше ε, то мы заключаем, что Nq или $-Nq$, которое во всяком случае является биномом типа $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2$, отличается от p по абсолютной величине на значение, меньшее чем ε.

тирующая сила, действующая на точку, будет состоять не только из силы $\boldsymbol{F}$, а из суммы $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}$, так что уравнение движения будет иметь вид

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}, \tag{80}$$

где m обозначает массу точки P и $\boldsymbol{a}$ — ее ускорение. Как для действительного интегрирования уравнения, так и для истолкования физического смысла задачи важно заметить следующее. *Если точка движется по некоторой неподвижной поверхности без трения, то для нее будет иметь место теорема живых сил.*

Действительно, если мы умножим скалярно обе части равенства (80) на $\boldsymbol{v}dt=dP$ и вспомним, что $m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}dt$ есть дифференциал живой силы $T=\frac{mv^2}{2}$ точки, а $\boldsymbol{F}\cdot dP$ есть элементарная работа dL активной силы, то получим

$$dT=dL+\boldsymbol{R}\cdot dP.$$

Но в силу предположения об отсутствии трения реакция $\boldsymbol{R}$ нормальна к поверхности σ. С другой стороны, так как уравнение поверхности по предположению не зависит от времени, то перемещение dP от любой точки поверхности σ до точки, бесконечно близкой к ней на той же поверхности, лежит в касательной плоскости. Отсюда следует, что $\boldsymbol{R}$ и dP в любой момент ортогональны, а потому в течение всего движения будет существовать равенство

$$dT=dL, \tag{81}$$

которое, как и в случае свободной точки, выражает теорему живых сил (т. I, гл. VIII, п. 9).

Отметим еще, что если речь идет о неподвижной поверхности, то произведение $\boldsymbol{R}\cdot dP$ можно рассматривать также (т. I, гл. VI, п. 13; гл. XV, п. 3) как виртуальную работу реакции, а потому из общего принципа виртуальной работы прямо следует, что она обращается в нуль.

41. Так же как и в случае свободной точки, если действующая сила консервативна и U есть ее потенциал, то равенство (81) принимает вид

$$dT=dU,$$

откуда, интегрируя, получим

$$\frac{mv^2}{2}=U+E,$$

где через E обозначена постоянная интеграции, или, иначе,

$$\frac{mv^2}{2}-U=E,$$

т. е. *полная энергия движущейся точки не изменяется во время движения.*

Если обозначим через v_0, U_0 значения скорости и потенциала в любом положении P_0, то предыдущее уравнение можно будет написать в виде

$$\frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = U - U_0.$$

Это равенство может быть истолковано аналогично тому, как это делалось в случае движения точки по заданной кривой (гл. I, п. 14). Из него, между прочим, следует, что если две материальные точки с одинаковой массой выходят из положения P_0 с равными скоростями и находятся под действием одной и той же консервативной силы, то даже если одна из них свободна, а другая связана с поверхностью, по которой она может двигаться без трения, они будут приходить в точки, в которых потенциал имеет одно и то же значение, с одинаковыми скоростями. Так, например, если две материальные точки с равной массой, выходя из одного и того же положения и из состояния покоя, движутся в пустоте под действием силы тяжести, причем одна из них свободно падает, а другая остается на заданной поверхности без трения, то на одинаковых высотах они будут иметь одинаковые скорости.

42. Реакция R, как мы уже упоминали, неизвестна; предполагая, что поверхность σ гладкая, найдем, что реакция R должна быть нормальной к поверхности σ (точнее, к той конфигурации, которую поверхность σ принимает в любое заданное мгновение, если эта поверхность изменяется с течением времени). Отсюда следует, что направляющие косинусы реакции R пропорциональны частным производным $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, а ее составляющие будут иметь вид

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z},$$

где λ обозначает множитель пропорциональности, заранее неизвестный (*множитель Лагранжа*) и связанный с величиной R соотношением

$$R^2 = \lambda^2\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Здесь трехчлен, стоящий в скобках, естественно, зависит в силу уравнения (78) от положения, которое занимает движущаяся точка на поверхности в любое рассматриваемое мгновение.

Проектируя теперь уравнение (80) на оси, мы получим три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad (80')$$

которые вместе с уравнением (78) образуют систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными: x, y, z (основными) и λ (вспомогательной). Исключая λ из уравнений (80′), получим два уравнения с основными неизвестными, которые вместе с уравнением (78) определяют эти неизвестные на основании начальных условий. Тогда движение будет полностью известно, и достаточно воспользоваться каким-нибудь одним из уравнений (80′), чтобы получить значение λ, если нужно определить величину реакции.

43. Но если движение известно, то для величины реакции R можно дать более удобную формулу.

Предположим для определенности, что поверхность σ в некоторой окрестности рассматриваемой точки расположена вся по одну сторону от касательной плоскости, и обозначим через N нормаль, направленную в сторону вогнутости. Обозначив через t касательную к траектории, рассмотрим сечение поверхности σ плоскостью tN (нормальное сечение по касательной к траектории) и обозначим через φ угол, который составляет главная нормаль к траектории (направленная к центру кривизны) с нормалью к поверхности N. По предположению, сделанному относительно поверхности σ, этот угол острый, а, с другой стороны, если r и r_0 — радиусы кривизны траектории и нормального сечения касательной в точке касания, то по теореме Мёнье[1]) имеем

$$r = r_0 \cos\varphi.$$

Проектируя уравнение (80) на n, получим

$$m\frac{v^2}{r} = F_n + R_n,$$

или на основании предыдущей формулы

$$m\frac{v^2}{r_0} = (F_n + R_n)\cos\varphi.$$

---

[1]) Шарль Мёнье де ля Пляс (Charle Meusnier de la Place) родился в Туре в 1752 г., был офицером французских инженерных войск и достиг звания дивизионного генерала. Умер от ранения близ Майнца в 1793 г. Был членом Парижской Академии наук и сделался известным благодаря своему Mémoire sur la courbure des surfaces, *Mém. des Sav. étrang.*, 1776.

Но так как обе нормали N и n ортогональны к касательной t, а вектор $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}$ лежит в соприкасающейся плоскости tn траектории и может быть разложен по направлениям t и n, то имеем

$$F_N + R_N = (F_n + R_n)\cos\varphi.$$

Из этого и из предыдущего равенств, имея в виду, что R_N по своей абсолютной величине дает величину R реакции, мы получим формулу

$$R_N = \pm R = \frac{mv^2}{r_0} - F_N.$$

44. Движение по инерции*). Если предположим, что *активные силы равны нулю*, т. е. что движение точки P по поверхности σ происходит благодаря начальной скорости (и реакции поверхности), то *траекторией движущейся точки будет геодезическая линия, описываемая с постоянной скоростью.*

Действительно, ускорение, как мы знаем, находится в соприкасающейся плоскости траектории, в ней же будет лежать и сила. Так как эта последняя сводится к реакции, которая в силу предположения об отсутствии трения будет всегда нормальной к поверхности, то траектория необходимо должна быть геодезической линией.

Кроме того, так как сила, а вместе с ней и ускорение, всегда направлены по главной нормали к траектории, то отсюда следует, что касательная составляющая $\ddot{s}$ ускорения постоянно равна нулю и, следовательно, движение является равномерным.

То же самое следует и из теоремы (81) живых сил, которая вследствие того, что активная сила равна нулю, сводится здесь к равенству $dT=0$, откуда следует, что T, а потому и скорость v постоянны.

---

*) Рассматриваемое здесь движение точки по поверхности без участия активных сил по установившейся в нашей научной литературе традиции называется *движением по инерции* (Г. К. Суслов, „Теоретическая механика", 1946, стр. 207 и сл., 521 и сл.). Основанием для этого служит то обстоятельство, что величина скорости точки в таком движении не изменяется, а траекторией точки является геодезическая линия; такое же движение совершает свободная материальная точка по отношению к инерциальной системе отсчета, если не действуют никакие силы, т. е. при движении по инерции в собственном смысле слова.

Авторы называют движение без участия активных сил спонтанным (spontaneus — самопроизвольный) и различают движение по инерции от спонтанного движения; основание для этого заключается в том, что при спонтанном движении ускорения не равны нулю, а при движении по инерции в тесном смысле слова они равны нулю.

При переводе мы сохранили установившуюся у нас терминологию. (*Прим. ред.*).

45. Предположим, в частности, что поверхность σ есть поверхность вращения; тогда всякая нормаль к ней пересекает ось, и в случае отсутствия активных сил, сила, сводящаяся здесь только к нормальной реакции, подходит к типу б) п. 2. В этом случае, следовательно, помимо *интеграла живых сил* (дающего постоянство скорости), будет иметь место также и *интеграл площадей* на плоскости, нормальной к оси вращения (относительно центра соответствующей параллели).

В следующем пункте мы покажем, какие выгоды получаются при интегрировании уравнений движения, если оба упомянутых первых интеграла существуют одновременно; здесь же мы выведем из них только известное геометрическое свойство геодезических линий поверхностей вращения.

Если за ось z возьмем ось вращения, то интеграл площадей примет известную форму

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \text{const};$$

так как скорость v остается постоянной, то вдоль геодезической линии будем иметь

$$x\frac{\dot{y}}{v} - y\frac{\dot{x}}{v} = \text{const}. \tag{82}$$

С другой стороны, если, опустив из точки $P(x, y, z)$ геодезической линии перпендикуляр PQ на ось, обозначим через r радиус QP параллели, проходящей через P, то направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{QP}$ будут равны

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad 0,$$

в то время как для касательной к параллели в точке P (ортогональной к QP и к оси z) эти направляющие косинусы будут равны

$$\mp\frac{y}{r}, \quad \pm\frac{x}{r}, \quad 0,$$

где выбор знака зависит от того, какое из двух направлений на касательной принимается за положительное. А так как равенство (82) можно написать в виде

$$r\left(-\frac{\dot{x}}{v}\frac{y}{r} + \frac{\dot{y}}{v}\frac{x}{r}\right) = \text{const},$$

то произведение радиуса r параллели на косинус угла, который геодезическая линия образует с параллелью, не изменяется вдоль одной и той же геодезической линии. Называя *азимутом* геодезической линии в любой ее точке угол, который она там составляет с меридианом (дополнительный для угла с параллелью), имеем: *вдоль геодезической линии произведение из радиуса параллели на синус азимута есть величина постоянная* (формула Клеро[1]).

46. Возьмем снова два первых интеграла:

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= v_0^2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c, \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

определенных ранее для движения точки P по поверхности вращения σ без трения и при отсутствии активных сил. Мы увидим, что благодаря наличию этих интегралов мы придем к интегрированию уравнений движения (и, следовательно, в частности, к определению геодезических линий поверхности вращения σ) посредством одной квадратуры, как мы это уже видели при аналогичных обстоятельствах для задачи о движении свободной точки под действием центральной силы (п. 8). Кроме того, так как требующееся здесь аналитическое исследование совершенно аналогично исследованию, которое было выполнено в случае центрального движения, мы можем несколько сократить изложение.

Возьмем цилиндрическую систему координат ρ, θ, z, где ρ есть существенно положительное расстояние любой точки P от оси вращения z, θ есть угол полуплоскости zP, отсчитываемый как положительный при правом вращении относительно ориентированной оси z и z — обычная третья декартова координата точки P. Уравнение поверхности вращения в этих координатах имеет вид

$$\rho = f(z).$$

Принимая во внимание тождества

$$\left.\begin{aligned} v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 &= \dot{z}^2(1 + f'^2) + f^2\dot{\theta}^2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2\dot{\theta} &= f^2\dot{\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

оба первых интеграла (83) можно будет написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}^2(1 + f'^2) + f^2\dot{\theta}^2 &= v_0^2, \\ f^2\dot{\theta} &= c. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

[1]) Алексис Клод Клеро (Alexis Claude Clairaut) родился в Париже в 1713 г., умер там же в 1765 г.; необычайно рано проявил свой талант. Двенадцати лет читал мемуар по теории кривых в Парижской Академии наук и восемнадцати лет был принят в ее члены. Непосредственный продолжатель Ньютона во Франции он построил систематическую теорию движения Луны, выполняя и табулируя числовые выкладки. Принимал участие во французской экспедиции по измерению градуса в Лаппонии в 1736—1737 гг. Можно сказать, что своей классической работой Théorie de la figure de la Terre Клеро положил начало высшей геодезии.

Здесь мы положили $df/dz = f'$. Если постоянная площадей c равна нулю и ρ тоже постоянно равно нулю (для чего требуется, чтобы координата z была и оставалась нулем функции $f(z)$), то из первого из уравнений (85) будем иметь $v_0 = 0$, и движущаяся точка P будет оставаться в равновесии в одной из точек пересечения поверхности вращения со своей осью.

Если, далее, $c = 0$, но ρ не постоянно равно нулю, то из интеграла площадей найдем $\dot{\theta} = 0$ и, следовательно, $\theta = \text{const}$. Это значит, что точка P движется по одному из меридианов с постоянной по модулю скоростью v_0.

Если предположим теперь, что $c \neq 0$, то из интеграла площадей, как и в п. 6, найдем, что угол θ будет монотонной функцией времени. При этом всегда можно выбрать положительное направление отсчета угла θ вокруг оси z таким образом, чтобы θ была возрастающей (или по крайней мере никогда не убывающей) функцией от t, или, что в сущности то же, предположить, что $c > 0$.

Вследствие однозначной обратимости функции $\theta(t)$ можно также и здесь принять за независимую переменную θ вместо t; если траектория определена, например путем выражения z в функции от θ, то закон движения можно получить посредством одной квадратуры из интеграла площадей.

Для определения траектории (геодезической линии на поверхности вращения) возьмем снова интеграл живых сил и, рассматривая в нем z как сложную функцию от t через θ: исключим $\dot{\theta}$ при помощи интеграла площадей. Для функции $z(\theta)$, которая определяет траекторию на поверхности, мы получим таким образом дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \frac{f^2(v_0^2 f^2 - c^2)}{c^2(1 + f'^2)}, \tag{86}$$

являющееся уравнением обычного типа, интегрируемым посредством одной квадратуры; уравнение такого вида рассматривалось нами в § 6 гл. I.

Следовательно, к настоящему частному случаю применимы все выводы, к которым мы пришли в общем случае. Остановимся на истолковании для поверхности вращения результата, относящегося к наиболее интересному случаю, когда начальное значение z_0 координаты z заключено между двумя простыми нулями z_1 и z_2 функции $\Phi(z)$, представляемой правой частью уравнения (86), и функция $\Phi(z)$ остается между z_1 и z_2 положительной. Геодезическая линия, траектория точки, располагается в этом случае на поверхности вращения, между двумя параллелями с координатами z_1 и z_2, попеременно касаясь то одной, то другой параллели в точках, отстоящих друг от друга на один и тот же угол (апсидальный угол проекции траектории на плоскость $z = 0$).

Если, далее, начальное значение z_0 является кратным нулем функции $\Phi(z)$, то z будет оставаться постоянным, как бы ни изменялось θ, т. е. траектория движущейся точки на поверхности сводится к параллели.

§ 8. Движение без трения тяжелой точки по поверхности вращения с вертикальной осью

47. В этом случае также существуют оба первых интеграла, что позволяет свести задачу к квадратурам и вести рассуждения совершенно аналогично рассуждениям предыдущего пункта.

Отнесем поверхность вращения к той же системе координат и воспользуемся уравнением, выведенным в предыдущем пункте с единственным добавочным условием, что ось z направлена вниз.

Силу тяжести g, действующую на материальную точку P, массу которой, как обычно, примем за единицу, будем считать постоянной по величине и направлению. Так как такая сила имеет потенциал (отнесенный к единице массы) gz, то для нашей задачи будет иметь место интеграл живых сил

$$\frac{v^2}{2} - gz = E.$$

С другой стороны, так как речь идет о силе, всегда компланарной с осью z (наряду с реакцией), то существует также и интеграл площадей для плоскости $z = 0$ (относительно начала)

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c.$$

Эти первые интегралы, выраженные в цилиндрических координатах, на основании равенств (84) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[\dot{z}^2(1+f'^2)+f^2\dot{\theta}^2\right]-gz=E,\\ f^2\dot{\theta}=c. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Если положим $c = 0$ и исключим возможные состояния равновесия в точках поверхности, расположенных на оси z ($\rho = 0$), то получим $\theta = \text{const}$. Такое движение осуществляется в математическом маятнике (гл. I, пп. 33—41) и циклоидальном маятнике Гюйгенса (там же, п. 43). Движение будет определяться первым уравнением системы (87), которое здесь примет вид

$$\dot{z}^2 = \frac{2(E+gz)}{1+f'^2}.$$

Это уравнение обычного типа, изученного в § 6, гл. I, и поэтому оно может быть шаг за шагом исследовано путем приложения установленных там общих приемов; уравнение интегрируется одной квадратурой.

Если, далее, $c \neq 0$, то можно также и здесь предположить $c > 0$, и закон движения получится посредством одной квадратуры из интеграла площадей; точно так же легко определится и траектория, если выразить z в функции от θ. Для этой функции $z(\theta)$ тем же способом, как и в предыдущем пункте, найдем дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \frac{f^2\,[2(E+gz)f^2 - c^2]}{c^2(1+f'^2)}, \tag{88}$$

которое приводится к обычному типу, уже несколько раз встречавшемуся ранее. Излишне поэтому останавливаться на возможных случаях, которые могут представиться в отношении вида траектории на поверхности (траектория идет по поверхности между двумя параллелями, обращаясь вокруг оси в одну сторону, и касается попеременно то одной, то другой параллели, или же сводится к параллели), тем более, что мы к этому вернемся, когда будем разбирать замечательный частный случай, которым займемся в следующем пункте.

Заметим только, что формулы и рассуждения этого пункта без существенных изменений распространяются и на тот случай, когда точка, движущаяся по гладкой поверхности вращения, находится под действием консервативной силы, являющейся производной от некоторого потенциала U, который зависит только от z, или, на основании равенства $z = f(\rho)$, только от ρ, или, наконец, от положения движущейся точки на меридиане поверхности. С аналитической точки зрения все сведется к замене в формулах потенциала силы тяжести gz функцией U.

48. Сферический маятник. Под этим названием подразумевается материальная точка P, вынужденная двигаться по сфере с заданным центром O и заданным радиусом l.

Практически эта связь осуществляется посредством гибкой и нерастяжимой нити или посредством твердого стержня OP длины l, весом которого можно пренебречь и который может свободно вращаться вокруг O. Если мы отвлечемся от всякого пассивного сопротивления, оказываемого подвесом и окружающей средой (т. е. схематически, от трения о сферическую поверхность), то задача о движении сферического маятника будет не чем иным, как частным случаем задачи, изученной в предыдущем пункте.

Чтобы сделать исследование более простым, предположим сначала, что подвес P осуществлен посредством твердого стержня (двусторонняя связь). Выберем начало координат в O и примем ту же систему отсчета, что и в предыдущем пункте; уравнение сферы в цилиндрических координатах имеет вид

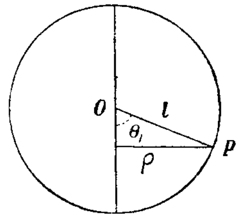
$$\rho^2 = l^2 - z^2,$$

а два первых интеграла (87) принимают в данном случае форму

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[\frac{l^2\dot z^2}{l^2-z^2}+(l^2-z^2)\dot\theta^2\right]-gz=E \\ (l^2-z^2)\dot\theta=c. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

При $c=0$ (исключая возможные состояния равновесия в самой нижней и самой высшей точках сферы) мы снова приходим к движению математического маятника (предыдущий пункт). Это можно проверить на формулах, замечая, что в этом случае движение определяется интегралом живых сил, в котором надо положить $\dot\theta=0$, т. е. уравнением

$$\frac{1}{2}\frac{l^2\dot z^2}{l^2-z^2}-gz=E.$$



Фиг. 12.

Если обозначим через θ_1 угол отклонения стержня от вертикали, то будем иметь (фиг. 12)

$$z=l\cos\theta_1, \quad \dot z=-l\dot\theta_1\sin\theta_1,$$

и предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{1}{2}l^2\dot\theta_1^2-gl\cos\theta_1=E.$$

А это и есть выведенный ранее (п. 35 гл. I) интеграл живых сил для математического маятника.

49. Если предположить $c\neq 0$ (и, как обычно, $c>0$) и принять за независимое переменное θ вместо t, то функция $z(\theta)$, определяющая на сфере траекторию маятника, будет решением дифференциального уравнения

$$c^2l^2\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2=(l^2-z^2)^2\left[2(gz+E)(l^2-z^2)-c^2\right], \tag{90}$$

которое выводится уже неоднократно применявшимся способом из первых интегралов (89) или, проще, из уравнения (88), п. 47, если положить в нем

$$f(z)=\sqrt{l^2-z^2}.$$

Чтобы знать характер движения, необходимо, как обычно, принять во внимание распределение нулей функции, стоящей в правой части уравнения (90),

$$\Phi(z)=(l^2-z^2)\left[2(gz+E)(l^2-z^2)-c^2\right],$$

которые, кроме двух очевидных $z=\pm l$, определяются из уравнения третьей степени

$$\Phi_1(z)\equiv 2(gz+E)(l^2-z^2)-c^2=0.$$

Заметим теперь, что при каком-нибудь движении маятника начальное значение z_0 переменной z, дающее „высоту" точки на сфере, необходимо будет заключено между $-l$ и $+l$; при этом можно исключить случай, когда оно равно одному из этих крайних значений, так как, если бы было $z_0 = \pm l$, то из интеграла площадей, вычисленного для начала движения, получилось бы $c = 0$, и мы пришли бы к уже рассмотренному случаю. С другой стороны, для действительного движения должно быть $\Phi(z_0) \geqslant 0$, а следовательно, также и $\Phi_1(z_0) \geqslant 0$, так как мы уже имеем $l^2 - z_0^2 > 0$. Рассмотрим отдельно два случая: $\Phi_1(z_0) > 0$ и $\Phi_1(z_0) = 0$.

а) $\Phi_1(z_0) > 0$. В этом предположении функция $\Phi_1(z)$, принимающая при $z = \pm l$ отрицательное значение $-c^2$, необходимо имеет нуль z_1 между $-l$ и z_0 и другой нуль z_2 между z_0 и l. Так как, с другой стороны, функция $\Phi_1(z)$ при $z \to -\infty$ стремится к $+\infty$, то она допускает третий нуль z_3, меньший $-l$, откуда заключаем, что каждый из трех нулей оказывается простым. Интеграл уравнения (90) после подстановки начального значения z_0 (заключенного между двумя последовательными простыми нулями z_1 и z_2, между которыми функция $\Phi_1(z)$, а следовательно, и $\Phi(z)$ остается положительной) определяет функцию $z(\theta)$, колеблющуюся между значениями z_1 и z_2 таким образом, что всякий раз, когда она достигает одного из этих крайних значений, ее производная обращается в нуль: $\frac{dz}{d\theta} = 0$.

Интерпретируя этот результат, мы увидим, что маятник, обращаясь вокруг вертикали, остается внутри сферической зоны, заключенной между двумя параллелями с высотами z_1 и z_2, касаясь попеременно то одной, то другой параллели в точках, которые следуют друг за другом через равные угловые интервалы.

Необходимо отметить, что плоскость, равноудаленная от двух параллелей с высотами z_1 и z_2, будет всегда ниже экватора. Действительно, в силу известного соотношения между корнями и коэффициентами уравнения третьей степени имеем

$$z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = -l^2 \quad \text{или же} \quad (z_1 + z_2) z_3 = -(l^2 + z_1 z_2).$$

Так как корни z_1 и z_2 по абсолютной величине оба меньше l и z_3 отрицателен, то заключаем, что $z_1 + z_2 > 0$, а следовательно, и $\frac{z_1 + z_2}{2} > 0$.

б) $\Phi_1(z_0) = 0$. Здесь необходимо различать два случая, смотря по тому, будет ли z_0 простым нулем функции Φ_1, или нет. В первом случае, так как всегда $\Phi_1(\pm l) = -c^2$, находим, смотря по тому, будет ли функция $\Phi_1(z_0)$ возрастающей или убывающей, что она допускает обязательно еще один корень, заключенный между z_0 и l, или соответственно между z_0 и $-l$. А так как всегда существует корень, меньший $-l$, то оба корня z_0, z_1 вместе с третьим будут простыми, и функция $\Phi_1(z)$ остается положительной, пока z остается внутри интервала (z_1, z_2). Поэтому мы снова находим движение типа, рассмотренного в п. а), с той только разницей, что здесь движущаяся точка вначале находится на одной из двух параллелей, ограничивающих зону, внутри которой извивается траектория.

Если, наконец, z_0 не является простым нулем функции $\Phi_1(z)$ (он может быть только двойным, поскольку всегда существует нуль, меньший $-l$), то из общей теории заключаем, что в течение всего движения будет иметь место равенство $z=z_0$, т. е. траектория оказывается параллелью с высотой z_0.

При помощи тех же соображений, которые были изложены в случае а), доказывается, что эта параллель расположена под экватором.

Отказываясь от продолжения интересных рассуждений, которые возникают при более точном разборе движения сферического маятника, мы ограничимся лишь указанием на то, что для этой цели удобно рассматривать проекцию траектории на экваториальную плоскость.

50. Вычисление реакции. Реакция R, которую развивает связь, наложенная на сферический маятник, во время движения, в силу предположения об отсутствии трения всегда направлена по прямой PO в ту или другую сторону. Она определяется из уравнения

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}+\boldsymbol{R}, \tag{91}$$

где $\boldsymbol{a}$ обозначает ускорение точки P, и реакция $\boldsymbol{R}$ считается отнесенной к единице массы маятника.

Во время движения остается справедливым тождество

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}=l^2,$$

из которого, беря последовательно два раза производную по времени и вводя скорость $\boldsymbol{v}$ точки P, получим

$$\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}^2=0;$$

исключая отсюда $\boldsymbol{a}$ при помощи равенства (91), имеем

$$\boldsymbol{v}^2+\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{g}+\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{R}=0.$$

Наконец, выполняя скалярное умножение и обозначая через R_N проекцию реакции $\boldsymbol{R}$ на нормаль PO сферы, направленную к центру (которая может отличаться от модуля R реакции только знаком, так как реакция $\boldsymbol{R}$ нормальна к поверхности сферы), получим

$$v^2+gz-lR_N=0.$$

Но из интеграла живой силы имеем

$$v^2 = 2(gz + E), \tag{92}$$

так что, исключая скорость, найдем

$$R_N = \frac{3gz + 2E}{l}. \tag{93}$$

Впрочем, к этому результату можно прийти значительно быстрее, применяя общую формулу, выведенную в п. 43 (надо помнить, что здесь $m = 1$),

$$R_N = \frac{v^2}{r_0} - F_N.$$

Если вместо v^2 подставить ее величину, определяемую из интеграла живых сил (92), и принять во внимание, что в настоящем случае r_0 (радиус нормального сечения через касательную к траектории) равен l, а составляющая веса единицы массы F_N по нормали PO есть $-\frac{gz}{l}$, то получится как раз формула (93).

Заметим, кроме того, что если вводится, как в п. 48, угол θ_1 маятника P с осью Oz в плоскости меридиана, то достаточно положить $z = l\cos\theta_1$, чтобы формула (93) приняла вид

$$R_N = 3g\cos\theta_1 + 2\frac{E}{l}.$$

Если примем во внимание, что выше (п. 35, гл. I) мы положили $e = \frac{E}{gl}$, то это равенство становится тождественным с выражением, полученным в п. 39 для реакции в случае математического маятника.

51. Равенство (93) показывает, что реакция R_N будет положительной, если высота точки P больше $-\frac{2E}{3g}$, и отрицательной, если она меньше $-\frac{2E}{3g}$, т. е. реакция направлена или от точки P к центру подвеса O, или в противоположную сторону. Если точка P в своем движении достигает параллели (которую можно назвать критической) с высотой

$$z = -\frac{2}{3}\frac{E}{g}$$

(зависящей от полной энергии E и, следовательно, от начальных условий рассматриваемого движения), то реакция обращается в нуль.

Если подвес маятника физически осуществлен посредством твердого стержня (двусторонняя связь), то эти различные возможности все в одинаковой мере совместимы с такой постановкой задачи. При этом стержень испытывает растяжение или сжатие, смотря по тому, находится ли точка ниже или выше критической параллели, и, как говорят, „не работает“ в те моменты, когда точка достигает этой параллели, и R_N исчезает.

Движение будет несколько иным, если маятник подвешен на нити, так как в этом случае односторонняя связь действует только до тех пор, пока R_N остается положительной, т. е. до тех пор, пока точка остается ниже критической параллели (соответствующей рассматриваемому движению). Если P в своем движении достигает этой параллели, то в этот момент связь перестает действовать и остается только сила тяжести. Если же в непосредственно следующий за этим момент нить благодаря действию на маятник силы тяжести останется ненатянутой, то точка будет двигаться свободно под действием силы тяжести, описывая дугу параболы (или, в частности, отрезок прямой), которая плавно сопрягается (см. п. 39 гл. I) с предшествующей дугой траектории на сфере. Это параболическое движение будет продолжаться до того момента, когда нить снова будет натянута; с этого момента начнется новая фаза движения по законам сферического маятника.

Не входя в подробное исследование этого вопроса, заметим (это, впрочем, ясно и из интуитивных соображений), что реакция R_N, конечно, остается положительной, пока движущаяся точка находится ниже точки подвеса O, т. е. при $z > 0$. Действительно, если рассматриваемое движение таково, что полная энергия E положительна (или равна нулю), то неравенство $z > -\frac{2E}{3g}$ непосредственно выполняется при $z > 0$. Если же $E < 0$, то критическая параллель, имея положительную высоту, будет, конечно, ниже точки O, но точка P в своем движении не может уже ее достигнуть, потому что при наличии интеграла (92) живых сил в любой момент должно быть $z > -\frac{E}{g}$, а следовательно, и тем более $z > -\frac{2E}{3g}$.

Из предыдущего рассуждения следует, что движениями, которые могут дать начало параболическому движению, оказываются только те, полная энергия которых положительна. С другой стороны, исключаются и движения простого вращения около вертикали точки O, потому что, как мы видели в п. 49, параллель, описываемая точкой P, будет всегда ниже точки O.

Поэтому имеет смысл исследовать возможность указанного выше критического положения только для таких движений, для которых полная энергия была бы положительна, а масса маятника при замене нити стержнем совершала бы движение по сфере между двумя параллелями, верхняя из которых была бы выше центра O.

52. Малые колебания сферического маятника около положения устойчивого равновесия. Пусть для сферического маятника положение M на нисходящей от точки подвеса O вертикали является положением устойчивого равновесия (действительный максимум потенциала), так что масса маятника, предоставленная самой себе в положении, достаточно близком к M, с достаточно малой скоростью (или с достаточно малой живой силой), будет бесконечно долго колебаться в непосредственной близости от M со скоростью (или с живой силой), которая не будет превосходить некоторого произвольного, наперед заданного предела. Чтобы изучить характер этих малых колебаний, отнесем их к системе осей с началом в точке M и с осью z, направленной по вертикали вниз (оси x, y будут, следовательно, горизонтальными).

При этой системе координат уравнение сферы (с центром в точке $0, 0, -l$ и с радиусом l), по которой движется точка P, будет

$$x^2+y^2+(z+l)^2-l^2=0. \qquad (94)$$

Если, как это соответствует характеру задачи, будем рассматривать отношения

$$\frac{x}{l}, \frac{y}{l}$$

как малые количества первого порядка, то из равенства (94), написанного в виде

$$\frac{z^2}{l}=-1+\left(1-\frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

следует, что отношение z/l есть величина (2) второго порядка, а потому им можно пренебречь по сравнению с отношениями x/l, y/l. Отсюда следует, что в первом приближении малые колебания массы маятника P можно отождествить с колебаниями ее ортогональной проекции на плоскость $z=0$.

С другой стороны, можно уточнить условие медленности, которое входит в определение малых колебаний, допуская, что верхний предел V скорости проекции точки P мал по сравнению со скоростью падения $\sqrt{2lg}$ тяжелого тела с высоты, равной длине маятника, т. е. рассматривая как величину первого порядка также и отношение

$$\frac{V}{\sqrt{2lg}}.$$

Если мы продифференцируем по времени равенство (94) и разделим результат на lV, то, пренебрегая членом с множителем z/l, получим

$$-\frac{\dot{z}}{V}=\frac{x}{l}\frac{\dot{x}}{V}+\frac{y}{l}\frac{\dot{y}}{V},$$

откуда видно, что $\dot{z}/V$ будет величиной первого порядка; после чего, вторично дифференцируя уравнение (94) и полагая $\dot{z} = V(1)$, мы придем опять с точностью до члена с z/l к соотношению

$$-\frac{\ddot{z}}{g} = \frac{v^2}{lg} + \frac{V^2}{lg}(2) + \frac{x}{l}\frac{\ddot{x}}{g} + \frac{y}{l}\frac{\ddot{y}}{g}.$$

Если примем во внимание, что

$$v^2 \leqslant V^2 + \dot{z}^2 = V^2\left(1 + \frac{\dot{z}^2}{V^2}\right),$$

то увидим, что v^2/lg будет величиной второго порядка.

Так как при колебаниях и горизонтальные ускорения $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ будут по отношению к g также малыми, так что отношения $\ddot{x}/g$, $\ddot{y}/g$ сами будут величинами первого порядка, то все члены этого выражения для $\ddot{z}/g$ оказываются порядка выше первого; и в первом приближении мы имеем просто $\ddot{z} = 0$.

Спроектируем теперь уравнение (91) движения маятника на оси x, y, z. Так как составляющие реакции $\boldsymbol{R}$ пропорциональны частным производным от левой части уравнения связи (94), то, обозначая через λ обычный множитель Лагранжа, мы получим три уравнения:

$$\ddot{x} = \lambda x, \quad \ddot{y} = \lambda y, \quad \ddot{z} = \lambda(z + l) + g. \tag{95}$$

Из последнего из этих уравнений, поскольку мы принимаем $z = \ddot{z} = 0$, следует

$$\lambda = -\frac{g}{l}.$$

Подставляя это значение λ в первые два уравнения, мы заключаем, что малые колебания сферического маятника (на горизонтальной плоскости около положения устойчивого равновесия) определяются двумя уравнениями

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0, \quad \ddot{y} + \frac{g}{l}y = 0.$$

Речь идет, следовательно, об эллиптическом периодическом движении точки, притягиваемой центром M с силой, величина которой пропорциональна расстоянию (п. 10); когда начальная скорость проходит через M или равна нулю, то колебания будут просто прямолинейными.

§ 9. Маятник Фуко

53. В предыдущих пунктах (48—52) мы изучали движение сферического маятника относительно осей, неизменно связанных с Землей, рассматривая ее как неподвижную. Поэтому полученные результаты сохраняют свое значение только до тех пор (см. п. 24), пока мы пренебрегаем членами порядка величины угловой скорости ω суточного вращения Земли.

Теперь, очевидно, будет интересно рассмотреть задачу о движении сферического маятника, учитывая это вращение, или, по крайней мере, подойти к дальнейшему приближению, которое было бы достаточным для выявления в относительном движении сферического маятника (по отношению к Земле) некоторых особенностей, доступных опытной проверке, которые отличают его от движения, изученного раньше, т. е. от движения, которое наблюдалось бы, если бы Земля была в покое (или в прямолинейном и равномерном поступательном движении) относительно неподвижных звезд.

Покажем, что для этой цели достаточно приближение, охарактеризованное в п. 25 и затем уточненное в предыдущем пункте.

Другими словами, достаточно рассмотреть одновременно обе схемы задачи, к которым мы пришли при изучении, с одной стороны, влияния вращения Земли на падение тяжелого тела (пп. 24—26), с другой стороны, малых колебаний сферического маятника, без учета движения Земли (предыдущий пункт).

Таким образом, мы придем к результатам, которые экспериментально впервые были проверены Фуко[1]) в 1851 г. Точнее, мы покажем, что если сферический маятник предоставлен самому себе без начальной скорости в положении, близком к положению равновесия, то его колебания (которые, если бы Земля была в покое, происходили бы всегда в одной и той же вертикальной плоскости) будут прогрессивно смещаться из первоначальной плоскости или, как можно сказать, выражаясь менее точно, но более наглядно, *плоскость колебаний будет равномерно* вращаться вокруг вертикали места в направлении с востока на запад через юг.

54. Выбрав, как в п. 52, начало координат в положении устойчивого равновесия M колеблющейся точки P, относительно которой мы предположим для определенности, что она находится в северном полушарии, проведем оси координат, связанные с Землей, как в п. 26, т. е. ось z направим по вертикали места вниз, а ось x — в плоскости меридиана точки M на север, так что ось y будет перпендикулярна к плоскости меридиана точки M и направлена на восток.

Здесь, так же как в § 4, при заданной длине l маятника точка P вынуждена двигаться по поверхности сферы с центром в точке O,

[1]) Леон Фуко (Leon Foucault) родился в Париже в 1819 г., умер там же в 1878 г., был астрономом Бюро долгот и обсерватории в Париже и членом Парижской Академии наук. Производил важные экспериментальные исследования в сотрудничестве с Реньо, Физо и др.; прославился прямым определением скорости света.

с координатами 0, 0, $-l$ и с радиусом l, уравнение которой имеет вид

$$x^2+y^2+(z+l)^2-l^2=0. \tag{94}$$

Действительно, если маятник, как это было в опыте Фуко, подвешен на нити, то связь будет односторонней, но так как мы будем рассматривать только очень малые колебания, то можно быть уверенными (п. 51), что если нить в начале движения предполагается натянутой, то благодаря действию силы тяжести на колеблющуюся точку она будет оставаться натянутой во все время движения.

Поэтому точка P, массу которой для простоты примем равной единице, будет двигаться так, как если бы она была свободна и находилась под совместным действием веса и реакции связи $\boldsymbol{R}$. Поэтому, используя замечания § 4 и принимая во внимание изложенные там рассуждения (п. 24), можно написать дифференциальное уравнение движения в векторной форме

$$\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{g}-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r, \tag{96}$$

которое от уравнения (45′) движения тяжелого тела относительно Земли отличается только наличием реакции $\boldsymbol{R}$. Это, очевидно, не опровергает того, что в только что упомянутом случае (п. 25) мы условились рассматривать силу тяжести $\boldsymbol{g}$ как постоянную по величине и по направлению. Отсюда, проектируя уравнение (96) на оси x, y, z и вводя для составляющих реакции обычный множитель Лагранжа λ, мы придем к трем скалярным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=\lambda x-2\dot{y}\omega\sin\gamma,\\ \ddot{y}&=\lambda y+2\omega(\dot{x}\sin\gamma+\dot{z}\cos\gamma),\\ \ddot{z}&=\lambda(z+l)+g-2\dot{y}\omega\cos\gamma,\end{aligned}\right\} \tag{96′}$$

в которых g представляет вес единицы массы в данном месте на поверхности Земли и γ — географическую широту места (т. е. угол вертикали, проходящей через точку M с экваториальной плоскостью Земли).

Здесь представляется естественным сопоставить эти уравнения с уравнениями, которые мы получили в предыдущем пункте при изучении малых колебаний сферического маятника около M, без учета вращения Земли. Третье уравнение системы (96′) отличается от аналогичного уравнения системы (95) только наличием вертикальной составляющей $-2\dot{y}\omega\cos\gamma$ сложной центробежной (кориолисовой) силы. Теперь, так как можно написать

$$\frac{\dot{y}\omega}{g}=\sqrt{2}\,\frac{\dot{y}}{V}\,\frac{V}{\sqrt{2lg}}\sqrt{\frac{\omega^2 l}{g}}$$

и отношения $\frac{V}{\sqrt{2lg}}$ (п. 52) и $\frac{\omega^2 l}{g}$ (п. 25) должны рассматриваться как количества соответственно первого и второго порядка, мы видим, что добавочный член $-2\dot{y}\omega\cos\gamma$ будет типа $g(\mathbf{2})$ и поэтому в первом приближении им можно пренебречь по сравнению с g.

С другой стороны, остаются в силе оценки порядка величин, которые в п. 52 привели нас к отождествлению малых колебаний точки P с колебаниями ее проекции на горизонтальную плоскость, проходящую через точку M $(z=0)$. Эти же оценки позволяют рассматривать вертикальное ускорение $\ddot{z}$ точки P как ничтожное по сравнению с g; так что третье из уравнений (96′), как и аналогичное уравнение системы (95), сводится к уравнению

$$\lambda l + g = 0;$$

двум первым уравнениям можно придать вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{l}x - 2\dot{y}\omega\sin\gamma, \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l}y + 2\omega(\dot{x}\sin\gamma + \dot{z}\cos\gamma). \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Но так как

$$\dot{x}\sin\gamma + \dot{z}\cos\gamma = \dot{x}\sin\gamma\left(1 + \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\operatorname{ctg}\gamma\right)$$

и в то же время $\dot{z}$ есть величина типа $V(\mathit{1})$, а $\dot{x}$ сравнима с V (п. 52), то во втором из уравнений (97) можно пренебречь в первом приближении членом $2\omega\dot{z}\cos\gamma$ по сравнению с остальными, поэтому, полагая $\omega_1 = \omega\sin\gamma$, мы заключаем, что малые колебания точки P или, лучше, ее проекции Q на горизонтальную плоскость $z=0$ определяются двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{l}x - 2\dot{y}\omega_1, \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l}y + 2\dot{x}\omega_1. \end{aligned} \tag{98}$$

Эти уравнения, если обозначить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$ ускорение и скорость (горизонтальную) точки Q и через $\boldsymbol{k}$ единичный вектор вертикали, направленной вниз, можно объединить в одно векторное уравнение

$$\boldsymbol{a} = -\frac{g}{l}\overrightarrow{MQ} + 2\omega_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}. \tag{98′}$$

Рассмотрим теперь в плоскости $z=0$ систему прямоугольных осей x_1y_1 с началом в точке M, конгруентную с системой xy и вращающуюся вокруг M с постоянной угловой скоростью ω_1 в направлении xy (т. е. в направлении движения стрелки часов с горизонтальным, обращенным вверх циферблатом). Векторная угловая скорость плоскости x_1y_1 относительно плоскости xy, очевидно, равна $\omega_1\boldsymbol{k}$. Отсюда, обратно, векторная угловая скорость xy относительно x_1y_1 равна $-\omega_1\boldsymbol{k}$. Для ускорения $\boldsymbol{a}_1$ относительно осей x_1y_1 проекции Q точки P, которая относительно осей xy имеет скорость $\boldsymbol{v}$ и ускорение $\boldsymbol{a}$, на основании теоремы Кориолиса (в применении к равномерному переносному вращательному движению, т. I, гл. IV, п. 4, б) мы получим выражение

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a} - \omega_1^2 \overrightarrow{MQ} - 2\omega_1 \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}.$$

Отсюда, если примем во внимание (98'), получим

$$\boldsymbol{a}_1 = -\left(\frac{g}{l} + \omega_1^2\right)\overrightarrow{MQ}$$

или же, наконец, пренебрегая величиной ω_1^2 по сравнению с $\frac{g}{l}$, что возможно, получим

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{g}{l}\overrightarrow{MQ}. \tag{99}$$

Мы видим, что *относительно вращающихся осей* x_1y_1 горизонтальная проекция Q точки P колеблется так, как если бы она притягивалась точкой M с силой, по величине пропорциональной расстоянию, т. е. по тому же самому закону, который мы в п. 52 нашли, отвлекаясь от вращения Земли, для малых колебаний сферического маятника по отношению к земным осям. Как мы уже знаем, траектория, которую описывает точка Q согласно уравнению (99) относительно осей x_1y_1, есть эллипс, в некоторых случаях вырождающийся в отрезок прямой (п. 10), а уравнения движения во всех случаях будут иметь вид

$$x_1 = r_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \theta_1\right), \quad y_1 = r_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \theta_2\right), \tag{100}$$

где произвольные постоянные r_1, r_2, θ_1, θ_2 определяются по начальным условиям. Здесь мы выберем эти условия таким образом, чтобы учесть обстановку, в которой был проведен опыт Фуко, упомянутый в самом начале. Фуко, подвесив под куполом парижского Пантеона длинный маятник ($l = 67$ *м*) с очень тяжелой колеблющейся массой (30 *кг*), вывел его из состояния равновесия OM и укрепил его в слегка отклоненном положении OP_0, привязав посредством нити груз P к стенке. В заданный момент, который мы примем за начало отсчета времени $t=0$, он пережег нить, и таким образом масса P начала колебаться с начальной скоростью (по отношению к окружающей среде, т. е. к Земле), равной нулю.

Поэтому, обозначая через a расстояние точки P_0 от вертикали $OM = z$ и предполагая, что в момент $t=0$ вращающаяся ось x_1 проходит через Q (проекция точки P_0 на плоскость $z=0$), положим в этот начальный момент $x_1 = a$, $y_1 = 0$. Так как, далее, в начале движения должно быть $\dot{x} = \dot{y} = 0$, а по теореме об относительном движении, поскольку $\omega_1 \boldsymbol{k}$ есть угловая скорость осей $x_1 y_1$ относительно осей xy, мы имеем (т. I, гл. IV, п. 4, б)

$$\dot{x} = \dot{x}_1 - \omega_1 y_1, \quad \dot{y} = \dot{y}_1 + \omega_1 x,$$

то при $t = 0$ мы должны положить $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{y}_1 = -\omega_1 a$. Таким образом, окончательные уравнения движения (100) проекции Q точки P на плоскость $z = 0$ по отношению к вспомогательным осям $x_1 y_1$ принимают вид

$$x_1 = a \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right), \quad y_1 = -\omega_1 a \sqrt{\frac{l}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right),$$

так что эллиптическая траектория точки Q определяется уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{g y_1^2}{\omega_1^2 a^2 l} = 1.$$

Так как полуоси эллипса равны соответственно a и $\omega_1 a \sqrt{l/g}$ и вторая из них очень мала по сравнению с первой, то речь идет об очень сплюснутом эллипсе, который можно уподобить отрезку оси x_1. Поэтому на первый взгляд движение маятника по отношению к осям x, y, z будет обыкновенным колебательным движением в плоскости zx_1; но эта плоскость не неподвижна, а имеет угловую скорость $\omega \sin \gamma$ в направлении xy, которое для лица, смотрящего сверху, будет направлением движения часовой стрелки, т. е. с востока на запад через юг. Хотя эта угловая скорость мала, но угол поворота плоскости колебаний растет непрерывно с временем и становится довольно скоро заметным.

Естественно, что величина $\omega_1 = \omega \sin \gamma$ изменяется вместе с широтой места; максимальной и равной ω она будет на северном полюсе и равной нулю на экваторе. Чтобы перейти в южное полушарие, достаточно изменить знак у γ, и единственная разница в выводах будет заключаться лишь в том, что вращение плоскости колебаний будет совершаться для смотрящего сверху в направлении, обратном движению часовой стрелки.

Чтобы дать понятие о порядке величины ω_1 в средних широтах, заметим, что в местах, где географическая широта, т. е. γ, приблизительно равна $45°$, угловое смещение за один час будет равно $\frac{2\pi \sin 45°}{24}$, т. е. немного меньше $10°$.

Как уже было сказано, указанные выше выводы теории были подтверждены опытом Фуко, который является поэтому опытным доказательством суточного вращения Земли. По сравнению с отклонением падающего тела к востоку, которое мы приводили как первое доказательство того же самого факта, опыт Фуко представляет существенное преимущество, так как он, так сказать, накапливает очень малые сами по себе воздействия, которые вращение Земли производит на движение тяжелого тела, и делает их, таким образом, доступными для наблюдения и количественного учета.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Точка, масса которой равна m, движется в плоскости Oxy под действием силы с составляющими $X=\frac{\partial V}{\partial y}$, $Y=\frac{\partial V}{\partial x}$, где V — какая-нибудь функция от x, y. Доказать, что уравнения движения допускают первый интеграл вида $m\dot{x}\dot{y}-V=\text{const}$.

2. Материальная точка P, масса которой равна m, движется под действием двух сил, направленных к двум неподвижным точкам O и O_1, с величинами $m\mu r$ и $m\mu_1 r_1$, где $r=OP$, $r_1=O_1P$, а μ, μ_1 суть постоянные. Доказать, что уравнения движения допускают первый интеграл

$$\mu r^2\dot{\theta}+\mu_1 r_1^2\dot{\theta}_1=\text{const},$$

где θ, θ_1 означают углы радиусов-векторов OP, O_1P с OO_1.

3. Свободная материальная точка движется под действием силы F (отнесенной к единице массы), зависящей только от положения. Фиксируем одно из движений, возможных в этих условиях, и пусть c есть дуга соответствующей траектории. Показать, что эта дуга c может также рассматриваться как конфигурация равновесия гибкой и нерастяжимой нити, закрепленной на концах и находящейся под действием единичной силы $-F$, в предположении, что линейная плотность нити в любом месте обратно пропорциональна скорости точки в рассматриваемом решении динамической задачи.

4. Из соотношения $ma=F$ в случае силы, зависящей только от положения, путем дифференцирования выводится

$$m\frac{da}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}.$$

Дифференцируя дальше, доказать, что разложения в ряд Тэйлора декартовых координат x, y, z движущейся точки из состояния покоя и с момента $t=0$ будут типа

$$x=X\tau+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial X}{\partial x}X+\frac{\partial X}{\partial y}Y+\frac{\partial X}{\partial z}Z\right)\tau^2+\ldots$$

и аналогично для y и z, где X, Y, Z суть составляющие силы F, $\tau=\frac{t^2}{2}$, а опущенные члены — по крайней мере шестого порядка по отношению к t.

5. Точка движется в плоскости под действием силы, являющейся производной от потенциала $U(x, y)$. Доказать, что совокупность (пучок) траекторий, соответствующих одному и тому же значению E постоянной энергии, определяется дифференциальным уравнением

$$y''+(1+y'^2)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}-y'\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)=0,$$

где x, y обозначают декартовы координаты и

$$y'=\frac{dy}{dx},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2},\quad \lambda=\ln\sqrt{2(U+E)}.$$

Для доказательства достаточно приравнять нулю выражение R_n, указанное в упражнении 8 гл. I, вспоминая, что направляющие косинусы нормали к кривой $y=y(x)$, направленной в сторону вогнутости, суть

$$\mp y'/\sqrt{1+y'^2}, \quad \pm 1/\sqrt{1+y'^2},$$

смотря по тому, будет ли $y''>0$ или $y''<0$ (радикалы подразумеваются взятыми в арифметическом смысле).

6. В виде непосредственного приложения уравнения (11) или эквивалентного ему уравнения (11') п. 7 этой главы доказать, что:

а) если точка описывает круговую орбиту в центральном движении, центр которого O находится на окружности, то сила, действующая на движущуюся точку, обратно пропорциональна пятой степени расстояния от O;

б) если эллипс описывается под действием центральной силы, центр которой совпадает с центром эллипса, то сила обратно пропорциональна расстоянию;

в) логарифмическая спираль $r=ae^{-b\theta}$ (a и b — постоянные) и лемниската $r^2=c^2\sin 2\theta$ (c — постоянная) могут быть описаны под действием центральной силы, действующей из начала координат и обратно пропорциональной в первом случае кубу, во втором — седьмой степени расстояния.

7. Точка P описывает эллипс под действием двух центральных сил, направленных к двум фокусам F, F'. Полагая $FP=r$, $F'P=r'$, показать, что если радиальная составляющая первой силы есть μr, то радиальная составляющая второй силы есть $\mu r'+\dfrac{\nu}{r'^2}$ (μ, ν — постоянные).

8. Показать, что величина центральной силы, которая заставляет материальную точку описывать заданную кривую согласно закону площадей, пропорциональна $\dfrac{v^3 r}{\rho}$, где v обозначает величину скорости движущейся точки, r — ее расстояние от центра силы, ρ — радиус кривизны заданной траектории.

9. Если радиальная составляющая центральной силы имеет выражение $\varphi(r)=\dfrac{\mu}{r^2}+\dfrac{\nu}{r^3}$ (μ и ν — постоянные), то дифференциальное уравнение траектории [(11'), п. 7)] интегрированием может быть приведено к виду

$$r=\frac{p}{1+e\cos k\theta},$$

где

$$k^2=1+\frac{\nu}{c^2}, \qquad \frac{1}{p}=-\frac{\mu}{c^2+\nu};$$

через c обозначена постоянная площадей, e есть постоянная интеграции, у которой можно предположить тот же самый знак, что и у p, заменяя при случае ϑ через $\vartheta+\pi$; вторая постоянная интеграции не входит явно, так как она включена в ϑ (которая заменяет $\vartheta-\vartheta_0$). Заметим, что указанная форма интеграла предполагает $k^2>0$ или же $c^2>-\nu$. Как надо изменить ее, если $c^2\leqslant-\nu$?

Если примем $k>0$, то орбита, очевидно, будет иметь апсидальный угол $\Theta=\dfrac{\pi}{k}$.

При $\nu=0$ получим $k=1$; орбита будет коническим сечением с фокусом в центре силы, а при $\mu<0$ будем иметь классический случай ньютонианского притяжения, которому посвящена следующая глава.

Здесь мы хотим добавить еще одно замечание общего характера, которое восходит к Ньютону.

Если движущаяся точка P описывает какую-нибудь траекторию, а траектория вращается с угловой скоростью ω, изменяющейся как-либо с течением времени, то абсолютная угловая скорость вектора P определится равенством

$$\dot{\vartheta}=\dot{\vartheta}_1+\omega,$$

где ϑ есть угол вектора P с какой-либо неподвижной осью, ϑ_1 — угол вектора P с осью, неизменно связанной с вращающейся орбитой. Ничто не мешает предположить, в частности, что $\vartheta_1=k\vartheta$ при постоянном, наперед заданном k, так как достаточно в случае необходимости принять

$$\omega=(1-k)\dot{\vartheta}.$$

После этого предыдущее можно сделать более наглядным, указав, что для всякой центральной силы вида $\frac{\mu}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}$ в предположении $c^2>-\nu$ орбита будет коническим сечением, вращающимся вокруг фокуса (центра силы) с переменной угловой скоростью $(1-k)\dot{\vartheta}$. Движение по этому коническому сечению будет происходить с постоянной секторной скоростью kc, следовательно, будет кеплеровым, если речь идет об эллипсе.

10. Показать, что задачу о движении точки, находящейся под действием силы, проходящей всегда через начало и имеющей радиальную составляющую вида $\frac{\psi(\theta)}{r^2(at+b)}$, где при очевидном значении символов t, r и θ буквы a и b обозначают постоянные, а ψ есть любая функция от одного только аргумента θ, можно свести к квадратурам. При $a=0$ будем иметь теорему Якоби, при $\psi=\text{const}$ — теорему Мещерского. См. G. Armellini, Sopra l'integrabilità delle equazioni differentiali della Meccanica *Rend. Lincei*, т. XXI, 1912, стр. 177—182, 2-й семестр. Для решения достаточно отправиться от уравнений (3) приведенной заметки, выражающих равенство между радиальной и трансверсальной составляющими ускорения и единичной силы.

11. Радиальная составляющая центральной силы есть $\varphi(r)=\nu+\mu r$ (μ и ν — постоянные). Показать, что если ω есть постоянная угловая скорость, с которой будет описываться круговая орбита, то эта орбита будет устойчивой, если $3\omega^2>\mu$. В этом случае соседние орбиты имеют апсидальный угол

$$\Theta=\frac{\pi\omega}{\sqrt{3\omega^2-\mu}}.$$

12. В случае вертикального движения снаряда уравнение (28) п. 14 этой главы принимает вид

$$\frac{dv}{dt}=\pm g-f(v);$$

знак плюс берется в случае нисходящего движения и минус — в случае восходящего. Приняв функцию сопротивления $f(v)$ удовлетворяющей качественным условиям п. 13, изучить качественно нисходящее движение, аналогично тому, как это было сделано в § 9 гл. I для функции, выражающей квадратичный закон сопротивления. Необходимо при этом различать три случая $v_0 \gtreqless v_1$, где v_0 означает начальную скорость и v_1 — предельную скорость, определяемую формулой (27) п. 13.

Если s есть расстояние, пройденное вдоль вертикали от начального положения, то интеграл задачи можно представить в виде

$$t=-\frac{1}{g}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\frac{f(v)}{g}-1},\qquad s=-\frac{1}{g}\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{\frac{f(v)}{g}-1}.$$

Для восходящего движения имеем наоборот

$$t=-\frac{1}{g}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\frac{f(v)}{g}+1},\qquad s=-\frac{1}{g}\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{\frac{f(v)}{g}+1}.$$

Изучить, в частности, случай сопротивления, пропорционального n-ой степени скорости, $f(v)=av^n$ (a — постоянная), и показать, что если за переменное интеграции принимается $\rho=\frac{v}{v_1}$, то правые части выразятся посредством интегралов вида

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{1\mp\rho^n},\qquad \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\rho d\rho}{1\mp\rho^n},$$

где $\rho_0=\frac{v_0}{v_1}$. Если $n>1$, то как бы ни была велика скорость v_0, с которой снаряд бросается кверху, он уже не поднимается выше, чем на высоту

$$h=\frac{v_1^2}{g}\int_{0}^{\infty}\frac{\rho d\rho}{1+\rho^n},$$

и достигнет своей максимальной высоты за конечное время, не превосходящее величины

$$\tau=\frac{v_1}{g}\int_{0}^{\infty}\frac{d\rho}{1+\rho^n}.$$

Проверить, что аналогичные обстоятельства представятся при $f(v)=Ae^{mv}$ (A и m — постоянные) и что в этом случае будем иметь

$$\tau=\frac{1}{mg}\ln\left(1+\frac{g}{A}\right).$$

13. Показать, что в случае сопротивления, пропорционального скорости баллистический годограф, определяемый уравнением (30) п. 14, есть прямая в плоскости v, φ (v — радиус-вектор, а φ — аномалия (угол наклона)).

14. Из формулы (26) п. 13 мы знаем, что если $f(v)$ есть сопротивление для заданного снаряда P, то сопротивление для подобного же снаряда P_1, соответствующее скорости v_1, есть $cf(v_1)$, где c обозначает постоянную.

Годографы, относящиеся к движениям P и P_1, называются подобными, если скорости, соответствующие одному и тому же углу наклона φ, находятся в постоянном отношении k. В таком случае то же относится и к углам, заключенным между любыми двумя наклонами, и к соответствующим промежуткам времени; следовательно, и траектории будут *подобными*.

Показать, что подобие возможно тогда и только тогда, когда сопротивление пропорционально некоторой степени скорости. Если n есть показатель этой степени, то имеем $\frac{v_1}{v} = k = \sqrt[n]{c}$. См. F. Siacci, Balistica, 2-е изд. Torino, 1888, ч. I, гл. VIII, стр. 112.

15. Уравнение (30) п. 14 непосредственно приводится к уравнению Бернулли и, следовательно, к квадратурам при $f(v)/g = a + bv^n$ (a, b, n — постоянные). Если принять в нем за неизвестное $\ln v$, то в случае

$$\frac{f(v)}{g} = a + b \ln v$$

оно становится линейным. Это случаи, указанные Даламбером в 1744 г., как было указано в п. 15.

Даламбер, кроме того, заметил, что если постоянные a, b, r связаны подходящим соотношением, то и два другие закона:

$$\frac{1}{g} f(v) = av^n + r + bv^{-n}, \quad \frac{1}{g} f(v) = a\ln^2 v + r \ln v + b$$

приводят к случаям интегрируемости в квадратурах. Найти этот результат, замечая сначала, что если $x = \sin\varphi$ принимается за независимую переменную и $y = v^{n+1}$ или соответственно $y = \ln v$ — за неизвестную функцию, то мы придем к уравнению Риккати. Тогда достаточно будет исследовать, при каких условиях (для a, b, r) это уравнение допускает решение вида $\alpha x + \beta$ (α и β — постоянные).

16. В п. 20 доказаны различные геометрические свойства траектории снаряда. Аналогичными рассуждениями доказать следующее кинематическое предложение:

Всякая восходящая дуга будет пробегаться за меньшее время, чем соответствующая нисходящая дуга. (Соответствующими называются две дуги, заключенные между вершиной и точками с равными высотами.)

17. Принимая во внимание вращение Земли, убедиться, что тяжелое тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v, при возвращении на высоту бросания дает отклонение к западу, равное при обозначениях п. 26 $\frac{4\omega v^3 \cos\gamma}{3g^2}$ (формула Лапласа).

18. Уравнение (45″) п. 26 движения тяжелого тела при условии, что принимается во внимание вращение Земли, можно строго проинтегрировать хорошо известным способом, поскольку речь идет о линейных уравнениях. В предположении, что тело предоставлено самому себе без начальной скорости, получим после первого интегрирования:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2\omega y \sin\gamma, \\ \dot{y} &= 2\omega (x \sin\gamma + z \cos\gamma), \\ \dot{z} &= gt - 2\omega y \cos\gamma. \end{aligned}$$

Мы пришли к системе первого порядка, линейной относительно x, y, z. Не обращаясь к общей теории, достаточно в этом случае взять производную от второго уравнения и подставить в полученное уравнение вместо $\dot{x}$, $\dot{z}$ выражения, даваемые двумя другими. Мы придем, таким образом, к уравнению с одним только y, интеграл которого легко будет указать, и т. д.

19. Наэлектризованная частица P с массой m и зарядом e движется в электрическом и магнитном полях (статических). Их напряженности определены в каждой точке векторами E и M соответственно.

Если предположить, что движение частицы не изменяет силового поля, то оно (движение) согласно теории электромагнитного поля совершается по закону *)

$$ma = e(E + v \times M), \tag{1}$$

где v и a обозначают скорость и ускорение движущейся частицы.

Если электрическая напряженность E является производной от потенциала $U(x, y, z)$, то мы сразу же видим, что уравнение (1) допускает интеграл живых сил

$$\frac{mv^2}{2} - eU = \text{const}.$$

Уравнение (1), между прочим, дает теорию северного сияния, поскольку это явление рассматривается как происходящее вследствие видимости траекторий наэлектризованных частиц в поле земного магнетизма ($E = 0$, M соответствует однородно намагниченной сфере). С этой целью см. работы Штермера (C. Störmer) **).

В случае, когда M происходит от одного единственного полюса при E все еще равном нулю, равенство (1) важно для изучения катодных лучей и было проинтегрировано и иллюстрировано Пуанкаре ***).

Изучить в виде упражнения случай, когда E и M постоянны. Принимая ось Oz параллельной M и плоскость Oxz параллельной E, показать, что z есть квадратичная функция времени и что x определяется уравнением вида $\ddot{x} + \omega^2 x = \text{const}$ (ω — постоянная), которое интегрируется непосредственно, как в п. 61 гл. I.

Если, далее, считая все еще M постоянным, предположить, что сила E является центральной, то легко можно изучить движение, которое будет происходить в плоскости, нормальной к M и проходящей через центр O силы E. Достаточно обратиться к осям Oxy этой плоскости, вращающимся с угловой скоростью $-\frac{eM}{2m}$ вокруг точки O. Действительно, обозначая через b ускорение точки P относительно этих осей (относительно которых неподвижные оси вращаются с угловой скоростью $\frac{eM}{2m}$), по теореме Кориолиса будем иметь

$$b = a + \frac{e}{m} M \times v + a_\tau = a + \frac{e}{m} M \times v - \frac{e^2M^2}{4m^2}\overrightarrow{OP},$$

откуда, в силу уравнения (1),

$$b = \frac{e}{m} E - \frac{e^2M^2}{4m^2}\overrightarrow{OP}.$$

Если $U_1(r)$ есть потенциал центральной силы E (при $r = OP$), то движение точки P относительно подвижных осей происходит под действием силы,

*) См., например, Г. А. Лоренц, Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, 1934. *(Прим. ред.)*

**) См. К. Штермер, Проблема полярных сияний, 1933. *(Прим. ред.)*

***) См. П. Аппелль, Курс теоретической механики, т. I, 1911, гл. X, п. 221. *(Прим. ред.)*

тоже центральной, являющейся производной от потенциала, отнесенного к единице массы,

$$U(r)=\frac{e}{m}U_1(r)-\frac{e^2M^2}{8m^2}r^2.$$

20. Точка P притягивается к двум неподвижным центрам O_1, O_2 центральными силами, возрастающими вместе с расстоянием и исчезающими вместе с ним, с единичными радиальными составляющими $-\varphi_1(r_1)$, $-\varphi_2(r_2)$, где положено

$$r_1=O_1P,\ r_2=O_2P.$$

На отрезке O_1O_2, очевидно, находится одно положение O равновесия, в котором $\varphi_1(r_1)=\varphi_2(r_2)$. Доказать, что если речь идет об устойчивом равновесии и если линия центров принимается за ось, то при обозначениях п. 38 будем иметь

$$\omega_1^2=\varphi_1'+\varphi_2',\quad \omega_2^2=\omega_3^2=\frac{\varphi_1}{r_1}+\frac{\varphi_2}{r_2},$$

где подразумевается, что значения r и φ и их производных относятся к точке O.

Если притяжения следуют каким угодно законам и если на отрезке O_1O_2 существует положение равновесия O, то равновесие будет устойчивым, лишь бы было $\varphi_1'+\varphi_2'>0$.

21. Пусть оси $Oxyz$ вращаются вокруг Oz с постоянной угловой скоростью ω и F — сила, являющаяся производной от потенциала $U(x, y, z)$, который не зависит от времени, если относится к указанным осям.

Показать, что движение свободной точки с массой m, находящейся под действием силы F, допускает интеграл

$$\frac{mv^2}{2}-\left\{U+m\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)\right\}=\text{const}.$$

Распространить теорему Дирихле на устойчивость относительного равновесия в указанных условиях.

22. Из элементов дифференциальной геометрии известно, что цилиндры и конусы суть развертывающиеся поверхности, т. е. могут быть развернуты на плоскость без изменения длин и углов. Показать на основании уравнения (80) п. 40 (спроектированного на касательную плоскость), что при $F=0$ геодезические линии цилиндров и конусов развертываются в прямые.

23. Доказать, что траектория точки, движущейся по поверхности, будет геодезической линией, даже если принимается во внимание трение скольжения или вообще пассивное сопротивление, прямо противоположное направлению движения.

24. Показать, что тяжелая точка, движущаяся по совершенно гладкой цилиндрической поверхности с вертикальными образующими (и с любым нормальным сечением), описывает траекторию, превращающуюся при развертывании цилиндра на плоскость в параболу (см. п. 40, после проектирования уравнения (80) на вертикаль и на касательную нормального сечения).

25. Тяжелая точка движется по совершенно гладкой плоскости, равномерно вращающейся вокруг лежащей в ней вертикальной оси. Показать, что уравнение проекции траектории на горизонтальную плоскость есть $r=ae^{\theta}+$ $+be^{-\theta}$ (r и θ — полярные координаты на горизонтальной плоскости с полюсом на оси, a и b — постоянные).

26. Точка может двигаться по совершенно гладкой поверхности параболоида вращения с вертикальной осью и с вогнутостью, обращенной кверху. Она находится под действием собственного веса и брошена с горизонтальной скоростью v_0 из некоторой точки на параллели радиуса r_0.

Показать, что если в некоторый момент скорость точки v опять будет направлена горизонтально, то абсолютная величина этой скорости будет равна $r_0\sqrt{\frac{2g}{p}}$, где p есть параметр меридианной параболы. Как увидим, это абсолютное значение не зависит от начальной скорости v_0.

27. Пусть ось Oz будет вертикальна и направлена вверх. Начало координат есть положение равновесия для тяжелой точки P, удерживаемой на совершенно гладком параболоиде

$$z = \frac{ax^2 + by^2}{2}.$$

Из двух первых уравнений (80″) п. 42 исключить множитель λ посредством третьего уравнения и z посредством уравнения параболоида. Таким образом, получатся два уравнения движения точки P в координатах x и y.

На основании интеграла живых сил и теоремы Дирихле (отнесенной к параболоиду, т. е. к двум независимым переменным x, y) показать, что равновесие будет устойчивым, если коэффициенты a и b положительны. Малые колебания определяются уравнениями

$$\ddot{x} = -ax, \quad \ddot{y} = -by.$$

Аналогичное рассуждение будет иметь силу для произвольной поверхности, для тех ее точек, где касательная плоскость будет горизонтальной, так как всякая поверхность в непосредственной близости от какой-нибудь из своих неособых точек может быть уподоблена параболоиду.

28. Пусть ρ, θ, z суть цилиндрические координаты, как в п. 46, и, кроме того, ось Oz вертикальна и направлена вверх. Если положим $u = 1/\rho$ и примем уравнение меридианной кривой на поверхности вращения вокруг оси Oz в форме $z = \varphi(u)$, то дифференциальное уравнение между u и θ, определяющее траекторию тяжелой точки, движущейся по поверхности без трения (или, если угодно, проекцию траектории на горизонтальную плоскость), представится в виде

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \left\{1 + u^4\varphi'^2(u)\right\} + u^2 + \frac{2g}{c^2}\varphi(u) = \text{const},$$

где c есть постоянная площадей.

29. На основании уравнений (87) п. 47, определяющих движение тяжелой точки по поверхности вращения с вертикальной осью и без трения, исследовать возможность движения вдоль параллелей и показать, что речь идет о равномерном движении по параллели с угловой скоростью $\sqrt{g \operatorname{ctg} \gamma}$, где γ обозначает широту (угол нормали к поверхности вдоль параллели с горизонтальной плоскостью).

30. Исследовать малые колебания сферического маятника, принимая во внимание сопротивление воздуха. Сопротивление предполагается вязким, потому что речь идет о медленном движении (гл. I, п. 21); сообразно этому достаточно ввести в левые части уравнений (65′) п. 52 два члена вида $2h\dot{x}$, $2h\dot{y}$ (h — положительная постоянная).

Например, полагая $x = e^{-ht}\xi$, $y = -e^{-ht}\eta$, примем, что при достаточно малом h (точнее, при $h^2 < g/l$) движение маятника (отождествляемое с его горизонтальной проекцией) можно рассматривать как эллиптическое, так же как при $h = 0$, с той, однако, разницей, что эллипс стягивается по показательному закону при возрастании времени, оставаясь гомотетичным *) своему начальному положению. Действительная траектория будет иметь вид эллиптической спирали, которая обратится в логарифмическую спираль (т. I, гл. II, п. 37), если эллипс сведется к окружности.

---

*) Если из какой-нибудь точки S провести ко всем точкам фигуры лучи и затем на этих лучах отложить от точки S в ту же сторону отрезки, увеличенные или уменьшенные в одинаковое число раз, то получившаяся фигура — геометрическое место концов измененных таким образом отрезков, называется гомотетичной данной фигуре. Такая гомотетия называется прямой. Если же увеличенные или уменьшенные отрезки откладываются от S в противоположную сторону, то гомотетия называется обратной. *(Прим. перев.)*

Глава III

ЭЛЕМЕНТЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Динамическое истолкование законов Кеплера

1. В п. 1 предыдущей главы мы отметили, что среди динамических задач, в которых приходится рассматривать системы свободных точек, первое место по важности занимают задачи небесной механики. В этой главе, чтобы дать первые и наиболее элементарные понятия этой ветви механики, возьмем снова кеплеровы движения, уже изучавшиеся в § 8 гл. II т. I, т. е. движения планет вокруг Солнца. Эти движения характеризуются тремя законами Кеплера, формулировку которых здесь целесообразно повторить:

1. *Орбиты планет суть эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

2. *Площади, описанные радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны временам, в которые они были пройдены.*

3. *Квадраты времен, в течение которых различные планеты пробегают свои орбиты (квадраты времен обращения), пропорциональны кубам больших полуосей этих орбит.*

В т. I (гл. II, § 8, п. 54) было показано, что первые два закона Кеплера достаточны для того, чтобы характеризовать движение отдельной планеты P, поскольку они приводят к заключению, что ускорение планеты P постоянно направлено к Солнцу и имеет величину

$$\frac{c^2}{p}\frac{1}{r^2}, \tag{1}$$

где c есть постоянная площадей (удвоенная секторная скорость планеты), p — параметр эллиптической орбиты и r — расстояние SP планеты от Солнца.

Обозначая через m массу планеты и применяя динамическое определение силы, которое дается основным уравнением динамики $F = ma$, мы можем здесь сказать, что *планета движется так, как если бы она притягивалась Солнцем с силой (центральной), направленной от планеты к Солнцу, величина которой есть*

$$\frac{c^2}{p}\frac{m}{r^2}, \tag{2}$$

т. е. обратно пропорциональна квадрату расстояния.

С другой стороны, обозначая через a и T большую полуось орбиты и время обращения планеты, мы нашли (т. I, гл. II, п. 51)

$$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \tag{3}$$

откуда на основании третьего закона Кеплера заключаем, что коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{c^2}{p}, \tag{4}$$

который появляется в выражении (2) для силы притяжения Солнцем отдельной планеты, будет один и тот же для всех планет.

§ 2. Прямая задача Ньютона

2. Динамическое истолкование законов Кеплера, данное выше, естественно приводит к задаче: *определить движение материальной точки P, притягиваемой неподвижным центром S с силой, величина которой обратно пропорциональна квадрату расстояния.*

Эта задача как частный случай входит в более общую задачу, рассмотренную в § 2 предыдущей главы. Поэтому мы сразу же можем сказать, что речь идет *о плоском движении*, для которого существуют одновременно *интеграл живых сил и интеграл площадей* относительно центра силы S (гл. II, п. 3).

Приведя здесь эти результаты, полученные из общей теории § 2, мы дадим далее независимую аналитическую трактовку частной задаче, сформулированной выше, как ввиду важности самой задачи, так и ввиду дальнейших исследований, которые мы намерены с ней связать; при этом мы будем возвращаться к общей теории всякий раз, когда для этого представится удобный случай.

3. Условимся принимать за единицу массы массу движущейся точки P и обозначим через k величину силы притяжения, действующей на массу, равную единице и находящуюся на расстоянии, равном единице, от центра силы. Тогда составляющая $\varphi(r)$ силы притяжения единичной массы на расстоянии r по направлению прямой SP будет иметь вид

$$\varphi(r) = -\frac{k}{r^2}.$$

Если определить аддитивную постоянную так, чтобы потенциал в бесконечности равнялся нулю, то он определится равенством

$$U(r) = \frac{k}{r}. \tag{5}$$

Тогда оба первых интеграла: интеграл живых сил и интеграл площадей, выраженные, в полярных координатах r, θ с полюсом в центре силы, примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)&=\frac{k}{r}+E,\\ r^2\dot{\theta}&=c, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где, как обычно, E и c обозначают соответственно постоянную энергии и постоянную площадей.

Определение движения тем самым сведено к интегрированию системы первого порядка (6) (которое, как мы знаем из общей теории, выполняется в квадратурах).

С качественной точки зрения полезно отметить в соответствии с общими замечаниями п. 4 предыдущей главы, что из интеграла живых сил, т. е. из первого из уравнений (6), вытекает неравенство

$$\frac{k}{r}\geqslant -E.$$

Из этого неравенства следует, что, если полная энергия отрицательна, то во время движения радиус-вектор всегда остается меньше или, самое большее, равен $-k/E$; этим ограничивается область, внутри которой должна располагаться орбита.

4. Круговые орбиты. Исследование случая, когда орбита оказывается круговой ($r=\mathrm{const}$), исчерпывается прямыми и элементарными рассуждениями. В этом случае из закона площадей следует постоянство скорости на орбите, так что движение будет равномерным.

Если теперь через a обозначим радиус орбиты и через n (постоянную) угловую скорость радиуса, то скорость на орбите v будет равна an, а ускорение (целиком центростремительное) будет равно

$$\frac{v^2}{a}=an^2.$$

Сравнивая это значение с абсолютной величиной силы притяжения $\varphi(r)=-\frac{k}{r^2}$, при $r=a$, получим

$$\frac{k}{a^2}=an^2. \tag{7}$$

Отсюда заключаем, что для заданной действующей силы круговое движение оказывается возможным на некотором расстоянии a от центра силы, лишь бы угловая скорость имела одно из двух значений, определяемых равенством (7).

Из последних двух равенств следует

$$v^2 = \frac{k}{a}, \tag{8}$$

откуда заключаем, что кинетическая энергия $v^2/2$ единичной массы равна половине соответствующей величины k/a потенциала; та и другая остаются постоянными в течение всего движения.

Мы придем к тем же выводам, если рассмотрим этот вопрос как задачу об относительном равновесии. Действительно, материальную точку, движущуюся по окружности радиуса a с угловой скоростью n, можно рассматривать как находящуюся в покое относительно осей, вращающихся с той же угловой скоростью. Поэтому активная сила притяжения (центростремительного радиального) k/a^2 и центробежная радиальная сила n^2a должны находиться в равновесии (т. I, гл. XVI, п. 6), т. е. мы приходим как раз к равенству (7).

Укажем, наконец, еще значения, которые в этом частном случае принимают обе постоянные — полной энергии и площадей:

$$E = \frac{v^2}{2} - U = -\frac{1}{2}\frac{k}{a},$$

$$c = a^2\dot{\theta} = a^2 n = \pm\sqrt{ka}.$$

Из первой формулы, если принять во внимание равенство (8), следует, что *в случае круговой орбиты полная энергия отрицательна* и равна живой силе, взятой с обратным знаком.

5. Вырожденные орбиты. В качестве второго частного случая рассмотрим тот, когда обращается в нуль постоянная c площадей.

Исключая возможный случай постоянного совпадения точки P с центром силы S (т. е. случай, когда r все время равно 0), найдем на основании закона площадей $\dot{\theta} = 0$, или же $\theta = \text{const}$, так что движение будет происходить по прямой, проходящей через S, и закон изменения радиуса r как функции времени на этой прямой определяется интегралом живых сил, который здесь сводится к уравнению

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{k}{r} + E. \tag{9}$$

Мы пришли к простейшему уравнению известного вида (8′) гл. I, § 6, поэтому можем применить здесь результаты, полученные там для общего случая. С этой целью мы будем различать два случая в зависимости от знака постоянной энергии E:

а) $E < 0$. Так как правая часть равенства (9) не должна быть отрицательной, то постоянно будем иметь $r \leqslant -k/E$, так что *движение будет происходить полностью на конечном расстоянии.*

Если начальная скорость $\dot{r}_0$ направлена к центру или равна нулю (последний случай может представиться только при $r_0 = -\frac{k}{E}$), то движущаяся точка, не изменяя направления на обратное, достигнет центра сил S в конечное время, а скорость по величине будет возрастать беспредельно (гл. I, п. 27).

С астрономической точки зрения такую возможность можно истолковать как катастрофическое столкновение двух небесных тел P и S, после которого нет смысла следить за явлением, отыскивая поведение r при последующем возрастании t [1]).

Если, наоборот, $\dot{r}_0 > 0$, то движущаяся точка сначала удаляется от S на расстояние $2a$, определяемое равенством

$$2a = -\frac{k}{E} \tag{10}$$

(единственный нуль функции в правой части равенства (9)), а затем возвращается обратно и движется к S, как было описано выше.

б) $E \geqslant 0$. В этом предположении правая часть равенства (9) при $r > 0$ уже не исчезает и остается всегда положительной, так что движение не может изменить своего направления (гл. I, п. 27).

Если начальная скорость направлена к центру ($\dot{r}_0 < 0$), то движущаяся точка за конечное время достигнет центра силы, как и в случае а).

Если же, наоборот, $\dot{r}_0 > 0$, то из равенства (9), принимая во внимание предположение $E \geqslant 0$, видим, что в течение всего движения будет

$$\dot{r} \geqslant \sqrt{\frac{2k}{r}},$$

а так как

$$\dot{r}\sqrt{r} = \frac{2}{3}\frac{d}{dt}(r^{3/2}),$$

то из неравенства следует

$$\frac{d}{dt}(r^{3/2}) \geqslant 3\sqrt{\frac{k}{2}}.$$

Поэтому величина $r^{3/2}$, а вместе с ней и сам радиус-вектор r возрастает беспредельно вместе с t, а движущаяся точка будет беспредельно удаляться от центра по своей прямолинейной траектории.

6. Орбиты общего вида. Предполагая теперь $c \neq 0$, из второго из равенств (6) (интеграл площадей) получим, что θ есть монотон-

[1]) Отметим, что в некоторых исследованиях по небесной механике, чтобы углубить качественное исследование движения, оказывается полезным также рассмотрение аналитического продолжения интеграла и после столкновения. См., например, Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta math.*, т. 42, 1919.

ная и, следовательно, однозначно обратимая функция времени, так что в первом из равенств (6) (интеграл живых сил) за независимую переменную можно принять вместо t угол θ. Чтобы выполнить эту замену переменного, достаточно по обыкновению рассматривать в нем r как сложную функцию от t через посредство θ и исключить $\dot{\theta}$ при помощи интеграла площадей. Таким образом, мы придем к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2=\frac{2E}{c^2}+\frac{2k}{c^2}\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}, \tag{11}$$

определяющему полярное уравнение $r=r(\theta)$ орбиты общего вида рассматриваемого движения; оно представляет собой вместе с тем частный случай основного уравнения (10) предыдущей главы, так как справедливо только для определенного закона действия силы.

В общей теории мы полагали $r=\frac{1}{u}$, но в настоящем случае мы можем достигнуть еще большей формальной простоты, если вместо r примем за новую независимую переменную

$$\chi=\frac{1}{r}-\frac{k}{c^2}, \tag{12}$$

вследствие чего уравнение (11) примет вид

$$\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)^2=\frac{2E}{c^2}+\frac{k^2}{c^4}-\chi^2. \tag{11'}$$

Постоянная

$$\frac{2E}{c^2}+\frac{k^2}{c^4}$$

в силу того же равенства (11′) есть сумма квадратов и необходимо будет положительной, за исключением лишь того случая, когда χ тождественно обращается в нуль, что в силу зависимости (12) может случиться только при $r=c^2/k$, т. е. в случае круговой орбиты, разобранном в п. 4.

Следовательно, можно положить

$$\frac{2E}{c^2}+\frac{k^2}{c^4}=q^2 \tag{13}$$

при $q>0$ и написать дифференциальное уравнение орбиты в окончательном виде

$$\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)^2=q^2-\chi^2.$$

Его общий интеграл, как это можно подтвердить и непосредственно путем разделения переменных, есть

$$\chi = q \cos(\theta - \theta_0),$$

где θ_0 есть постоянная интеграции; поэтому, подставляя вместо χ его выражение (12), мы получим для орбиты уравнение в полярных координатах

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + q \cos(\theta - \theta_0)$$

или же

$$r = \frac{\frac{c^2}{k}}{1 + \frac{c^2 q}{k} \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Это есть полярное уравнение конического сечения, имеющего фокус в центре силы, с осью, наклоненной под углом θ_0 к полярной оси, с параметром

$$p = \frac{c^2}{k} \tag{14}$$

и с эксцентриситетом

$$e = \frac{c^2 q}{k};$$

принимая во внимание равенство (13), найдем

$$e = \sqrt{1 - \frac{2Ec^2}{k^2}}. \tag{15}$$

Припоминая выражения, найденные в п. 4 для постоянных E и c, в предположении, что орбита есть окружность (оно соответствует также предположению $c \neq 0$), и принимая во внимание, что для окружности параметр равен радиусу, а эксцентриситет равен нулю, мы видим, что формулы (14) и (15) остаются в силе также и для этого случая.

Поэтому заключаем, *что при движении точки, находящейся под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния* (за исключением случая прямолинейного движения, характеризуемого обращением в нуль постоянной площадей), *орбита всегда представляет собой коническое сечение. Между механическими постоянными интегрирования* E и c (полная энергия и удвоенная секторная скорость) *и между элементами, геометрически характеризующими орбиту,* т. е. e, p (эксцентриситет и параметр), *существуют соотношения* (14) и (15).

7. Критерий для установления вида орбиты. Из равенства (15) следует, что вид конического сечения, описываемого движущейся точкой, зависит исключительно от знака полной энергии E. Если предположим $c \neq 0$, то из уравнения (15) найдем, что эксцентриситет e

будет меньше, равен, или больше единицы, в зависимости от того, будет ли полная энергия E отрицательна, равна нулю или положительна. Таким образом, *орбита будет эллиптической, параболической или гиперболической* (подразумевается одна ветвь гиперболы) *в зависимости от того, будет ли полная энергия отрицательной, равной нулю или положительной.*

Здесь необходимо указать, что этот критерий применим даже и в том случае, когда $c=0$, если этот случай рассматривать как предельный. Действительно, при $c\to 0$ параметр орбиты стремится в силу равенства (14) к нулю, а эксцентриситет в силу равенства (15) — к 1; геометрически это означает, что орбита стремится к совпадению со своей осью.

Если $E<0$, то эллиптическая орбита вырождается в сдвоенный отрезок, концы которого с геометрической точки зрения суть в одно и то же время фокусы и вершины выродившегося эллипса, а динамически один есть центр силы, другой — афелий. Как это следует из п. 5, движущаяся точка в зависимости от направления начального движения упадет в центр силы или сразу, или, пройдя через афелий.

Если, наоборот, $E\geqslant 0$, то орбита (при $c\neq 0$ ветвь гиперболы или парабола) геометрически выродится в сдвоенную полупрямую, конец которой, будучи вершиной и фокусом орбиты, совпадает с центром силы: движущаяся точка (п. 5) уходит в бесконечность или падает в центр в зависимости от направления начальной скорости.

8. В качестве дальнейшего применения критерия, установленного в предыдущем пункте, можно указать на известное общее выражение постоянной E энергии. Из формулы (15), принимая во внимание равенство (14), получим

$$E=-\frac{k}{2p}(1-e^2).$$

С другой стороны, если на время отвлечемся от случая параболической и выродившейся орбит, то параметр, как известно, определится равенством

$$p=\pm a(1-e^2),$$

в котором верхний знак берется в случае эллиптической, а нижний — в случае гиперболической орбиты и a представляет собой большую полуось эллипса или действительную полуось гиперболы.

Комбинируя обе предыдущие формулы, мы и получим названное выше выражение для постоянной E энергии:

$$E=\mp\frac{k}{2a}. \tag{16}$$

Легко проверить, что оно остается верным также и в случаях, исключенных ранее. Действительно, для параболической орбиты имеем $E=0$, а $a=\infty$; для вырожденной эллиптической орбиты $2a$ представляет расстояние от центра силы до единственного афелия, так что формула (15) является не чем иным, как равенством (10) п. 5. Наконец, если речь идет о вырожденной гиперболической орбите, то на полупрямой, к которой сводится ветвь гиперболы, нельзя дать прямого геометрического истолкования полуоси a. Величина a является предельным значением, к которому стремится при $c\to 0$ длина действительной полуоси гиперболы при каком-либо заданном значении постоянной энергии $E>0$; равенство (16) и определяет этот предел.

9. Кеплерово движение. Рассмотрим, в частности, эллиптическое движение в собственном смысле, которое характеризуется двумя условиями: $E<0$, $c\neq 0$.

Легко видеть, что в этом случае движение точки, притягиваемой центром S с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, является *кеплеровым движением*, т. е. движением, удовлетворяющим первым двум законам Кеплера (см. п. 1). Действительно, движение является центральным по отношению к S, такой же, по предположению, будет и сила. Далее, орбита является эллипсом, имеющим фокус в S; и, наконец, как и во всяком движении под действием центральной силы, справедлив закон площадей по отношению к притягивающему центру.

Следовательно, речь идет о периодическом движении (как это, впрочем, a priori было ясно на основании двух соображений: орбита является замкнутой и секторная скорость постоянна). Вводя период (или продолжительность обращения) T, можно придать хорошо известную форму основному соотношению (14) между геометрическим, кинематическим и динамическим элементами p, c, k. Достаточно вспомнить (п. 1), что

$$\frac{c^2}{p}=4\pi^2\frac{a^3}{T^2},$$

чтобы написать равенство (14) в виде

$$k=4\pi^2\frac{a^3}{T^2},\tag{17}$$

откуда имеем

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{k}}.\tag{18}$$

10. Закон времени в кеплеровом движении. уравнение Кеплера. В общем случае мы заметили, что во всяком движении под действием центральной силы закон движения будет однозначно определен (интегралом площадей), если только определена орбита (гл. II, п. 6). То же самое будет иметь место и для рассматриваемых здесь движений точки, притягиваемой центром S с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, откуда, естественно, возникает задача о действительном определении для таких движений аналитического выражения закона движения. Мы займемся здесь этой задачей исключительно для случая эллиптического движения в собственном смысле (кеплерово движение), отсылая для других случаев к специальным сочинениям *).

Так как эллиптические движения, наиболее интересные для астрономии, совершаются по орбитам с малыми эксцентриситетами и потому, в предположении, что имеет место закон площадей, можно говорить о движениях почти равномерных, то естественно действительному эллиптическому движению точки P сопоставить фиктивное движение другой точки M, описывающей равномерным движением и с тем же периодом T окружность в плоскости орбиты точки P, концентрическую с орбитой и имеющую диаметром ее большую ось $2a$. Подчиним движение этой точки еще условию, что точки P и M проходят одновременно через два апсида, общие для обеих орбит. При заданном равенстве периодов (а следовательно, и полупериодов) последнее условие будет всегда выполняться, если это совпадение P и M имело место хотя бы один раз в одном из апсидов.

Постоянная угловая скорость n фиктивной точки M называется *средним движением* точки P (этот термин не вполне удовлетворителен, но он общепринят). Среднее движение, очевидно, определяется равенством

$$n = \frac{2\pi}{T};$$

поэтому равенству (18) можно придать вид

$$n^2 = \frac{k}{a^3}. \tag{18'}$$

С другой стороны, если мы введем также и малую полуось b эллиптической орбиты точки P и примем во внимание очевидное тождество (уже употреблявшееся в кинематике: т. I, гл. II, п. 51)

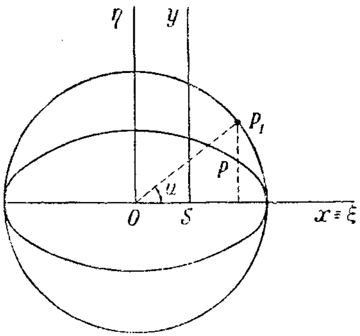
$$\pi ab = \frac{cT}{2},$$

то для среднего движения получим выражение

$$n = \frac{c}{ab}. \tag{19}$$

*) См., например, Субботин, Курс небесной механики, т. I, 1933; Мультон, Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935. (*Прим. ред.*)

Рассмотрим теперь в плоскости две системы прямоугольных осей (фиг. 13): 1) систему xy с началом в центре силы S, причем ось x возьмем вдоль большой оси орбиты и направим ее к перигелию, а ось y ориентируем таким образом, чтобы положительное направление от x к y совпадало с направлением движения точки P (и M); 2) систему $\xi\eta$ с началом в центре O, общем для орбит точек P и M, получающуюся из системы xy путем поступательного перенесения.



Фиг. 13.

Так как половина расстояния между фокусами OS равна ae, то имеем

$$x = \xi - ae, \quad y = \eta. \tag{20}$$

С другой стороны, известно, что если P есть любая точка эллипса и P_1 — та точка окружности, которая имеет ту же абсциссу, что и P и лежит с той же стороны относительно большой оси, то *эксцентрической аномалией* точки P называется угол u между радиусом OP_1 и полярной осью $O\xi$[1]).

Параметрические уравнения эллипса в функциях от аномалии имеют вид

$$\xi = a\cos u, \quad \eta = b\sin u. \tag{21}$$

В течение кеплерова движения точки P аномалия u будет вполне определенной функцией времени; эту функцию мы и намерены определить аналитически.

С этой целью возьмем снова интеграл площадей (относительно центра S)

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c$$

и подставим в него вместо x и y их выражения (20), а в полученный таким образом результат вместо ξ и η — их выражения (21). Таким путем мы получим уравнение

$$c = \xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta - ae\dot{\eta} = ab\dot{u}(1 - e\cos u),$$

которое, принимая во внимание (19), можно написать в виде

$$\frac{d}{dt}(u - e\sin u) = n.$$

[1]) В этом пункте мы обозначаем согласно установившемуся обычаю через u эксцентрическую аномалию. В предыдущей главе, а также и в следующем п. 11 та же буква стоит вместо $^1/_r$, что также сообразуется с традицией.

Интегрируя от некоторого момента t_0, когда точки P и M вместе проходят через перигелий (здесь имеем $u = 0$), придём к уравнению

$$u - e \sin u = l, \tag{22}$$

где положено

$$l = n(t - t_0). \tag{23}$$

Эта переменная l, линейная относительно времени, равна, очевидно, углу, который составляет с полярной осью $O\xi$ в момент времени t радиус-вектор OM, идущий в фиктивную точку M, и называется *средней аномалией* точки P. Уравнение (22) и есть известное *уравнение Кеплера*, которое в эллиптическом движении в любой момент связывает эксцентрическую аномалию и среднюю аномалию l и которое на основании равенства (23) в неявной форме определяет u в функции от времени[1]).

11. Орбиты Эйнштейна. Прервем на время последовательный ход наших выводов, чтобы очень коротко указать на те применения, которые нашла предыдущая теория в двух основных направлениях современной физики: в теории относительности Эйнштейна и в учении Бора о *структуре атома*.

Прежде всего рассмотрим орбиты планет, которые получаются в результате применения к небесной механике теории относительности *). По этой теории (дающей лучшее приближение к действительному движению, чем теория, основанная на законах Кеплера) к основному выражению для притягивающей силы необходимо присоединить поправочный член, обратно пропорциональный четвертой степени расстояния и также имеющий характер притягивающей силы. Следует заметить, что здесь мы встречаемся с известным примером так называемой *теории планетных возмущений*, общую постановку которой мы дадим в § 5.

Если обозначим, как обычно, через

$$\varphi(r) = -\frac{k}{r^2} = -\frac{c^2}{p}\frac{1}{r^2}$$

радиальную составляющую силы притяжения, то в случае кеплерова движения дифференциальное уравнение второго порядка орбиты в

---

[1]) Определение u как явной функции от l, основанное на уравнении (22), составляет основную задачу сферической астрономии; таким образом Кеплер дал начало многочисленным исследованиям, направленным как к теоретическому углублению природы функции $u(l)$ из уравнения (22), так и к тому, чтобы облегчить числовые выкладки. См. Levi-Civita, Sopra la equazione di Kepler, *Rend. Lincei*, т. 13, 1904, стр. 260—268.

*) См. статью А. Эйнштейна в сборнике „Принцип относительности" из серии „Классики естествознания", 1935. *(Прим. ред.)*

общей форме (11′) предыдущей главы (п. 7), т. е. уравнение

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{1}{c^2u^2}\varphi\left(\frac{1}{u}\right),\quad u=\frac{1}{r} \tag{24}$$

перейдет в уравнение

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{1}{p};$$

полагая

$$\xi=au=\frac{a}{r} \tag{25}$$

и припоминая, что для эллипса $p=a(1-e^2)$, можем написать

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2}=-\xi+\frac{1}{1-e^2}. \tag{26}$$

Если присоединить к радиальной силе $\varphi(r)$ возмущающую силу притяжения, обратно пропорциональную четвертой степени расстояния, т. е. поправочный член вида $-\mu/r^4=-\mu u^4$, где μ обозначает положительную постоянную, то на основании уравнения (25) к правой части равенства (26) придется добавить член

$$\frac{\mu}{c^2a}\xi^2,$$

который удобнее написать в виде

$$\frac{3}{2}\varepsilon\xi^2,$$

где ε означает существенно положительную постоянную $2\mu/3c^2a$. При этом дифференциальное уравнение возмущенной орбиты примет вид

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2}=-\xi+\frac{1}{1-e^2}+\frac{3}{2}\varepsilon\xi^2. \tag{26′}$$

Если мы будем рассматривать постоянную ε как величину первого порядка (квадратом которой можно пренебречь), то к уравнению (26′) можем прийти, применяя к движению планет теорию Эйнштейна во втором приближении (тогда как в первом приближении, т. е. при $\varepsilon=0$, мы снова получим уравнение (26), выражающее кеплерово движение). Необходимо добавить, что согласно этой теории постоянная ε определяется равенством [1])

$$\varepsilon=\frac{2k}{aV^2}, \tag{27}$$

где k имеет обычное значение (сила притяжения, обратно пропорциональная квадрату расстояния и действующая на единичную массу,

[1]) См. A. Palatini, Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi secondo la teoria di Einstein, *Nuovo Cimento*, сер. VI, т. XIV (1917).

находящуюся на расстоянии, равном 1), а V обозначает скорость света.

Уравнение (26′) интегрируется в эллиптических квадратурах, но, имея в виду получить здесь только одно частное следствие, имеющее большой астрономический интерес, мы ограничимся интегрированием его в первом приближении, т. е. по крайней мере до членов порядка выше первого относительно ε[1]). Поэтому предположим, что начальные постоянные выбраны таким образом, что невозмущенная орбита, определенная при тех же начальных условиях из уравнения (26), к которому при $\varepsilon=0$ сводится уравнение (26′), оказывается эллиптической (или орбитой в кеплеровом движении).

Обозначая в этом предположении через ξ_0 интеграл уравнения (26), на основании равенства (25) и полярного уравнения эллипса имеем

$$\xi_0=\frac{1+e\cos\theta}{1-e^2}. \tag{28}$$

Положив

$$\xi=\xi_0+\varepsilon\xi_1, \tag{29}$$

получим из уравнения (26′) для неизвестной функции ξ_1, с точностью до членов по крайней мере второго порядка относительно ε, линейное неоднородное уравнение (или уравнение в вариациях уравнения (26′))

$$\frac{d^2\xi_1}{d\theta^2}+\xi_1=\frac{3}{2}\xi_0^2, \tag{30}$$

общий интеграл которого, как известно, можно вычислить посредством одной квадратуры, применяя метод вариации произвольной постоянной (множителя) C, появляющейся в интеграле $C\cos\theta$ однородного уравнения.

Принимая во внимание выражение для ξ_0 (28), мы видим, что все члены функции ξ_1 являются периодическими с периодом 2π, за исключением лишь того, который происходит от члена с $\cos\theta$ в правой части уравнения (30); точнее, имеем

$$\xi_1=\xi_2+\frac{3}{2}\frac{e}{(1-e^2)^2}\theta\sin\theta,$$

где ξ_2 обозначает периодическую функцию с периодом 2π. Отсюда, а также из равенства (29) заключаем, что

$$\xi=\xi_0+\varepsilon\xi_2+\frac{3}{2}\frac{\varepsilon e}{(1-e^2)^2}\theta\sin\theta. \tag{31}$$

[1]) Эддингтон, Теория относительности, 1934, гл. III, п. 40.

Но из общей теории орбит точек, находящихся под действием центральных сил (гл. II, п. 8), мы знаем, что общий интеграл (31) уравнения (26′) должен быть периодическим по отношению к θ с некоторым периодом 2Θ, равным удвоенному значению соответствующего апсидального угла Θ, который здесь необходимо является близким апсидальному углу π орбиты в кеплеровом движении. Если мы положим

$$\Theta=\pi+\frac{1}{2}\sigma, \tag{32}$$

то величина σ, имеющая тот же порядок, что и ε, даст *смещение*, которое испытывает перигелий возмущенной орбиты по отношению к перигелию орбиты в кеплеровом движении при каждом обращении планеты (путь, пробегаемый между двумя последовательными прохождениями через перигелий).

Чтобы оценить теперь это смещение σ, заметим, что вследствие ожидаемой периодичности ξ должно быть

$$\xi(\theta+2\Theta)-\xi(\theta)=0$$

или же, принимая во внимание (31) и (32) и пренебрегая членами порядка выше первого,

$$\xi(\theta+2\pi)-\xi(\theta)-\sigma\xi_0'=0. \tag{33}$$

Между тем, с другой стороны, из равенств (31) и (32) выводим

$$\xi(\theta+2\pi)-\xi(\theta)=3\pi\frac{\varepsilon e}{(1-e^2)^2}\sin\theta,$$

или на основании того же равенства (28)

$$\xi(\theta+2\pi)-\xi(\theta)=-3\pi\frac{\varepsilon}{1-e^2}\xi_0'.$$

Достаточно подставить этот результат в равенство (33), чтобы заключить, что смещение σ перигелия планеты при одном обращении с точностью по крайней мере до членов порядка выше первого относительно ε определяется равенством

$$\sigma=3\pi\frac{\varepsilon}{1-e^2}. \tag{34}$$

12. Чтобы дать понятие о порядке величины этого смещения, начнем с оценки постоянной (27)

$$\varepsilon=\frac{2k}{aV^2}.$$

Если обозначим через a_0 радиус (средний) земной орбиты, предполагаемой приблизительно круговой, и вспомним, что в силу равенства (8) п. 4, k/a при том же предположении равно квадрату скорости (постоянной) v_0 Земли, то равенство (27) можно написать в форме

$$\varepsilon = \frac{2a_0}{a}\left(\frac{v_0}{V}\right)^2. \tag{27'}$$

Далее, общеизвестно, что скорость v_0 движения Земли по орбите равна примерно 30 *м/сек*, а скорость света около 300 000 *км/сек*. Отсюда следует, что порядок величины отношения $\frac{v_0}{V}$ равен

$$\frac{30}{300\,000} = 10^{-4},$$

а порядок величины $\left(\frac{v_0}{V}\right)^2$ равен 10^{-8}. Так как средние расстояния различных планет от Солнца сравнимы между собой (если за единицу берется средний радиус a_0 земной орбиты, то для Меркурия имеем 0,39 и для Нептуна 30,06), то на основании соотношения (27') можно сказать, что 10^{-8} дает грубо также и порядок величины постоянной ε.

Чтобы оценить смещение σ, определяемое равенством (34), необходимо принять во внимание величину среднего расстояния до рассматриваемой планеты.

Обратимся, например, к Меркурию, для которого имеем $e = 0{,}2$ и, как только что указано, $\frac{a}{a_0} = 0{,}39$. В таком случае, принимая во внимание равенства (34), (27') и ранее определенную величину $\left(\frac{v_0}{V}\right)^2$, найдем, что смещение перигелия равно

$$3\pi \frac{2}{0{,}39 \cdot 0{,}96 \cdot 10^8} = 3\pi \frac{2}{39 \cdot 96 \cdot 10^4}.$$

Чтобы выразить это смещение в секундах (вместо радианов), только что найденное число надо умножить на $\frac{6^4 \cdot 10^3}{2\pi}$ (число секунд в одном радиане), после чего получим

$$\frac{3 \cdot 6^4}{39 \cdot 96 \cdot 10} = \frac{6^3}{13 \cdot 16 \cdot 10},$$

т. е. немного больше одной десятой секунды.

Так как в течение столетия Меркурий совершает около 420 обращений вокруг Солнца, то для перигелия этой планеты найдем таким образом вековое смещение в 42″, что как раз соответствует разности между полным наблюдаемым смещением и смещением, предсказываемым небесной механикой на основе ньютоновой теории возмущений, происходящих от действия других планет. До создания теории относительности для объяснения одного этого явления, вне всякой связи с другими явлениями, выдвигались искусственные гипотезы, которые, будучи логически развиты, в большинстве случаев, в отношении других свойств движения планет, привели бы к более существенным расхождениям с наблюдениями.

13. Понятие о строении атома согласно теории Бора. Современная электронная теория материи привела к представлению об атоме как о системе, состоящей из положительно заряженного ядра (*протона*) и вращающихся вокруг него отрицательно заряженных частиц *(электронов)*, масса которых весьма мала по сравнению с массой центрального ядра.

На основании классического закона Кулона два заряда с противоположными знаками (поскольку в вопросах динамики их можно рассматривать как точки) притягивают друг друга с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Если, в частности, мы обратимся к атому водорода, состоящему из ядра и одного только электрона с зарядом, равным и противоположным заряду ядра, то эти два заряда механически будут подобны двум материальным точкам, взаимно притягивающимся по закону Ньютона (т. I, гл. XI, § 1), с тем лишь различием, что множитель пропорциональности k не будет уже более равен fmm_1, как в ньютоновом случае. Отсюда следует, что изучение движения электрона вокруг ядра входит в задачу о движении двух точек, притягивающихся с силами, обратно пропорциональными квадрату расстояния. Более того, мы докажем в п. 21, что задача о движении электрона может быть сведена к задаче о движении материальной точки, притягиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Но в то время как в абстрактном случае и в вопросах механики a priori возможны какие угодно значения для постоянных интегрирования и, в частности, для постоянной c площадей, в случае электрона приходится (по соображениям, связанным с так называемой *квантовой теорией*, которых мы не можем здесь даже слегка коснуться) принять, что постоянная c площадей может быть только кратным отношения $h/2\pi$, где h есть некоторая универсальная постоянная, называемая *постоянной Планка*, т. е.

$$c = n\frac{h}{2\pi}$$

при целом и положительном n. В случае круговых орбит, у которых параметр совпадает с радиусом, из равенства (14) следует

$$c = \sqrt{k}\,\sqrt{a};$$

отсюда мы заключаем, что: 1) между возможными с точки зрения квантовой теории круговыми орбитами существует одна (та, которая соответствует случаю $n=1$) с минимальным радиусом

$$a_1=\frac{h^2}{4\pi^2 k};$$

2) остальные орбиты имеют радиусы

$$a_n=n^2 a_1 \qquad (n=2,\ 3,\ 4\ \ldots).$$

Согласно с этой теорией каждая спектральная линия обусловлена переходами электрона с одной орбиты на другую возможную орбиту. Исходя из этого предположения, Бор установил следующий результат [1]). Если обозначим через E_n полную энергию движения вдоль n-ой возможной орбиты, то, как известно (п. 4), будем иметь

$$E_n=-\frac{1}{2}\frac{k}{a_n}=-\frac{1}{2}\frac{k}{a_1}\frac{1}{n^2};$$

поэтому для другой возможной орбиты, внешней по отношению к первой ($n'>n$), будем иметь (алгебраически)

$$E_{n'}>E_n.$$

Если положим

$$E_{n'}-E_n=h\nu,$$

то величина ν даст частоту, соответствующую спектральной линии о которой идет речь.

Этот и другие выводы, полученные Бором путем присоединения подходящих квантовых гипотез к гипотезам классической физики, находятся в удивительном согласии с результатами наиболее тонких экспериментальных наблюдений.

§ 3. Закон всемирного тяготения

14. Обратимся снова к рассуждениям, изложенным в п. 1. Обозначим через P_1, P_2, ... различные планеты и условимся обозначать одним и тем же индексом i все соответствующие отдельной планете P_i элементы: геометрические, кинематические и механические (расстояние от Солнца r_i, большая полуось орбиты a_i, период T_i, масса m_i и т. д.).

Мы знаем, в качестве первого приближения, из законов Кеплера, что различные планеты движутся так, как если бы каждая из них притягивалась силой (центральной), по величине соответственно равной

$$\frac{km_1}{r_1^2},\ \frac{km_2}{r_2^2},\ \ldots,$$

[1]) См., в частности, Э. В. Шпольский, Атомная физика, т. I, 1949.

где коэффициент

$$k = \frac{c_1^2}{p_1} = 4\pi^2 \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{c_2^2}{p_2} = 4\pi^2 \frac{a_2^3}{T_2^2} = \ldots$$

имеет одно и то же значение для всех планет.

Это приводит к более общему выводу: физические свойства пространства вокруг Солнца таковы, что какая-нибудь масса m, помещенная на некотором расстоянии r от Солнца, испытывает с его стороны действие притягивающей силы (центральной), по величине равной

$$\frac{km}{r^2},$$

где коэффициент k оказывается таким же, как и в случае планет.

Теперь общеизвестно, что различные планеты имеют по одному и более спутников (Земля, Нептун, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран); Ньютон впервые (для известных тогда спутников) прямыми наблюдениями установил, что также и для движения всякого спутника вокруг соответствующей планеты приблизительно выполняются законы Кеплера. Допустим, что в первом приближении движение спутника вокруг своей планеты можно рассматривать как абсолютное (в обычном смысле, приписываемом этому слову в механике).

Кроме того, можно отвлечься от того, что планета и спутник притягиваются Солнцем. Если законы Кеплера сохраняют свое значение для движения спутника и планеты, как и в случае планеты и Солнца, то можно принять, что любая планета P_i притягивает спутника с массой m', находящегося на расстоянии r', с силой

$$\frac{k_i m'}{r'^2}, \tag{35}$$

где k_i обозначает некоторый коэффициент, который в силу третьего закона Кеплера остается одним и тем же в случае, если планета P_i имеет несколько спутников.

Но законы Кеплера ничего не говорят относительно соотношений между различными коэффициентами k, k_i, которые входят в определенные таким образом выражения для притяжения планет Солнцем и спутников соответствующими планетами.

Чтобы итти дальше, обратимся к Земле, которую примем за планету P_1 (с массой m_1 на расстоянии r_1 от Солнца); она притягивает Луну, масса которой пусть будет m' и расстояние от Земли r', с силой

$$\frac{k_1 m'}{r'^2}.$$

С другой стороны, она притягивается Солнцем с силой

$$\frac{km_1}{r_1^2}. \tag{36}$$

Но по третьему закону Ньютона этой силе притяжения Солнцем Земли соответствует равная ей по величине сила притяжения Солнца Землей; а так как решительно нет никаких оснований рассматривать эту силу отличной по природе от силы (35), с которой Земля притягивает Луну, то нам приходится принять, что если мы через m_0 обозначим массу Солнца, то величина этого притяжения Солнца Землей будет

$$\frac{k_1 m_0}{r_1^2}.$$

Если мы приравняем эту величину величине (36) прямо противоположной силы, то получим

$$km_1 = k_1 m_0$$

или же

$$\frac{k}{m_0} = \frac{k_1}{m_1};$$

поэтому если обозначить через f общую величину этих двух отношений, то можно написать

$$k = fm_0, \quad k_1 = fm_1.$$

Имея в виду равенства (35) и (36) и применяя третий закон Ньютона также и к паре Земля — Луна, мы видим, что Солнце и Земля взаимно притягиваются с силой (направленной по соединяющей их прямой)

$$f\frac{m_0 m_1}{r_1^2},$$

а Земля и Луна с силой

$$f\frac{m_1 m'}{r'^2}.$$

Подобные рассуждения можно повторить и для любой другой планеты, имеющей спутника; распространяя путем обычной индукции этот результат также и на планеты без спутников и вообще на все небесные тела, заключаем: *два каких угодно небесных тела, рассматриваемые как материальные точки, взаимно притягиваются с силой, направленной по соединяющей их прямой, по величине прямо пропорциональной их массам m, m' и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними r, т. е. с силой*

$$f\frac{mm'}{r^2}, \tag{37}$$

где f обозначает постоянную всемирного тяготения.

Таким образом, в отношении небесных тел, рассматриваемых как материальные точки, мы приходим к тому закону действия силы, который под названием *ньютонианского притяжения* мы приняли в виде априорной гипотезы в гл. XI т. I.

15. В процессе индукции Ньютона остается сделать последний, может быть, еще более смелый шаг, тот самый, о котором народное предание сохранило память в известном анекдоте из жизни Ньютона.

Возвращаясь к притяжению Землей Луны и сопоставляя с ним силу тяжести, которая в пределах наших прямых опытов проявляется в виде притяжения Землей всякого тела, как бы оно ни было мало, естественно будет принять, что притяжение, которым, так сказать, Земля удерживает Луну на ее орбите, является не чем иным, как земной силой тяжести, ослабленной для единицы массы вследствие большого расстояния, но способной к столь большому действию вследствие значительной величины лунной массы по сравнению с массой тел, над которыми мы можем непосредственно производить опыты.

Отсюда и название *тяготения*, которое обыкновенно дают ньютонианскому притяжению.

С другой стороны, так как частица P притягивается Землей, как бы она мала ни была, то в свою очередь в силу третьего закона Ньютона она должна притягивать Землю с силой, прямо противоположной.

Отсюда естественно сделать вывод, что ньютонианское притяжение не является исключительно свойством больших небесных масс, а представляет собой естественное и элементарное свойство материи. Здесь приходят на помощь математические выкладки только что упоминавшейся гл. XI т. I. Действительно, там мы видели, что если допустить для всякой пары материальных элементов существование взаимного ньютонианского притяжения, то небесное тело, имеющее форму огромного материального шара, состоящего из однородных концентрических слоев, притягивает всякую внешнюю материальную точку с силой, с которой притягивала бы ту же самую материальную точку масса сферы, целиком помещенная в ее центре.

Таким образом, оказывается оправданным распространение закона действия силы (37) на любую возможную пару материальных точек.

В заключение предыдущих индуктивных выводов можно сформулировать следующий закон, известный под названием *закона Ньютона, или закона всемирного тяготения: всякие две материальные точки во Вселенной взаимно притягиваются с силой, направленной по прямой, их соединяющей, прямо пропорциональной их массам m, m' и обратно пропорциональной квадрату рас-*

стояния между ними r (37):

$$f\frac{mm'}{r^2}.$$

Как уже упоминалось раньше (т. I, гл. XI, п. 3), *постоянную f тяготения* (или *постоянную Гаусса*), измеряющую взаимное притяжение двух единичных масс на единичном расстоянии, впервые определил лабораторным путем Кэвендиш (1797). Впоследствии было выполнено много других определений этой величины все более точными способами, и все они в согласии друг с другом приводят к одному и тому же численному значению f в единицах CGS, равному $6{,}7 \cdot 10^{-8}$ (уже упоминавшееся место из п. 3).

§ 4. Проверка закона всемирного тяготения по его следствиям

16. Индуктивный процесс открытия закона всемирного тяготения, схематически изложенный в предыдущих пунктах, опирается на совокупность данных наблюдения и, кроме того, на законы Кеплера (для планет относительно Солнца, для спутников относительно соответствующих планет). Но очевидно, что, если допустить справедливость закона Ньютона, согласно которому небесные тела взаимно притягиваются друг к другу, то, даже рассматривая эти тела как материальные точки, нельзя считать законы Кеплера вполне точными. Эти законы, выполняются только тогда, когда имеется только два взаимно притягивающихся тела и центральное тело неподвижно (относительно звезд).

Поэтому прежде чем принять гипотезу Ньютона как закон, необходимо проверить, допускает ли она в пределах соответствующего приближения справедливость законов Кеплера и других экспериментальных результатов, уже полученных ранее.

17. Справедливость в первом приближении законов Кеплера для планет. Все тела планетной системы (Солнце, планеты, спутники) не только притягиваются друг к другу попарно, но и испытывают также притяжение звезд. Однако среднее расстояние звезд от Солнца так велико по сравнению с размерами планетной системы (ближайшая звезда отстоит от Солнца круглым числом в 300 000 раз дальше Земли), что действием звезд на планетную систему можно пренебречь.

При таком приближении остается принять во внимание только взаимные притяжения тел планетной системы. Будем рассматривать определенную планету, например Землю, которую обозначим через P. Земля притягивается Солнцем и остальными телами солнечной системы; как Солнце, так и эти остальные тела находятся от Земли на расстояниях, сравнимых между собой. Но масса Солнца (что подтвердится потом и что теперь мы можем предположить лишь интуитивно на основании только грубой оценки ее действия) далеко превосходит массу каждой из планет, так что можно считать, что притяжение Земли Солнцем будет преобладающим. Пренебрегая остальными силами притяжения, нам придется рассматривать пару Солнце — Земля как изолированную во Вселенной.

Солнце и Земля, притягивая друг друга, сообщают одно другому (по отношению к звездам, к которым мы всегда должны будем относить движение) некоторое ускорение; но так как оба притяжения (Солнцем Земли и Землею Солнца) в силу третьего закона Ньютона равны по величине, то эти ускорения Солнца и Земли обратно пропорциональны их массам, так что ускорение, испытываемое Землей, превосходит во столько раз ускорение Солнца, во сколько раз масса Солнца превосходит массу Земли. Пренебрегая этим очень маленьким ускорением Солнца, происходящим от притяжения его Землей, мы можем рассматривать Солнце как неподвижное или имеющее прямолинейное равномерное движение относительно звезд. Мы приходим к схематическому рассмотрению движения Земли вокруг Солнца, как материальной точки P, притягиваемой неподвижным центром S силой, по величине равной

$$f\frac{m_0 m}{r^2},$$

где m_0 и m обозначают массы Солнца и Земли, r — расстояние между ними.

Таким образом, мы пришли к задаче, полностью изученной в § 2. Результаты, полученные там, можно перенести сюда, если положить

$$fm_0 = k \tag{38}$$

и принять во внимание то несущественное обстоятельство, что здесь движущаяся точка P имеет массу m (вместо 1). Из всех орбит, рассмотренных там и вообще возможных для точки, здесь в случае пары точек Солнце — Земля (или Солнце — планета) возможна только эллиптическая орбита. Отсутствие столкновений и тот очевидный факт, что движение происходит на конечном расстоянии от Солнца, позволяют прямо заключить, что орбита Земли (как и всякой другой планеты) есть эллипс, имеющий фокус в Солнце и описываемый согласно закону площадей.

Мы видим, таким образом, что при том приближении, которому соответствует постановка задачи, закон Ньютона для движения Земли (и вообще всякой другой планеты) вокруг Солнца заключает в себе два первых закона Кеплера. Что же касается третьего, то из соотношения (17), п. 9 и из равенства (38) следует

$$4\pi^2\frac{a^3}{T^2} = fm_0 \tag{39}$$

или

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{fm_0}{4\pi^2},$$

т. е., что отношение куба большой полуоси планетной орбиты к квадрату продолжительности обращения соответствующей планеты не зависит от элементов планеты, а только от постоянной Гаусса и массы Солнца. Поэтому, какова бы ни была рассматриваемая планета, для указанного отношения всегда получится одно и то же значение. Это и выражает как раз третий закон Кеплера.

18. Справедливость в первом приближении законов Кеплера для движения спутников планет. Обратимся, например, к Солнцу S, Земле P и Луне P' и обозначим массы их соответственно через m_0, m, m'. При указанном в предыдущем пункте приближении мы можем рассматривать Солнце как неподвижное (или движущееся прямолинейно и равномерно) относительно звезд и систему Солнце—Земля—Луна как изолированную во Вселенной.

Обозначим теперь через $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$ силы притяжения, с которыми единица массы Солнца действует на единицу массы Земли P и соответственно Луны P', так что $m_0\boldsymbol{A}$ и $m_0\boldsymbol{A}'$ будут полными солнечными притяжениями, действующими на единицу массы Земли и соответственно Луны. Если аналогично обозначим через Φ притяжение единичной массой Земли единичной массы Луны, то $m\Phi$ будет полным притяжением Землей единичной массы Луны и, обратно, $-m'\Phi$ — полным притяжением Луной единичной массы Земли.

Если обозначим теперь через $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}'$ ускорения (абсолютные, т. е. относительно галилеевых осей) точек P и P', то соответствующие уравнения движения (оба отнесенные к единичной массе движущегося тела) примут вид

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=m_0\boldsymbol{A}-m'\Phi,\\ \boldsymbol{\alpha}'&=m_0\boldsymbol{A}'+m\Phi.\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

Если теперь отнесем движение точки P' (Луна) к движущимся осям с началом в точке P (Земля) и с неизменными направлениями, то ускорение (относительное) $\boldsymbol{a}$ точки P' относительно точки P определится по теореме Кориолиса (поскольку переносное движение здесь поступательное, т. I, гл. IV, п. 4) равенством

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\alpha}'-\boldsymbol{\alpha},$$

откуда на основании уравнений (40) заключаем, что

$$\boldsymbol{a}=m_0(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A})+(m+m')\Phi.\tag{41}$$

Но среднее расстояние SP Солнце—Земля равно почти 400-кратному расстоянию PP' Земля—Луна (эти расстояния приблизительно равны 23 000 и, соответственно, 60 земным экваториальным радиусам), так что единичные солнечные притяжения A, A', действующие на единицу земной и лунной массы, приблизительно равны между собой (по величине и направлению); с другой стороны, массой Луны m' по сравнению с массой Земли m в первом приближении можно пренебречь (отношение этих двух масс равно 1 : 81).

Принимая это во внимание, в качестве уравнения относительного движения Луны по отношению к Земле вместо уравнения (41) можно взять уравнение

$$a = m\Phi. \tag{41'}$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение движения точки P', притягиваемой неподвижным центром P с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Поэтому достаточно перенести сюда без существенных изменений рассуждения предыдущего пункта, чтобы заключить, что при том приближении, при котором уравнение (41') может представлять относительное движение Луны по отношению к Земле, для этого движения сохраняют свою силу законы Кеплера.

Если, в частности, введем большую полуось a' лунной орбиты и период (или продолжительность соответствующего *звездного*, т. е. отнесенного к неизменным по направлению осям, обращения) T', то для коэффициента пропорциональности земного притяжения (отнесенного к единице массы) будем иметь выражение (аналогичное выражению (39), относящемуся к солнечному притяжению)

$$fm = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2}. \tag{42}$$

Все это с теми же самыми заключениями можно распространить и на всякую другую пару планета — спутник.

19. То, что из закона Ньютона вытекают как следствия (в первом приближении) законы Кеплера во всех случаях, в которых они были проверены наблюдениями, составляет очень внушительное доказательство законности гипотезы, выражаемой этим законом.

Другим классическим доказательством мы займемся в следующем пункте, здесь же покажем, как из рассуждений предыдущих пунктов можно получить три замечательных следствия, из которых первые два иллюстрируют большую важность закона тяготения, а третье можно истолковать как дальнейшее экспериментальное доказательство этого закона.

а) Астрономическое определение отношения между массой планеты, имеющей спутника, и массой Солнца. Обозначая через m_0, m массы Солнца S и планеты P, через a, a' — большие полуоси орбит планеты P и спутника P'

и, наконец, через T, T' — соответствующие времена обращения, возьмем снова формулы (39) и (42), дающие коэффициенты пропорциональности полного притяжения Солнцем единицы массы планеты P и полного притяжения планетой P единицы массы спутника P', т. е.

$$fm_0 = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \quad fm = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2}.$$

Отсюда, деля почленно второе равенство на первое, для отношения масс планеты и Солнца получим значение

$$\frac{m}{m_0} = \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2},$$

вычисление которого требует только знания элементов a, a', T, T', которые легко получить из наблюдения.

Так, например, обращаясь к Солнцу—Земле—Луне, найдем, что масса Солнца в 333 000 раз больше массы Земли.

б) Средняя плотность Земли. Массу m Земли (а следовательно, и ее плотность) можно определить только приближенно, исходя из величины ускорения силы тяжести g, предполагаемой известной на основании прямых гравиметрических исследований.

Мы знаем, что вес единицы массы g в какой-нибудь точке земной поверхности есть равнодействующая земного притяжения и центробежной силы (та и другая отнесены к единице массы). Но преобладающей составляющей является первая, и если Землю приближенно рассматривать как сферу с радиусом R, с концентрическими однородными слоями, и принять величину fm в качестве коэффициента k земного притяжения, то на поверхности Земли этой составляющей придется приписать величину

$$\frac{fm}{R^2}.$$

Поэтому (предполагая приближенно, что центробежная сила, действующая на единицу массы на поверхности Земли, рассматривается как ничтожная величина) можно положить

$$g = \frac{fm}{R^2}, \tag{43}$$

откуда для массы Земли получается значение

$$m = \frac{gR^2}{f}.$$

Предполагая, что поверхность Земли сферична, и разделив массу ее на объем, получим для средней плотности Земли значение

$$\mu = \frac{3g}{4\pi Rf}.$$

Но так как $g = 9{,}8$ *м/сек*$^{-2}$, а по определению метра $2\pi R = 4 \cdot 10^7$ *м*, то имеем

$$\frac{g}{4\pi R} = \frac{9{,}8}{8 \cdot 10^7};$$

отсюда, так как в единицах CGS $f = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$, заключаем, что средняя плотность Земли (в *г* · *см*$^{-3}$) равна

$$\frac{3 \cdot 9{,}8 \cdot 10}{8 \cdot 6{,}7},$$

т. е. приблизительно 5,5.

Так как средняя плотность горных пород на поверхности колеблется около 2,5, то необходимо допустить, что внутри Земли материя является более плотной, чем на поверхности.

в) Определение величины g по движению Луны. С этой целью достаточно принять во внимание формулы (42) и (43), т. е. формулы

$$fm = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2}, \quad g = \frac{fm}{R^2}, \tag{44}$$

где, как обычно, a' и T' обозначают большую полуось лунной орбиты и соответствующий период, R — земной радиус. Исключая fm, получим для g величину

$$g = 4\pi^2 \frac{a'^3}{R^2 T'^2} = 2\pi R \left(\frac{a'}{R}\right)^3 \frac{2\pi}{T'^2}. \tag{44'}$$

Вспомним, что среднее значение отношения a'/R равно 60, а время (звездного) обращения Луны равно 27 *сут* 7 *час* 45 *мин*, или 39 345 *мин* $= 39\,345 \cdot 60$ *сек*. Принимая, кроме того, во внимание определение метра, найдем (в *м* · *сек*$^{-2}$)

$$g = \frac{4 \cdot 6^3 \cdot 10^{10} 2\pi}{(39\,345 \cdot 60)^2},$$

т. е. приблизительно 9,74.

Это значение немного отличается от 9,80 — среднего значения g, вычисленного прямым путем на поверхности Земли. Несмотря на эту разницу, результат, полученный таким образом, можно принять за доказательство справедливости закона тяготения, поскольку ошибку, оставаясь в области той же ньютонианской теории, можно объяснить, тем, что две формулы (44) были выведены с различной степенью точности. Вторую из них мы получили, предполагая, что Земля имеет сферическую форму и состоит из однородных концентрических слоев, а также пренебрегая центробежной силой, происходящей от вращения (см. т. I, гл. XVI, п. 36). В действительности за численное значение величины fm/R^2 следовало бы принять не ускорение силы тяжести g, а земное притяжение G, которое превосходит g (на экваторе на 3,5 *см/сек*^{2}), в силу чего разница была бы уменьшена.

Важно также заметить, что при выводе первого из равенств (44) и, следовательно, равенства (44′), вытекающего из равенств (44), мы, во-первых, считали равными полные притяжения Солнцем единицы массы планеты и спутника, во-вторых, мы пренебрегали массой спутника по сравнению с массой планеты. В случае Земли—Луны нетрудно убедиться, что ошибка в большей части зависит от этого последнего предположения, на основании которого и был получен результат вышеуказанного вычисления g.

20. Кометы. Дальнейшее экспериментальное доказательство закона тяготения, которое уже во времена Ньютона казалось по справедливости решающим, было получено из наблюдений над движением комет. До Ньютона астрономы не рассматривали движения комет; Кеплер, например, принимал их за временные метеоры, порождаемые эфиром. Но Ньютон математическим путем (см. § 2) убедился в том, что точка, притягиваемая неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, может описывать не только орбиты с небольшим эксцентриситетом (каковыми в первом приближении являются орбиты планет), но также и эллипсы, как угодно вытянутые, или даже дуги парабол или гипербол. Принимая это во внимание, он пытался объяснить движение комет, которые обычно появляются на огромных расстояниях от Солнца, приближаются к нему, а затем удаляются и исчезают.

С этой целью производились прямые наблюдения кометы, которая появилась 14 ноября 1680 г.; немного спустя, 5 декабря, она скрылась в лучах Солнца. По истечении нескольких дней, именно 22 декабря, появилась комета с противоположной стороны от Солнца; она быстро двигалась, удаляясь от него, пока не исчезла.

После математической обработки результатов полученных таким образом двух рядов наблюдений, Ньютон установил, что в действительности речь шла об одной и той же комете, описавшей дугу параболы с фокусом в Солнце.

Впоследствии наблюдались многочисленные кометы; одни из них двигались по параболическим орбитам, другие — появлявшиеся периодически — по эллипсам с большим эксцентриситетом. Во всяком случае было установлено при удивительном согласии со следствиями из гипотезы Ньютона, что Солнце является фокусом кометных орбит, и при движении приблизительно выполняются закон площадей и третий закон Кеплера (независимость коэффициента солнечного притяжения от какого-либо характеристического элемента отдельных комет).

Это доказательство станет еще более убедительным, если мы обратим внимание на то, что в то время как планеты движутся все в плоскостях, мало наклоненных к плоскости эклиптики (т. е. к плоскости земной орбиты), плоскости кометных орбит относительно этой плоскости имеют значительно более разнообразные наклонения: кометы приходят, так сказать, из всякой области неба.

§ 5. Строгие следствия из закона тяготения

21. Задача двух тел. На основании закона Ньютона основной задачей небесной механики является задача о движении скольких угодно тел (рассматриваемых как материальные точки), попарно притягивающихся силами, пропорциональными произведению масс и обратно пропорциональными квадрату расстояния. Рассмотрим сначала наиболее простой случай, в котором число тел сводится к двум.

В астрономии этот случай осуществляется приблизительно всякий раз, когда рассматриваются такие два небесных тела, для которых можно пренебречь действиями на них всех остальных тел: типичным примером являются так называемые *двойные звезды*.

Если пренебречь действием на систему Солнце—планета или планета—спутник других небесных тел, то к этой задаче двух тел можно будет отнести также и задачу о движении систем Солнце—планета или планета—спутник, которую мы уже рассмотрели в предыдущем параграфе, приводя ее при помощи соответствующих предположений к случаю движения точки, притягиваемой неподвижным центром. Как мы увидим из последующего изложения, эта новая постановка указанных задач, являясь менее схематичной, чем постановка, изложенная в предыдущем параграфе, приводит к приближению, несколько лучшему, чем то, которое было достигнуто при изучении движения точки, притягиваемой неподвижным относительно звезд центром (или центром, находящимся в прямолинейном и равномерном движении).

Итак, пусть P_0 и P будут два тела с массами m_0 и m, которые мы будем рассматривать как изолированные во Вселенной. Аналогично тому, как это делалось в п. 18, обозначим через $\boldsymbol{A}$ притяжение единицей массы P_0 единицы массы P, через $\boldsymbol{\alpha}_0$, $\boldsymbol{\alpha}$ — абсолютные ускорения точек P_0 и P и через $\boldsymbol{a}$ — ускорение (относительное) $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0$ точки P относительно осей с неизменными направлениями и началом в точке P_0.

Так как по третьему закону Ньютона притяжение единицей массы тела P единицы массы тела P_0 есть $-\boldsymbol{A}$, то будем иметь

$$\boldsymbol{\alpha}_0=-m\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{\alpha}=m_0\boldsymbol{A} \tag{45}$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{a}=(m_0+m)\boldsymbol{A}.$$

Это уравнение *относительного движения* одного из двух тел по отношению к другому (в нашем случае тела P относительно тела P_0) тождественно, как мы видим, с движением, которое имело бы тело P, если бы тело P_0 было неподвижным (или находящимся в равномерном и прямолинейном движении относительно звезд) и, притягивая тело P по закону Ньютона, имело бы вместо фактической массы m_0 массу m_0+m. Другими словами, в относительном движении все происходит так, как если бы речь шла о ньютонианском притяжении неподвижным центром с единственным отличием, что коэффициент притяжения k вместо того, чтобы быть равным fm_0 (ср. п. 17), определялся бы равенством

$$k=f(m_0+m). \tag{38'}$$

В случае, когда масса m ничтожна по сравнению с m_0 (Солнце—планета, планета—спутник), мы снова возвращаемся к рассуждениям и результатам пп. 17, 18.

Но во всяком случае, т. е. каков бы ни был порядок величины m по сравнению с m_0, речь идет о задаче, непосредственно интегрируемой (§ 2), и орбита (относительная) точки P относительно точки P_0 является коническим сечением, имеющим фокус в P_0; она может принадлежать к какому-нибудь одному из трех типов (и, в частности, может также быть вырожденной).

Поэтому в случае эллиптической орбиты для движения точки P относительно точки P_0 остаются в силе два первых закона Кеплера (см. п. 9).

Далее, если в этом случае введем большую полуось a орбиты и время обращения T, то в силу формул (17), п. 9 и (38') будет существовать соотношение

$$4\pi^2\frac{a^3}{T^2}=f(m_0+m). \tag{39'}$$

Для другого тела P' с массой m', описывающего, как и P, орбиту (относительную) под действием исключительно тела P_0, при обычном значении символов, будем иметь

$$4\pi^2\frac{a'^3}{T'^2}=f(m_0+m'). \tag{39''}$$

Правые части равенств (39'), (39''), вообще говоря, будут неравны; если же они совпадают или по крайней мере приблизительно равны, как это будет в том случае, когда m и m' обе ничтожны по сравнению с m_0, то, приравнивая левые части равенств (39'), (39''), мы увидим (по крайней мере приблизительно), что для движения двух тел P и P' относительно P_0 будет справедлив и третий закон Кеплера.

В заключение добавим, что когда при ньютоновой трактовке движения небесных тел мы приводим изучаемую задачу к задаче о двух телах, то, вообще говоря, остаются в силе только два первых закона Кеплера. Третий будет справедлив (точно или приближенно) только в том случае, если будут выполняться указанные выше условия.

22. Задача $(n+1)$ тел. Перейдем теперь к случаю любого числа тел. Имея в виду выяснить не абсолютное движение этих тел, а относительное по отношению к одному из них, которое будем называть *центральным* (таким в случае солнечной системы будет Солнце), обозначим это последнее через P_0, а остальные через $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Через $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n$ обозначим соответствующие массы, и для любой пары тел P_i, P_j через $\boldsymbol{A}_{ij}$ обозначим ньютонианское притяжение, с которым единица массы тела P_j действует на единицу массы тела P_i, в силу чего направление вектора $\boldsymbol{A}_{ij}$ будет направлением от P_i к P_j; с другой стороны, по третьему закону Ньютона имеем

$$\boldsymbol{A}_{ji} = -\boldsymbol{A}_{ij}.$$

Если временно введем абсолютное ускорение $\boldsymbol{\alpha}_i$ отдельных тел P_i, то путем обычного обобщения уравнений (45) предыдущего пункта будем иметь

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=0}^{n}{}^{i} m_j \boldsymbol{A}_{ij} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n), \tag{46}$$

где через $\sum\limits_{j=0}^{n}{}^{i}$ обозначено суммирование, распространенное на все значения $0,\ 1,\ 2, \ldots, n$ индекса j, за *исключением значения* i.

Перепишем уравнение (46), изолируя уравнение, относящееся к центральному телу, и выделяя в остальных в отдельное слагаемое притяжение, происходящее от этого тела. Таким образом, получим

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_0 &= \sum_{i=1}^{n}{}^{i} m_j \boldsymbol{A}_{0j} \\ \boldsymbol{\alpha}_i &= m_0 \boldsymbol{A}_{i0} + \sum_{j=1}^{n}{}^{i} m_j \boldsymbol{A}_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{46'}$$

Отсюда аналогично тому, как это делалось в случае задачи двух тел, получим относительные ускорения $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_0$ отдельных тел $P_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ по отношению к центральному телу P_0. С этой целью заметим, что, фиксируя какой-нибудь индекс i, можно написать первое из уравнений (46') в виде

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = m_i \boldsymbol{A}_{0i} + \sum_{j=1}^{n}{}^{i} m_j \boldsymbol{A}_{0j}.$$

Вычитая его почленно из уравнения с индексом i системы (46′) и вспоминая, что $\boldsymbol{A}_{0i} = -\boldsymbol{A}_{i0}$, мы получим уравнения движения n тел $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (отнесенные к единицам массы движущихся тел) относительно центрального тела

$$a_i = (m_0 + m_i)\boldsymbol{A}_{i0} + \sum_{j=1}^{n}{}^{i} m_j(\boldsymbol{A}_{ij} - \boldsymbol{A}_{0j}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{47}$$

Отсюда следует, что относительное движение любого тела P_i по отношению к центральному телу происходит так, как если бы речь шла об абсолютном движении под действием равнодействующей, стоящей в правой части. Она складывается из двух составляющих: 1) из ньютонианской центральной силы $(m_0 + m_i)\boldsymbol{A}_{i0}$, которая является той же самой, какая действовала бы на тело P_i, если бы оно подвергалось исключительно ньютонианскому притяжению центрального тела P_0 (задача двух тел, предыдущий пункт); 2) и из другой силы, называемой *возмущающей* силой, которая в свою очередь является суммой $n-1$ составляющих, каждая из которых происходит от одного из $n-1$ тел системы (исключаются центральное тело и рассматриваемое тело P_i).

Сила или отдельное *возмущение*, действующее на тело P_i со стороны другого тела P_j, т. е.

$$m_j(\boldsymbol{A}_{ij} - \boldsymbol{A}_{0j}), \tag{48}$$

есть, очевидно, *разность притяжений, с которыми возмущающее тело P_j действует на единицу массы возмущающего тела P_i и на единицу массы центрального тела P_0.*

23. Элементарные замечания о возмущениях[1]. Из векторного выражения (48) возмущающей силы, с которой всякое тело P_j действует на единицу массы другого тела P_i системы, непосредственно вытекают некоторые заслуживающие внимания следствия.

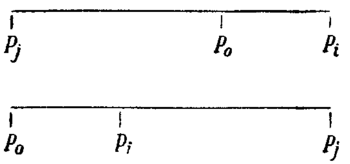
a) Предположим, что возмущающее тело P_j (фиг. 14) в заданный момент находится на одной прямой с возмущаемым телом P_i и центральным телом P_0 вне отрезка P_0P_i, независимо от того, находится ли P_j в *соединении* с центральным телом (т. е. с той же стороны от P_i, что и центральное тело) или в оппозиции (т. е. с противоположной стороны относительно P_i).

Так как оба единичных притяжения A_{ij}, A_{0j} точки P_j отнесены к единице массы (тел P_i и P_0 соответственно), то их величины обратно пропорциональны квадратам расстояний P_jP_i, P_jP_0, т. е.

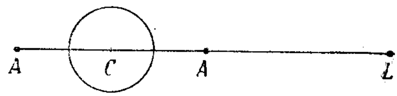
$$A_{ij} : A_{0j} = P_jP_0^2 : P_jP_i^2.$$

[1]) Ср. G. B. Airy, Gravitation, 1893.

Так как, далее, силы $\boldsymbol{A}_{ij}$, $\boldsymbol{A}_{0j}$ действуют по одной и той же прямой, то направление вектора $\boldsymbol{A}_{ij}-\boldsymbol{A}_{0j}$ в первом случае $(P_jP_0<P_jP_i)$ совпадает с направлением вектора $-\boldsymbol{A}_{0j}$, т. е. с направлением от P_j к P_0 или же от P_0 к P_i; во втором случае $(P_jP_0>P_jP_i)$ совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{A}_{ij}$, т. е. с направлением от P_i к P_j



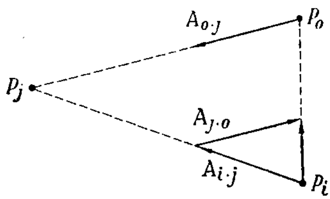
Фиг. 14.



Фиг. 15.

или же с направлением от P_0 к P_i. *В результате возмущающая сила в обоих этих случаях действует в направлении, противоположном направлению притяжения центральным телом возмущаемого тела.*

Будем рассматривать, например, Землю как центральное тело, Луну как возмущающее тело и каплю морской воды как возмущаемое тело, расположенное на прямой, соединяющей центры Земли C и Луны L (фиг. 15). Находится ли капля в A (в соединении с Луной) или в A' (в оппозиции с ней), лунное притяжение действует на каплю в направлении, обратном земному притяжению, т. е. по вертикали места снизу вверх. В этом и заключается объяснение *морских приливов и отливов* в его наиболее элементарной форме.



Фиг. 16.

б) Предположим, что возмущающее тело P_j находится (точно или приближенно) на одном и том же расстоянии от возмущаемого тела P_i и от центрального P_0 (фиг. 16). В таком случае единичные силы притяжения имеют равную величину, поэтому единичная возмущающая сила $\boldsymbol{A}_{ij}-\boldsymbol{A}_{0j}=\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{A}_{j0}$ будет направлена по прямой P_iP_0 от P_i к P_0; т. е. *возмущающая сила усиливает притяжение центральным телом.*

24. Задача двух тел, как мы видели, непосредственно интегрируема, но уже случай $n+1=3$ представляет аналитические трудности значительно более высокого порядка. Этот случай (*задача трех тел*), начиная с XVII в. до наших дней, является предметом многочисленных исследований, осветивших его с различных точек зрения[1]). В известном смысле можно даже сказать, что теперь

---

[1]) Ср. Marcolongo, Il problema dei tre corpi, Milano, Hoepli, 1919.

мы имеем ее аналитическое решение, принадлежащее Зундману (1912)[1]. Но в отношении этой классической задачи еще не сказано последнего слова[2].

25. Понятие об эллиптических элементах. В § 2 для изучения общего решения уравнений движения точки, притягиваемой неподвижным центром по закону Ньютона, мы пользовались частной системой координат, подсказанной, так сказать, природой самой задачи (плоскость xy совпадала с плоскостью движения, полюс находился в центре силы и в эллиптическом случае полярная ось была направлена вдоль большой оси орбиты в сторону перигелия). Но иногда удобнее пользоваться общей системой координат; это становится прямо необходимым, когда имеется в виду совместное изучение нескольких решений задачи, например изучение (эллиптических) движений двух или нескольких планет вокруг Солнца.

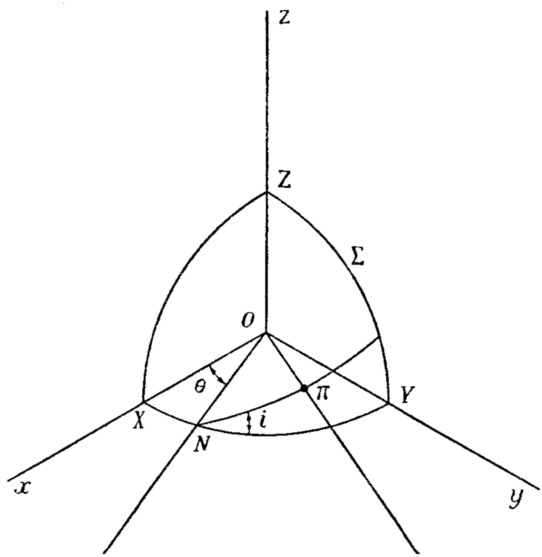
Чтобы получить формулы, представляющие общее решение относительно каких угодно осей, очевидно, достаточно выполнить в уравнениях, полученных в п. 6 и относящихся к специальной системе осей, произвольную замену координат. Но так как на основании прямого исследования мы уже знаем геометрическую природу траектории и закон движения по ней, то будет более наглядно и более полезно для целей дальнейшего изложения заранее выбрать систему параметров (геометрических и кинематических), которые были бы удобны прежде всего для определения формы и размеров орбиты, затем положения, занимаемого ею в пространстве, отнесенном к любым осям, и, наконец, закона движения по орбите.

В эллиптическом случае, которым мы здесь ограничимся, форма и размеры орбиты некоторой точки P определяются постоянными a и e (большая полуось и эксцентриситет). Что же касается положения, занимаемого орбитой в пространстве, то небходимо прежде всего отметить, что начало осей выбирается во всех случаях, как это подсказывается самой задачей, в центре силы (в центре Солнца, если речь идет о движении планет), где орбита будет иметь свой фокус. Плоскость xy можно задать произвольно, но в случае планет теперь уже стало общепринятым принимать ее совпадающей с плоскостью эклиптики на 1 января 1850. Оси x, y принимают направленными к точке весеннего равноденствия и к точке летнего солнцестояния в это время, а ось z — направленной к северному полюсу эклиптики; в силу этого система осей будет правой. По отношению к этой системе осей (или какой-нибудь другой, заданной как угодно) остается еще определить положение плоскости

[1] Sundmann, Mémoire sur la problème des trois corps, *Acta Mathematica*, т. 36, 1912, стр. 105—179.

[2] Ср. Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta Mathematica*, т. 42, 1918, стр. 99—144.

орбиты (проходящей через начало) и на этой плоскости направление фокальной оси (которую мы будем предполагать ориентированной в сторону перигелия). Для первой цели, очевидно, необходимы два параметра и для второй — один параметр. Для выяснения смысла задаваемых параметров рассмотрим сферу $\sum$ (фиг. 17) с центром в начале координат O и с радиусом, равным единице, на которой координатные плоскости определяют сферический треугольник



Фиг. 17.

с тремя прямыми углами XYZ. Плоскость орбиты точки P пересекает экваториальную плоскость сферы (т. е. плоскость $z=0$) по прямой, которая называется *линией узлов*, так как две ее точки пересечения с экватором сферы называются узлами.

Та точка экватора, через которую будет проходить полупрямая OP, когда небесное тело P переходит из южного полушария в северное, называется восходящим узлом.

Плоскость орбиты, очевидно, будет определена, когда будут указаны *долгота восходящего узла* N, т. е. аномалия $\theta=\widehat{XN}$ узла N относительно оси x (отсчитываемая в правом направлении относительно оси z) и *наклонение орбиты*, т. е. угол i, который большой круг сечения сферы $\sum$ плоскостью орбиты (рассматриваемой в направлении движения) образует с экватором (рассматриваемым в правом направлении относительно оси z): θ изменяется от 0 до 2π, i от 0 до π. Этот последний угол для планет всегда мал и значительно меньше $\pi/2$; он превосходит этот предел только для некоторых комет (называемых *попятными*).

Для определения фокальной оси, направленной к перигелию, рассмотрим точку П, в которой она пересекает сферу Σ со стороны перигелия; примем за параметр сумму (двух некомпланарных углов)

$$\bar{\omega} = \theta + \widehat{NO\pi} = \widehat{XN} + \widehat{N\pi}$$

и назовем этот угол *долготой перигелия*.

Теперь нам остается только определить соответствие между последовательностью моментов времени и положениями, занимаемыми точкой P на своей орбите. С этой целью фиксируем время t_0 *прохождения через перигелий*. Но заметим при этом, что часто бывает удобнее вместо t_0 подставлять некоторый параметр уже не постоянный, а переменный, линейно связанный с временем, так называемую *среднюю аномалию* (п. 10)

$$l = n(t - t_0).$$

Эти шесть параметров: a, e, i, θ, $\bar{\omega}$, l (или t_0), первые пять из которых геометрические (и постоянные), последний же кинематический (постоянный или переменный, смотря по тому, идет ли речь о t_0 или об l), называются *элементами эллиптического движения*, или, более просто, эллиптическими элементами.

26. Так как первые пять эллиптических элементов однозначно определяют орбиту по форме, размерам и положению, а параметр l (или t_0) определяет изменение с течением времени положения на орбите, то очевидно a priori, что координаты x, y, z движущейся точки будут выражаться в функции от этих шести элементов. Мы не будем здесь останавливаться на изложении явного определения этих выражений, а только покажем, что, для того чтобы их найти, достаточно присоединить к чисто геометрическому рассмотрению уравнение Кеплера (п. 10).

Действительно, так как a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ определяют эллипс (с фокусом в начале координат, центре силы), описываемый при движении точкой P, то мы можем выразить прежде всего координаты x, y, z точки P в функции от постоянных a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ и от любого параметра, при помощи которого можно определить положение точки P на ее орбите, например от эксцентрической аномалии u; в результате мы придем к уравнениям вида

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u \mid a, e, i, \theta, \bar{\omega}), \\ y &= y(u \mid a, e, i, \theta, \bar{\omega}), \\ z &= z(u \mid a, e, i, \theta, \bar{\omega}). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Если теперь примем во внимание, что P описывает свою орбиту по закону ньютонианского притяжения (который приводит к закону площадей), то, так как речь идет об эллиптической орбите, аномалию u нужно считать связанной с временем или, лучше, со средней аномалией $l = n(t - t_0)$ уравнением Кеплера (22), (ср. п. 10)

$$u - e \sin u = l.$$

Поэтому после вычислений окончательные выражения интегралов эллиптического движения будут определяться уравнениями (49), в которых вместо аномалии u подставлено ее выражение через l и e, неявно определяемое из уравнения (22).

Составляющие $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ скорости получатся дифференцированием по времени уравнений (49), если принять во внимание, что только u зависит от этой переменной и что зависимость эта определяется уравнением (22). Так как при помощи простого дифференцирования из этого уравнения получится

$$\frac{du}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos u},$$

то таким образом в конце концов придем в общем случае к шести интегральным формулам типа

$$x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z} = \text{функциям от } l,\ a,\ e,\ i,\ \theta,\ \bar{\omega}. \tag{50}$$

Можно доказать, что шесть функций, стоящих в правой части, являются независимыми по отношению к их шести аргументам, так что уравнения (50) разрешимы относительно этих функций. Другими словами, формулы (50) можно рассматривать как формулы преобразования между шестью декартовыми элементами x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и шестью эллиптическими элементами l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$.

27. Возмущенное движение. Метод вариации произвольных постоянных. Предположим теперь, что на тело P действует сила ньютонианского притяжения от неподвижного центрального тела; пусть, кроме этой силы, имеющей преобладающее влияние на движение тела P, на него действует также возмущающая сила. Если через $\boldsymbol{A}$ и Φ обозначим это притяжение и эту возмущающую силу, отнесенные к единичной массе тела P, и через $\boldsymbol{a}$ — ускорение точки P, то движение (возмущенное) этой точки определится уравнением

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} + \Phi. \tag{51}$$

Это единственное векторное дифференциальное уравнение второго порядка эквивалентно, очевидно, системе двух векторных уравнений первого порядка:

$$\frac{dP}{dt} = \boldsymbol{v}, \quad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{A} + \Phi. \tag{51'}$$

Следовательно, три уравнения второго порядка, которые получатся после проектирования уравнения (51) на оси координат (произвольно заданные с началом в точке O), будут эквивалентны шести уравнениям первого порядка, получающимся из уравнений (51′) аналогичным образом.

При изучении возмущенного движения выгодно рассмотреть как раз эти шесть последних дифференциальных уравнений первого порядка и подставить в них вместо неизвестных x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ при помощи уравнений (50) новые неизвестные l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$. В этом и состоит *метод вариации произвольных постоянных*. Причина названия сделается очевидной, если представим себе, что при невозмущенном движении, т. е. при отсутствии возмущающей силы Φ, параметры l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ были бы все постоянными, за исключением лишь первого, который был бы линейной функцией времени. Таким образом, мы приходим к следующему истолкованию этих новых неизвестных по отношению к действительному возмущенному движению: они в любой момент дают элементы того гипотетического эллиптического движения точки P, которое получилось бы, если бы в рассматриваемый момент прекратилось всякое возмущающее влияние, и точка P, начиная с того состояния движения, которое она имела в этот момент в действительном движении, двигалась бы исключительно под действием ньютонианского притяжения точки A центром O.

Поэтому орбита этого фиктивного эллиптического движения (соприкасающаяся, очевидно, с действительной орбитой) называется *оскулирующей орбитой* и значения, принимаемые параметрами l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ в любой момент, называются *оскулирующими элементами* (возмущенного движения в рассматриваемый момент).

Шесть уравнений первого порядка, которые получаются после преобразования уравнений (51′) посредством уравнений (50), можно представить себе разрешенными относительно производных (по времени) от оскулирующих элементов; после этого правые части (выражения скоростей изменения тех же элементов) составят так называемые *специальные возмущения*.

Главное преимущество указанного только что способа (замена уравнения (51) уравнениями (51′), введение новых неизвестных l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ и решение уравнений относительно производных от них) состоит в том, что во многих весьма важных для астрономии случаях возмущающие влияния незначительны, так что производные от оскулирующих элементов, только что названные специальными возмущениями, будут близки к значениям (одно постоянно и равно n, а остальные равны нулю), которые имели бы производные по времени от l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ в невозмущенном движении; а при наличии таких обстоятельств указанные выше дифференциальные уравнения оказываются удобными для численного интегрирования путем последовательных приближений [1]).

[1]) H. Andoyer, Mécanique céleste, Paris, 1923; C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels (2 тома), Leipzig, 1902—1907; Мультон, Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935. H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste (3 тома), Paris, 1905—1910.

28. Замечания. Мы уже говорили в п. 26, что не имеем в виду выводить формулы (50) преобразования переменных x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ к эллиптическим элементам. Однако для иллюстрации предыдущего стоит показать две простые комбинации уравнений (50), приводящие к непосредственным и наглядным выводам для некоторых типов возмущений.

С этой целью, с одной стороны, вспомним, что в эллиптическом невозмущенном движении энергию E и постоянную площадей c можно выразить через эллиптические элементы благодаря формулам (16), (14) в виде

$$E=-\frac{k}{2a},\quad c=\sqrt{k}\ \sqrt{p}, \tag{52}$$

где p, как обычно, обозначает параметр орбиты.

С другой стороны, обозначая через T живую силу движущегося тела P и через $U=\frac{k}{r}$ — потенциал притяжения A центральным телом, будем иметь

$$T-U=E. \tag{53}$$

Если оси координат выбраны таким образом, что плоскость xy совпадает с плоскостью оскулирующей орбиты, то, кроме того, будем иметь еще

$$x\dot{y}-y\dot{x}=c. \tag{54}$$

Формулы (53) и (54), если в них E и c выражены через эллиптические элементы согласно уравнениям (50), и являются теми двумя комбинациями уравнений (50), на которые мы ссылались вначале.

Для их истолкования рассмотрим движение, возмущаемое добавочной силой Φ. По теореме живых сил имеем

$$dT=dL=dU+\Phi\cdot dP;$$

на основании уравнения (53) вместо $dT-dU$ можно подставить дифференциал от E, который по существу может быть назван дальнейшим эллиптическим элементом, поскольку согласно первому из уравнений (52) он зависит исключительно от элемента a. После подстановки найдем

$$dE=\frac{k}{2a^2}da=\Phi\cdot dP. \tag{55}$$

Если затем, все еще имея в виду невозмущенное движение, возьмем производную по времени от уравнения (54), то будем иметь

$$\frac{dc}{dt}=x\ddot{y}-y\ddot{x},$$

где $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ можно заменить соответствующими проекциями результирующей силы $A+\Phi$. В правой части появится (скалярный) момент результирующей силы относительно оси z (перпендикулярной в точке O к плоскости оскулирующей орбиты).

Так как к этому моменту сила A, как центральная по отношению к O, ничего не добавит, то остается только момент M_z возмущающей силы Φ; и наряду с равенством (55) будем иметь

$$\frac{dc}{dt} = M_z. \tag{56}$$

Равенство (55) показывает, что размеры орбиты стремятся увеличиться или уменьшиться, смотря по тому, будет ли элементарная работа положительной или отрицательной. В частности, если бы возмущающая сила представляла собой пассивное сопротивление, возникающее, например, благодаря возможному наличию сопротивляющейся среды, наполняющей межпланетное пространство, то работа была бы всегда отрицательной, и размеры орбиты непрерывно уменьшались бы. Отсюда следует, что всякое пассивное сопротивление стремится вызвать падение движущегося тела на центральное.

Равенство (56) показывает, что направление изменения величины c и, следовательно, параметра P характеризуется знаком момента M_z возмущающей силы [1]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть в кеплеровом движении $[r]$ и $[r^2]$ будут средними значениями за период времени T расстояния $r = SP$ и его квадрата.

Найти значения двух интегралов

$$\frac{1}{T}\int_0^T r\,dt, \quad \frac{1}{T}\int_0^T r^2\,dt.$$

Вычисление становится особенно простым, если за переменную интеграции вместо времени взять среднюю аномалию u, для которой в силу уравнения Кеплера имеем

$$(1 - e\cos u)\,du = n\,dt,$$

а в силу формул (20), (21)

$$r = a(1 - e\cos u).$$

Принимая во внимание (п. 10), что $T = 2\pi/n$, найдем

$$[r] = a\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right), \quad [r^2] = a^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right).$$

2. Допуская, что излучение Солнца при любом положении планеты P обратно пропорционально квадрату расстояния $r = SP$, доказать, что в

[1]) Полную иллюстрацию этой формулы и других, аналогично связывающих производные от эллиптических элементов с возмущающей силой, см., кроме уже упоминавшихся сочинений по небесной механике и томика Эри (Airy), заметку E. Almansi, Sopra i moti ellitici perturbati, *Rend. Lincei*, т. 31, 1922, стр. 277—282. См. также Lazzarino, Sopra alcune formole della teoria dei moti ellitici perturbati, *Atti Acc. Gioenia di Catania*, т. 13, 1923.

кеплеровом движении планеты средняя величина солнечного излучения, падающего на планету в течение одного периода, обратно пропорциональна площади орбиты.

Достаточно вычислить среднее значение величины $1/r^2$.

3. В кеплеровом движении при $r^2\dot{\theta}=c$ и $r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ явное выражение истинной аномалии θ в функции времени определяется дифференциальным уравнением

$$(1+e\cos\theta)^{-2}\dot{\theta}=\frac{c}{p^2}.$$

Поскольку

$$p^2=a^2(1-e^2)^2=ab(1-e^2)^{3/2},$$

оно в силу формулы (19), п. 10, может быть написано в виде

$$n\,dt=(1-e^2)^{3/2}(1+e\cos\theta)^{-2}\,d\theta.$$

Разлагая правую часть в ряд по степеням e и интегрируя, на основании определения (23) средней аномалии l найдем

$$l=\theta-2e\sin\theta+\frac{3}{4}e^2\sin 2\theta+\ldots,$$

где опущенные члены будут по крайней мере третьего порядка относительно e. Отсюда, с точностью до членов первого порядка относительно e, найдем, что $\theta=l$, а с точностью до членов второго порядка относительно e^2, —

$$\theta=l+2e\sin l.$$

Эти последовательные приближения можно продолжить и до членов третьего порядка; тогда найдем

$$\theta=l+2e\sin l+\frac{5}{4}e^2\sin 2l \text{ и т. д.}$$

Разность $\theta-l$ называется в астрономии *уравнением центра.*

Принимая во внимание дифференциальное уравнение, связывающее θ и l,

$$\frac{d\theta}{dl}=(1-e^2)^{-3/2}(1+e\cos\theta)^2,$$

определить *максимальную абсолютную величину* $\mathscr{E}$ *уравнения центра.*

Ее надо искать между значениями θ, для которых $\dfrac{d\theta}{dl}=1$, или же

$$(1+e\cos\theta)^2=(1-e^2)^{3/2};$$

она соответствует тем возможным положениям на орбите, в которых

$$\cos\theta=-\frac{1-(1-e^2)^{3/4}}{e} \tag{1}$$

и, следовательно,

$$r=a(1-e^2)^{1/4}.$$

Показать, что при $e < 1$ дробь $\frac{[1-(1-e^2)^{3/4}]}{e}$ будет всегда положительна и меньше единицы, так что действительно существуют два угла θ_1 и $2\pi - \theta_1$ (при $\theta_1 < \pi$), удовлетворяющие соотношению (1). В этих двух положениях уравнение центра имеет максимум и минимум, равные по абсолютной величине. Это и будет как раз искомой величиной $\mathscr{E}$. Показать, что по крайней мере до членов порядка выше третьего будем иметь

$$\mathscr{E} = 2e + \frac{11}{48} e^3.$$

4. Пусть орбита точки, притягиваемой неподвижным центром по закону Ньютона, будет параболической. Определить закон движения, принимая во внимание, что орбита описывается согласно закону площадей с полюсом в фокусе.

Сопоставляя формулы

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta} = \frac{q}{\cos^2\frac{\theta}{2}}, \quad r^2\dot{\theta} = c,$$

придем к алгебраическому соотношению между t и $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2} = \frac{c(t-t_0)}{\sqrt{2}\, q^{3/2}},$$

где t_0 обозначает момент прохождения движущейся точки через перигелий.

5. В случае гиперболической орбиты (ср. с предыдущим упражнением) в ньютонианском движении закон движения можно представить в виде

$$n(t-t_0) = e \operatorname{sh} v - v,$$

где согласно обозначениям п. 8 $n = \frac{k}{a^{3/2}}$ и v связано с r уравнением

$$r = e \operatorname{ch} v - a.$$

6. Задачи Бертрана, Альфана и Дарбу. Речь идет об определении таких позиционных сил с линией действия, проходящей постоянно через неподвижную точку, которые заставляют движущуюся точку описывать коническое сечение при любых начальных условиях. Бертран [1]) предложил эту задачу в 1873 г., после того как решил другие, связанные с ней задачи. В указанной форме эта задача была решена в том же году (Comptes Rendus, т. 84)

[1]) Жозеф Бертран (Joseph Bertrand) родился в Париже в 1832 г. умер там же в 1900 г. Был профессором в Политехнической школе и в Collège de France больше 50 лет, а с 1874 г. до конца жизни — непременным секретарем Академии наук в Париже. Тонкий и блестящий математик, он был весьма известен, кроме того, как выдающийся механик. Помимо большого курса анализа и широко распространенных учебников по элементарной математике, опубликовал некоторые из своих курсов, читанных в Collège de France (по термодинамике, по теории вероятностей, по математической теории электричества). Во всех его произведениях, вместе с оригинальностью мысли, блещет его исключительное педагогическое дарование.

Дарбу[1]) и Альфаном[2]), которые указали два a priori возможных закона для силы.

Если добавим еще условие, что рассматриваемые траектории не только конические, но и имеют один и тот же фокус, то мы опять придем к закону Ньютона (Бертран, там же). Ср., например, П. Аппелль, Руководство теоретической механики, т. I, гл. XI, пп. 232—233.

7. Показать, что средние орбитальные скорости планет (*na* согласно п. 10) при движении по орбите обратно пропорциональны корням квадратным из полуосей соответствующих орбит.

8. Планета (сферическая однородная) имеет спутника, среднее расстояние которого (под средним расстоянием будем понимать большую полуось орбиты) равно λR, где R есть радиус планеты. Доказать, что продолжительность одного обращения спутника есть

$$T=\sqrt{3\pi}\,\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{f\mu}},$$

где μ обозначает плотность планеты.

9. У Юпитера известны девять спутников, четыре из которых, так называемые медицейские планеты, открыты Галилеем в 1610 г. Один из них, называемый Ио, совершает свое обращение вокруг Юпитера приблизительно в 1,77 суток, полуось же его орбиты приблизительно равна 5,91 радиуса Юпитера (радиус Юпитера равен 11,14 радиуса Земли). Полуось орбиты Юпитера равна 5,20 среднего расстояния Солнце—Земля, т. е. $5{,}20 \cdot 23\,000$ земных радиусов; он обращается вокруг Солнца в течение 11 лет 314,84 суток.

Из этих данных вывести, что масса Юпитера приблизительно в 318 раз больше массы Земли, а средняя плотность равна $^1/_4$ плотности Земли.

10. Найти величину силы тяжести на поверхности Солнца и Луны, зная что радиусы их соответственно равны 109 и 0,27 радиуса Земли, а массы соответственно равны 333 000 и $^1/_{81}$ массы Земли.

---

[1]) Гастон Дарбу (Gaston Darboux) родился в Ниме в 1842 г., умер в Париже в 1917 г. Преподавал около 40 лет в Сорбонне и после смерти Бертрана был непременным секретарем Академии наук в Париже. Его „Лекции по общей теории поверхностей“ (Leçons sur la théorie générale des surfaces) (4 тома) представляют собой классическое произведение. Он не только обогатил дифференциальную геометрию новыми существенными результатами, но и оставил глубокий след в теории дифференциальных уравнений и разрешил важные задачи анализа и механики, постоянно показывая с непогрешимым изяществом, насколько драгоценным оказывается соединение геометрической интуиции с тонким использованием анализа.

[2]) Жорж Анри Альфан (George Henri Halphen) родился в Руане в 1844 г., умер в Версале в 1899 г. Офицер-артиллерист, некоторое время занимал должность экзаминатора в Политехнической школе; был членом Академии наук в Париже. Он был прежде всего алгебраистом и этой своей способностью с большим искусством пользовался для углубления различных вопросов не только в вычислительной и алгебраической геометрии, но также и в анализе. В своей диссертации на тему о дифференциальных инвариантах, представленной Парижскому математическому факультету в 1878 г., он построил такое дифференциальное уравнение конических сечений, которое существенным образом входит в указанные выше механические вопросы. Оставил большой трактат по эллиптическим функциям и их приложениям в трех томах, третий из которых не был закончен вследствие преждевременной смерти автора.

Для искомой величины силы тяжести, отнесенной к единице массы, найдем 28 *г* на поверхности Солнца и 0,16 *г* на поверхности Луны.

11. Рассмотрим планету, орбиту которой можно рассматривать приблизительно круговой, и предположим, что в заданный момент абсолютная величина v_0 скорости планеты подвергается мгновенному увеличению, после которого она становится равной $\sqrt{2}\, v_0$.

Доказать, что, начиная с этого момента, орбита должна сделаться гиперболической.

12. Применить теорию спутника к снаряду.

Надо принять во внимание, что если считать Землю за сферу, состоящую из однородных слоев, то притяжение во внешних ее точках будет изменяться обратно пропорционально квадрату расстояния r от центра и что в месте выстрела (расстояние, равное радиусу Земли R) притяжение равно g. Пусть k — есть коэффициент притяжения; тогда для величины силы притяжения на расстоянии r имеем $F=\frac{k}{r^2}$, а для потенциала $U=\frac{k}{r}$. В положении, где произведен выстрел, будем иметь

$$k=gR^2, \quad U=gR.$$

Обозначая через v^0 абсолютную величину начальной скорости и через α — угол наклона к горизонту, под которым сделан выстрел, будем иметь для секториальной скорости относительно центра Земли абсолютную величину, равную $Rv_0 \cos\alpha$, так что две постоянные E и c (гл. II, § 2) определяются равенствами

$$E=\frac{1}{2}v_0^2-gR, \quad c^2=R^2v_0^2\cos^2\alpha.$$

После определения знака E и применения формулы (15), п. 6, т. е.

$$e=\sqrt{1+\frac{2Ec^2}{k^2}}=\sqrt{1+\frac{2Ev_0^2\cos^2\alpha}{g^2R^2}},$$

можно окончательно установить решение и исследовать его.

Принимая для R величину в 6,371 *км*, показать сначала, что если начальная скорость снаряда превосходит величину $\sqrt{2gR}=11{,}174$ *км/сек*, то он не упадет на Землю, а будет описывать гиперболическую (или прямолинейную) орбиту.

Разобрать далее (начиная с более простого случая горизонтального выстрела $\cos\alpha=1$) круговые или эллиптические орбиты, принимая во внимание, что наименьшее расстояние от центра должно быть больше R, без чего снаряд упал бы на Землю. Ср. Charbonnier, Balistique ext. rat., Paris, 1907 г., гл. IV.

13. В задаче двух тел S и P (п. 21) пусть в начальный момент будет r_0 расстояние SP и v_0 — абсолютная величина относительной скорости точки P по отношению к S. Показать на основании формулы (16), п. 8, что, если постоянная

$$a=\frac{r_0}{2-\frac{v_0^2r_0}{f(m+m_0)}}$$

положительна, то орбита, каково бы ни было направление начальной скорости v_0, будет эллиптической, и большая полуось ее будет как раз равна a.

14. Выбрав значения величин r_0, v_0 так, чтобы они удовлетворяли начальному условию, указанному в предыдущем пункте, рассмотреть все возможные направления для начальной скорости в заданной плоскости, проходящей через S. Каждому из них для точки P (планета) в заданной плоскости будет соответствовать относительно S (Солнце) некоторая эллиптическая орбита, в одном из фокусов которой будет находиться Солнце. Показать, что геометрическим местом центров C этих ∞^1 эллиптических орбит будет окружность с центром в одной из точек на прямой, соединяющей S с начальным положением P_0 точки P.

Можно взять систему осей с началом в S и осью x, проходящей через P_0 и направленной от S к P_0. Если для любой из рассматриваемых эллиптических орбит θ_0 будет угол между осью Sx и большой осью орбиты, направленной к перигелию, то, естественно, будем иметь

$$r_0 = \frac{p}{1 + e\cos\theta_0},$$

и так как (предыдущее упражнение) постоянная $\frac{r_0}{a}$ не зависит от направления начальной скорости, то мы видим, что для всех орбит, о которых здесь идет речь, эксцентриситет e и угол θ_0 будут связаны соотношением

$$\frac{1 - e^2}{1 + e\cos\theta_0} = \lambda,$$

где λ обозначает постоянную $\frac{r_0}{a}$.

С другой стороны, полярные координаты центра C любой из рассматриваемых орбит относительно указанных осей определяются равенствами

$$\rho = ac, \quad \theta = \pi - \theta_0 \quad \text{и т. д.}$$

15. Для эллиптических орбит, указанных в предыдущих упражнениях, определить геометрические места перигелия, афелия и концов малой оси.

16. Т р е у г о л ь н ы е р е ш е н и я з а д а ч и т р е х т е л. Если три массы: m_0, m_1, m_2 занимают вершины P_0, P_1, P_2 равностороннего треугольника, то результирующая ньютонианского притяжения, которому подвергается одна какая-нибудь из них, например m_i, со стороны двух других проходит через центр тяжести и имеет величину

$$m_i f \frac{m_0 + m_1 + m_2}{\Delta^2} \frac{\rho_i}{\Delta} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2),$$

где Δ обозначает сторону треугольника и ρ_i — расстояние точки P_i от центра тяжести этих трех масс.

Это простое замечание (к нему можно прийти прямым геометрическим путем, принимая во внимание элементарные свойства центра тяжести) позволяет установить существование класса частных решений задачи трех тел. К этому классу можно прийти, замечая вместе с Лапласом, что достаточно заставить вращаться равносторонний треугольник в его плоскости вокруг центра тяжести трех масс с подходящей угловой скоростью ω, чтобы центробежная сила для каждой из трех масс уравновесила притяжение этой массы двумя другими.

Показать, что

$$\omega^2 = f\frac{m_0 + m_1 + m_2}{\Delta^3}$$

К этим решениям мы вернемся в § 10, гл. X и укажем наиболее общее исследование этого вопроса Лагранжем, от которого эта задача и ведет свое начало.

17. Прямолинейные решения задачи трех тел. Другой класс частных решений задачи трех тел (см. предыдущий пункт) найдем, исследуя условие, при котором для трех масс: m_0, m_1, m_2, расположенных в трех точках: P_0, P_1, P_2, лежащих на одной прямой, результирующая притяжения, которое одна из них испытывает со стороны двух других, пропорциональна ее расстоянию от центра тяжести системы.

Выбрав начало абсцисс в центре тяжести, будем иметь $\sum_{i=0}^{2} m_i x_i = 0$.

Если предположим, как это всегда можно сделать, что P_0 заключено между P_1 и P_2, и положим $A = \frac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1}$, то требуемое условие выразится уравнением пятой степени (Лагранжа)

$$(m_0 + m_1) A^5 + (2m_0 + 3m_1) A^4 + (m_0 + 3m_1) A^3 - (m_0 + 3m_2) A^2 - \\ - (2m_0 + 3m_2) A - (m_0 + m_2) = 0.$$

18. Если в задаче двух тел сумма масс изменяется в отношении, обратном линейной функции времени, то движение можно определить путем подходящей замены переменных.

Обращаясь к п. 21, положим $f(m_0 + m) = \frac{1}{\tau}$, причем по предположению τ должна быть линейной функцией времени. Если P_0 и P — два тела, то векторное уравнение относительного движения P по отношению к P_0 можно написать в виде

$$\frac{d^2P}{dt^2} = -\frac{1}{\tau r^3}(P - P_0),$$

где r обозначает расстояние P_0P.

Это уравнение, как заметил Армеллини (в работе, упоминавшейся на стр. 165), приводится к обычной ньютонианской задаче (п. 2), в которой τ есть постоянная, если положить

$$P - P_0 = \tau (P_1 - P_0), \quad dt = \tau^2 dt_1;$$

в силу этого получим

$$\frac{d^2P_1}{dt_1^2} = -\frac{1}{r_1^3}(P_1 - P_0),$$

где через r_1 обозначена длина вектора $P_1 - P_0$.

19. Общее исследование *задачи двух тел с массами* произвольно изменяющимися было сделано Р. Армеллини. См. *Mem. della Soc. dei* XL, т. XIX, 1915, стр. 75—96; *Rend. Lincei*, т. XXIV, 1915_2, стр. 300—306; т. XXXI, стр. 170—173, т. I (серия 6^a), 1925, стр. 617—622.

20. В т. I, гл. VIII, § 7 мы видели, что две системы, геометрически подобные и имеющие в соответствующих точках одну и ту же плотность, оказываются также и материально подобными. Для динамического подобия требуется далее, чтобы отношение φ соответствующих сил было постоянным.

Показать, что это условие выполняется тогда, когда действуют исключительно ньютонианские силы, и что в этом случае будем иметь $\varphi = \lambda^4$, где λ обозначает коэффициент линейного геометрического подобия. Показать также, что отношение соответствующих времен равно единице.

21. В каком направлении изменяется параметр оскулирующей орбиты, когда масса центрального тела возрастает (если, например, на него падают метеориты)?

Принять во внимание формулу (14) п. 16, замечая, что в задаче двух тел сохраняет свое значение закон площадей, даже если массы и изменяются каким-либо образом.

22. Можно указать закон так называемых косвенных возмущений (т. е. относящихся к узлу и к наклонению), происходящих от возмущающей силы, нормальной к плоскости невозмущенной орбиты. Как увидим далее, мы придем к более определенному заключению, если эта возмущающая сила имеет характер восстанавливающей силы, направленной к плоскости первоначальной орбиты.

Из определения долготы узла θ и наклонения i (п. 25) следует, что направляющие косинусы секториальной скорости $V=\overrightarrow{OP}\times v/_2$ при возмущенном каким-либо образом движении, как обычно, будут равны

$$\sin i \sin\theta, \quad -\sin i\cos\theta, \quad \cos i.$$

В частности, если речь идет о малых наклонениях, т. е. о таких, которые можно рассматривать как величины первого порядка, направляющие косинусы примут вид

$$\xi = i\sin\theta; \quad \eta = -i\cos\theta, \quad \zeta = 1;$$

это означает, что величина вектора V приблизительно равна его проекции $\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{2}$ на ось z. Далее, если, в частности, рассмотрим действие возмущающей силы Φ, нормальной к плоскости невозмущенной орбиты и, следовательно, имеющей составляющие $0, 0, Z$, то мы сможем ее оценить, исходя из тождества

$$2\frac{dV}{dt}=\overrightarrow{OP}\times\Phi,$$

где в правой части вместо полной силы $A+\Phi$ (п. 27) поставлена только возмущающая сила, так как A является центральной силой.

Проектируя на ось z, получим

$$2\frac{dV_z}{dt}=0$$

и, следовательно, $2V_z=c$; в силу предыдущего замечания, эту постоянную можно принять за длину вектора $2V$.

Отсюда, проектируя на две другие оси и подставляя вместо V_x, V_y их значения $\frac{c\xi}{2}$, $\frac{c\eta}{2}$, получим

$$\dot{\xi}=yZ, \quad \dot{\eta}=-xZ; \tag{2}$$

так как координаты x, y умножаются на величину первого порядка Z, то вместо них можно подставить их выражения, относящиеся к невозмущенному движению, которые полностью известны. Поэтому только что написанные уравнения могут служить в указанных выше предположениях для определения величин ξ и η, а следовательно, и для определения i и θ. Из этих уравнений получим

$$\xi\dot{\eta}-\dot{\xi}\eta=-(x\xi+y\eta)Z,$$

где левая часть будет равна $i^2\dot{\theta}$, если принять во внимание приближенные выражения $-i\sin\theta$, $i\cos\theta$ для ξ и η; что же касается правой части, то, вспоминая, что $c\xi$, $c\eta$ суть составляющие вектора $2V$ по осям x, y, будем иметь

$$c\xi = y\dot{z} - \dot{y}z, \quad c\eta = z\dot{x} - \dot{z}x$$

и, следовательно,

$$x\xi + y\eta = -z.$$

Поэтому заключаем, что

$$i^2\dot{\theta} = zZ.$$

Отсюда видим, что знак у $\dot{\theta}$ будет всегда такой же, как и у произведения zZ; поэтому в случае возмущающей силы Z, имеющей характер восстанавливающей силы, направленной к плоскости первоначальной орбиты, узел совершает всегда попятное движение.

Другой комбинацией уравнений (2), определяющих $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, будет

$$\frac{di}{dt} = \sin\theta\,\dot{\xi} - \cos\theta\dot{\eta} = (x\cos\theta + y\sin\theta)\,Z.$$

Если введем угол v, который радиус-вектор планеты образует с линией узлов (оскулирующей орбиты) в любой момент, то будем иметь уравнение

$$\frac{di}{dt} = rZ\cos v,$$

показывающее, что направление, в котором изменяется наклонение, в любой момент зависит от знака произведения $Z\cos v$.

Глава IV

ДИНАМИЧЕСКИЕ И КИНЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ

1. От динамики материальной точки, которой мы занимались в трех предыдущих главах, перейдем теперь к динамике системы; чтобы упростить последующее изложение, рассмотрим в этой вводной главе некоторые производные механические понятия, относящиеся к изолированной точке (т. I, гл. VII), и распространим их на материальные системы, в частности на твердое тело, к которому в дальнейшем мы часто будем обращаться.

При этом, как и вообще во всей динамике системы, мы будем считать, как в т. I и, в частности, в геометрии масс (гл. X), что *всякую материальную систему какой угодно сложности можно рассматривать как совокупность материальных точек или, когда речь идет о непрерывном распределении материи, как совокупность материальных элементов.*

В общих рассуждениях этой и следующих глав мы будем обычно обращаться к материальной системе S какой угодно природы, но состоящей из конечного числа N материальных точек $P_i (i=1, 2, \ldots, N)$. Необходимо, однако, раз навсегда заметить, что, рассматривая материальные элементы (одного, двух или трех измерений) как точки и применяя классические методы анализа бесконечно малых, мы можем считать все, что в дальнейшем будет говориться об этой системе S, имеющим силу также и для системы с непрерывным распределением материи, потому что в формулах, которые мы установим прямым путем, вместо сумм, распространенных на N точек дискретной системы S, можно подставить аналогичные интегралы по области (одного, двух или трех измерений), распространенные на все материальные элементы непрерывной системы (ср. т. I, гл. X, пп. 4, 15).

§ 1. Элементарная работа

2. Общее выражение. Рассмотрим систему S какой угодно природы из N материальных точек $P_i (i=1, 2, \ldots, N)$, на которые наложены связи. Пусть эта система движется под действием определенных заданных сил. Сосредоточив внимание на всех силах (прямо приложенных и реакциях), действующих на систему, или же только на какой-нибудь части сил, механически вполне определенной (например, на действующих силах, или реакциях, или внешних силах и т. д.), обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ равнодействующую сил рассматриваемого вида, действующих на одну из точек P_i.

Если в какой-нибудь момент t вектор $\boldsymbol{v}_i$ есть скорость точки P_i, так что $dP_i = \boldsymbol{v}_i dt$ есть перемещение, которое она испытывает за время dt, непосредственно следующее за этим моментом t, то элементарная работа, совершенная силой $\boldsymbol{F}_i$ за это время, будет равна $\boldsymbol{F}_i \cdot dP_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt$ (т. I, гл. VIII, п. 3).

Далее, полной *элементарной работой* системы сил $\boldsymbol{F}_i$ от момента времени t до момента $t + dt$ называется сумма элементарных работ

$$dL = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot dP_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt. \tag{1}$$

Заметим еще, что так как перемещение системы зависит от принятой системы отсчета, то этот относительный характер перемещения отразится и на элементарной работе.

3. Случай твердого тела. а) Свободное твердое тело. К этому определению элементарной работы в общем случае мы не можем пока ничего добавить; но если система S представляет собой твердое тело, то скорости $\boldsymbol{v}_i$, а следовательно, и элементарные перемещения dP_i отдельных точек P_i можно выразить в любой момент посредством двух *характеристических векторов*, т. е. посредством скорости $\boldsymbol{v}_0$ какой-нибудь точки O, неизменно связанной с системой, и мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ самой системы. Таким образом, мы будем иметь (т. I, гл. III, п. 22)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}, \\ dP_i &= dO + \boldsymbol{\omega}\, dt \times \overrightarrow{OP_i} \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Подставляя в равенство (1) и принимая во внимание векторное тождество

$$\boldsymbol{F}_i \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}] = \boldsymbol{\omega} \cdot [\overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}_i],$$

получим

$$dL = dO \cdot \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{\omega}\, dt \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{F}_i.$$

Две векторные суммы в правой части суть результирующая $\boldsymbol{R}$ (главный вектор) и результирующий момент (главный момент) $\boldsymbol{M}$ относительно точки O системы сил $\boldsymbol{F}_i$; таким образом мы получаем весьма замечательную формулу

$$dL = \boldsymbol{R} \cdot dO + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega})\, dt. \tag{2}$$

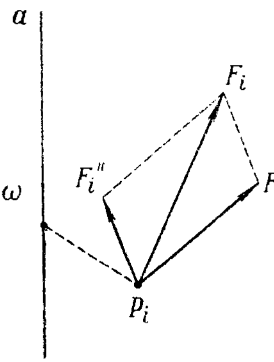
Если бы тело двигалось поступательно ($\omega=0$), то выражение элементарной работы имело бы такой же вид, как и для одной силы $\boldsymbol{R}$, приложенной в точке O.

Далее, если речь будет итти о работе только всех внутренних сил, которые в силу своей природы составляют (т. I, гл. XII, п. 3) систему, векторно эквивалентную нулю ($\boldsymbol{R}=\boldsymbol{M}=0$), то, очевидно, можно сказать, что *во время движения твердого тела при каких угодно связях и действующих силах сумма элементарных работ внутренних сил за любой элемент времени тождественно равна нулю.*

б) Твердое тело, имеющее неподвижную точку или ось. Если твердое тело закреплено в какой-нибудь точке и эта точка выбирается за центр приведения, то имеем $\boldsymbol{v}_0=0$, так что формула (2) сведется к равенству

$$dL=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}\,dt, \tag{3}$$

представляющему собой точную формальную аналогию с выражением элементарной работы одной только силы, причем роль силы играет результирующий момент рассматриваемых сил относительно закрепленной точки, а роль скорости выполняет угловая скорость твердого тела.



Фиг. 18.

Далее, если твердое тело вращается около закрепленной оси a (фиг. 18), то достаточно выбрать полюс O в какой-нибудь точке этой оси, как тотчас же будет применима формула (3), а так как мгновенная ось вращения постоянно совпадает с a, то вектор $\boldsymbol{\omega}$, изменяясь, вообще говоря, по величине в зависимости от времени, будет постоянно направлен по прямой a. Отсюда следует, что если эта ось ориентирована в ту сторону, которая в рассматриваемый момент указывается направлением вектора $\boldsymbol{\omega}$, то вместо скалярного произведения $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}$ можно подставить алгебраическое произведение величины ω угловой скорости на проекцию M_a момента $\boldsymbol{M}$ на ось (*результирующий момент сил* $\boldsymbol{F}_i$ *относительно оси* a).

Формула

$$dL=M_a\omega\,dt, \tag{4}$$

которая получается таким образом, очень важна для приложений. Она позволяет, например, вычислить мощность (или работу в единицу времени, т. I, гл. VIII, п. 12) вала двигателя, когда известно преодолеваемое сопротивление (а следовательно, и результирующий момент M_a относительно геометрической оси вала) и число n оборотов в единицу времени. Так как тогда угол поворота, пробегаемый в единицу времени, т. е. ω, есть $2\pi n$, то из равенства (4) следует, что мощность вала измеряется числом $2\pi n M_a$.

К равенству (4) можно прийти, между прочим, еще проще. Элементарное перемещение любой точки P_i, расстояние которой от оси вращения a есть δ_i, перпендикулярно к плоскости $P_i a$ и измеряется произведением $\delta_i \omega\, dt$; поэтому, если F'_i есть составляющая силы F_i, приложенной в точке P_i, по направлению dP_i, то элементарная работа силы F_i будет равна $F'_i \delta_i \omega\, dt$. Но $F'_i \delta_i$ есть как раз момент $M_i|_a$ силы F_i относительно оси a. Действительно, если разложим силу F_i на две составляющие, из которых одна F'_i направлена по dP_i, а другая F''_i есть проекция этой силы на плоскость $P_i a$, то увидим, с одной стороны, что момент силы F''_i относительно оси a (компланарной с F''_i) равен нулю. С другой стороны, момент силы F'_i есть как раз $F'_i \delta_i$, потому что F'_i перпендикулярна к плоскости $P_i a$, а δ_i измеряет кратчайшее расстояние линии действия силы F'_i от оси a и, кроме того, F'_i будет положительной или отрицательной в зависимости от того, будет ли сила проектироваться в направлении перемещения или в противоположном, или же, если ось a ориентирована в направлении вектора ω, в зависимости от того, будет ли сила F_i правовращающей или левовращающей относительно a. Отсюда на основании теоремы Вариньона (т. I, гл. I, п. 31) заключаем, что $F'_i \delta_i$ есть момент $M_i|_a$ силы F_i относительно оси a, так что элементарную работу силы F_i можно выразить в виде

$$M_i|_a \omega\, dt;$$

после этого достаточно просуммировать по всем точкам системы, чтобы вновь получить формулу (4).

4. Голономные системы. Для дальнейшего изложения необходимо вывести уже встречавшееся в аналитической статике для виртуальных перемещений (т. I, гл. XV, § 6) выражение элементарной работы системы сил F_i $(i=1, 2, \ldots, N)$, приложенных к N материальным точкам P_i голономной системы. Если эта система имеет n степеней свободы и положения ее точек определяются N параметрическими уравнениями

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n | t) \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \quad (5)$$

где q_h $(h=1, 2, \ldots, n)$ — независимые лагранжевы координаты [1]), то любое бесконечно малое (действительное) перемещение системы определяется равенством

$$dP_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt \qquad (i=1, 2, \ldots, N).$$

[1]) См. т. I, гл. VI.

Поэтому для соответствующей элементарной работы системы из N сил F_i, выраженных через обобщенные координаты q_h, лагранжевы скорости $\dot{q}_h$ (т. I, гл. VI, п. 10) и время, мы получим выражение

$$dL = \sum_{h=1}^{n} dq_h \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + dt \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t},$$

которое можно переписать в виде

$$dL = \sum_{h=1}^{n} Q_h dq_h + dt \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t}, \tag{6}$$

где, как и в аналитической статике, положено

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. через Q_h обозначена так называемая составляющая системы сил F_i по лагранжевой координате q_h или, иначе, обобщенная сила, соответствующая координате q_h.

В правой части равенства (6) вторая сумма тождественно исчезает, когда голономные связи не зависят от времени ($\partial P_i/\partial t = 0$).

5. Виртуальная работа и некоторые замечательные тождества. Если вспомним, что при любом виртуальном перемещении выражения δP_i отличаются от только что названных действительных перемещений dP_i только тем, что в виртуальных перемещениях во всяком случае (т. е. зависят ли, или не зависят связи от времени) отсутствует член с dt, то для виртуальной элементарной работы

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i$$

придем к выражению

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h, \tag{7}$$

уже полученному в п. 28, гл. XV, т. I.

Если, далее, силы F_i являются производными от потенциала U, где U есть функция декартовых координат точек системы в смысле, указанном в п. 28 гл. XV т. I, то этот потенциал, выраженный в лагранжевых координатах посредством параметрических уравнений (5), вообще говоря, будет функцией от q, а также и от времени, если связи зависят от времени. Во всяком случае мы знаем уже (упомянутое место), что $\delta L = \delta U$, где δU

обозначает полный дифференциал от функции U, рассматриваемой как функция от q, т. е.

$$\delta U = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_h} \delta q_h;$$

поэтому, приравнивая правые части этого равенства и равенства (6) и принимая во внимание произвольность δq_h, мы получим следующие выражения для обобщенных сил в случае консервативной системы

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

К этим выводам, которые будут полезны в последующем изложении, здесь можно прибавить некоторые интересные замечания, относящиеся к случаю твердого тела. Предполагая, что речь идет о свободном твердом теле, примем за его обобщенные координаты декартовы координаты α, β, γ какой-нибудь точки O, неизменно связанной с телом относительно заданных неподвижных осей $\Omega\xi\eta\zeta$, и обычные углы Эйлера θ, φ, ψ, определяющие положение тела по отношению к этим осям. Для виртуальной работы в этом случае будем иметь выражение

$$\delta L = Q_\alpha \delta\alpha + Q_\beta \delta\beta + Q_\gamma \delta\gamma + Q_\theta \delta\theta + Q_\varphi \delta\varphi + Q_\psi \delta\psi, \tag{8}$$

где обобщенные силы Q имеют обычное формальное определение (предыдущий пункт) относительно принятой системы координат.

Обобщенные силы Q в рассматриваемом здесь частном случае допускают интересное механическое истолкование, к которому мы придем, сравнивая выражение (8) с другим выражением той же величины δL, которое можно получить прямо. С этой целью вспомним из кинематики (т. I, гл. VI, п. 15), что любое виртуальное перемещение твердого тела определяется равенством

$$\delta P_i = \delta O + \boldsymbol{\omega}' \times \overrightarrow{OP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

где δO обозначает виртуальное перемещение точки O и $\boldsymbol{\omega}'$ — соответствующее виртуальное вращение. Эти выражения δP_i получаются из аналогичных выражений dP_i действительного элементарного перемещения (п. 3) путем подстановки δO и ω' вместо dO и ωdt, так что, выполняя эту подстановку в равенстве (2), найдем

$$\delta L = \boldsymbol{R} \cdot \delta O + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}',$$

где $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ обозначают главный вектор и главный момент относительно точки O сил $\boldsymbol{F}_i$.

Замечая теперь, что составляющие δO по осям $\Omega\xi\eta\zeta$ суть $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, и обозначая через R_ξ, R_η, R_ζ аналогичные составляющие главного вектора $\boldsymbol{R}$, вместо первого слагаемого будем иметь выражение

$$R \cdot \delta O = R_\xi \delta\alpha + R_\eta \delta\beta + R_\zeta \delta\gamma.$$

Что же касается второго слагаемого $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}'$, то вспомним из кинематики (т. I, гл. III, п. 34), что при действительном элементарном перемещении элементарное вращение $\boldsymbol{\omega}dt$ определяется равенством

$$d\theta\boldsymbol{N}+d\varphi\boldsymbol{k}+d\psi\boldsymbol{\varkappa},$$

где $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, как обычно, обозначают единичные векторы линии узлов, оси Oz, неизменно связанной с твердым телом, и оси $\Omega\zeta$ неподвижной системы координат. Поэтому элементарному виртуальному вращению можно придать вид

$$\boldsymbol{\omega}'=\delta\theta\boldsymbol{N}+\delta\varphi\boldsymbol{k}+\delta\psi\boldsymbol{\varkappa},$$

после чего, обозначая через M_N, M_z, M_ζ составляющие момента $\boldsymbol{M}$ по линии узлов и осям Oz, $\Omega\zeta$, найдем

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}'=M_N\delta\theta+M_z\delta\varphi+M_\zeta\delta\psi.$$

Таким образом, заключаем, что

$$\delta L=R_\xi\delta\alpha+R_\eta\delta\beta+R_\zeta\delta\gamma+M_N\delta\theta+M_z\delta\varphi+M_\zeta\delta\psi,$$

и достаточно отождествить это выражение с выражением (8) для δL, чтобы получить следующие шесть уравнений, дающих упоминавшееся выше механическое истолкование для обобщенных сил Q:

$$Q_\alpha=R_\xi,\qquad Q_\beta=R_\eta,\qquad Q_\gamma=R_\zeta,$$
$$Q_\theta=M_N,\qquad Q_\varphi=M_z,\qquad Q_\psi=M_\zeta.$$

Если имеется в виду твердое тело с одной закрепленной (относительно $\Omega\xi\eta\zeta$) точкой, и мы выберем эту точку за полюс O, то останутся в силе уравнения второй тройки; в том случае, когда силы $\boldsymbol{F}_i$ являются производными от потенциала U, предыдущие равенства дадут механическое истолкование частных производных от U по α, β, γ, θ, φ, ψ.

§ 2. Кинетическая энергия или живая сила

6. Рассмотрим снова какую-нибудь материальную систему S, состоящую из N точек, и обозначим через m_i массу любой точки $P_i (i=1, 2, \ldots, N)$. Если для системы S задано движение (относительно определенной системы ориентировки), то мы будем называть *кинетической энергией или живой силой* системы в любой момент сумму

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \tag{9}$$

кинетических энергий или живых сил в этот момент составляющих систему материальных точек. Кинетическая энергия системы есть скалярная величина, всегда существенно положительная, за исключением случая мгновенной остановки всех точек системы, когда эта величина сводится к нулю. Очевидно, что кинетическая энергия, как и движение, для которого она определяется, имеет относительный характер и зависит от выбора системы осей. Но из того же определения (9) ясно, что T не изменится, когда первоначальная система координат будет заменена другой системой отсчета, неподвижной относительно первой.

В динамике, когда говорят о живой силе, не уточняя дальше этого понятия, принято подразумевать, что движение отнесено к неподвижной или, лучше сказать, к галилеевой системе отсчета.

7. Движение системы S, о котором мы говорили в предыдущем определении, задавалось относительно определенной системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$, которую мы будем называть *неподвижной*, хотя в настоящем изложении она может также и не быть таковой в механическом смысле слова. Иногда случается, что для того, чтобы лучше охватить ход явления, приходится ввести в виде вспомогательной системы отсчета, наряду с системой $\Omega\xi\eta\zeta$, систему $Oxyz$, начало которой O движется по выбранному закону, а оси сохраняют неизменные направления относительно осей неподвижной системы, например остаются параллельными и одинаково направленными с осями ξ, η и ζ. Движение системы S относительно $Oxyz$ называется движением системы *относительно точки* O. Причина такого названия будет ясна, если мы обратим внимание на то, что заданное движение S относительно $\Omega\xi\eta\zeta$ можно рассматривать как абсолютное движение, получающееся в результате только что определенного относительного движения и переносного чисто поступательного движения осей $Oxyz$ относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$ (т. I, гл. IV, § 1).

Если обозначим через $\boldsymbol{v}'$ скорость точки O относительно системы осей $\Omega\xi\eta\zeta$ и через $\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ — скорость любой точки P_i в ее движении относительно точки O (т. е. относительно системы осей $Oxyz$), то в силу теоремы об относительном движении (т. I, гл. IV, п. 2) будем иметь

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_i^{(r)};$$

поэтому, замечая, что формулу (9) можно написать в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i,$$

заключаем, что

$$T = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^{(r)2} + \boldsymbol{v}' \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)}, \tag{10}$$

где через m обозначена полная масса системы.

Равенство (10) представляет живую силу системы в ее движении относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$ в виде суммы трех членов: живой силы, которую имела бы точка O, если бы она была материальной точкой с массой, равной полной массе системы, живой силы системы в ее движении относительно точки O и, наконец, количества, не имеющего более формы живой силы и которое можно назвать *составным*, поскольку оно зависит как от движения точки O, так и от относительного движения.

8. Теорема Кёнига [1]). Формула (10), замечательная сама по себе, становится особенно важной, когда за точку O вспомогательной системы принимается центр тяжести G системы, и, следовательнс (это полезно повторить), движение системы S рассматривается относительно системы с началом в G, оси которой сохраняют неизменными направления относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$. В этом предположении третий член равенства (10) принимает вид

$$\boldsymbol{v}_G \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{v}_G$ обозначает (абсолютную) скорость центра тяжести, а $\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ — скорость любой точки P_i относительно самого центра тяжести. Но векторное тождество, определяющее положение центра тяжести (т. I, гл. X, п. 8), имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GP_i} = 0.$$

Если вспомогательная точка O совпадает с G, то достаточно взять производную по времени относительно осей $Gxyz$, чтобы заметить, что

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)} = 0.$$

Отсюда находим, что в формуле (10) третий член (11) при этих условиях тождественно равен нулю. Таким образом, имеем

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^{(r)2} \tag{12}$$

или словами (теорема Кёнига):

---

[1]) Самуил Кёниг (Samuel König), голландец, родился в княжестве Изенбург в 1712 г., умер в синьории Цуилештейн в 1757 г. Ученик Иоганна Бернулли, сперва преподавал математику, потом был библиотекарем принца Оранского и, наконец, профессором философии и естественного права в Айа.

Живая сила какой угодно системы, находящейся в движении, в любой момент равна сумме живой силы, которую в этот момент имел бы центр тяжести, если бы он был материальной точкой, в которой сосредоточена вся масса системы, и живой силы, которую в тот же момент имеет вся система в ее движении относительно центра тяжести.

Формула (10) и теорема Кёнига имеют особую важность для твердых тел. Однако выражению для живой силы твердого тела можно придать особый вид, благодаря чему этот случай заслуживает того, чтобы рассмотреть его независимым путем.

9. Живая сила твердого тела. Обозначим в случае движения твердого тела S, как обычно, через $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ скорость какой-либо точки O, неизменно связанной с телом S, и угловую скорость движения вокруг оси, проходящей через эту точку; обозначим, далее, через u, v, w, p, q, r — характеристические величины состояния движения, т. е. проекции векторов $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ на оси некоторой системы $Oxyz$, неизменно связанной с твердым телом.

Возьмем опять известные выражения

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

для скоростей отдельных точек P_i твердого тела и подставим их в формулу (9), определяющую живую силу T, а квадраты скоростей отдельных точек представим в виде скалярных произведений вектора $\boldsymbol{v}$ на самого себя, т. е. $\boldsymbol{v}_i^2 = \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i$.

Полагая

$$\left.\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} v_0^2 \sum_{i=1}^{N} m_i, \\ T'' &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \{\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}\}^2, \\ T''' &= \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_0 \cdot \{\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}\}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

будем иметь

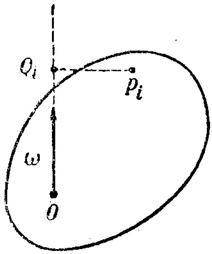
$$T = T' + T'' + T'''. \qquad (14)$$

Следует отметить, что это разложение T воспроизводит для случая твердого тела и для точки, неизменно связанной с ним, три члена, на которые в случае любой материальной системы разбивается живая сила в формуле (10), п. 7. Теперь мы выразим T' T'' и T''' через шесть характеристических величин.

Для первого слагаемого T', которое давало бы полную живую силу твердого тела, если бы движение было чисто поступательным, имеем непосредственно

$$T' = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2), \qquad (13)_1$$

где, как обычно, через m обозначена полная масса твердого тела.



Фиг. 19.

Для того чтобы найти явное выражение второго слагаемого T'', которое давало бы полную живую силу, если бы точка O, неизменно связанная с твердым телом, была неподвижной, надо найти длину δ_i расстояния P_iQ_i (фиг. 19) любой точки P_i твердого тела от мгновенной оси вращения относительно системы осей с началом в точке O, т. е. от прямой, проходящей через O в направлении $\boldsymbol{\omega}$. Так как модуль вектора $\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}$ равен $\delta_i\omega$, то, вынося ω^2 как общий множитель за скобки, найдем, что

$$T'' = \frac{1}{2} I\omega^2,$$

где

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i\delta_i^2$$

есть момент инерции твердого тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через O (т. I, гл. X, п. 18). Если α, β, γ суть направляющие косинусы этой оси, то момент инерции I определяется (упомянутое выше место, п. 22) равенством

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\gamma\alpha - 2C'\alpha\beta,$$

где через A, B, C и A', B', C' обозначены моменты инерции и произведения инерции (центробежные моменты) твердого тела относительно осей $Oxyz$, неизменно связанных с ним. Если через x_i, y_i, z_i обозначим координаты точки P_i, то эти величины представятся в виде

$$A = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2), \qquad B = \sum_{i=1}^{N} m_i (z_i^2 + x_i^2),$$

$$C = \sum_{i=1}^{m_i} m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

$$A' = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i, \quad B' = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i x_i, \quad C' = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i.$$

Так как направляющие косинусы мгновенной оси вращения определяются равенствами

$$\alpha = \frac{p}{\omega}, \quad \beta = \frac{q}{\omega}, \quad \gamma = \frac{r}{\omega},$$

то будем иметь

$$T'' = \frac{1}{2} I\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'rp - 2C'pq\} \qquad (13)_2$$

Переходя, наконец, к третьему слагаемому T''', заметим, что по известному свойству смешанного произведения (т. I, гл. I, п. 25) его можно написать в виде

$$T''' = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP_i} \cdot (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}).$$

После этого, вводя радиус-вектор $\overrightarrow{OG}$ центра тяжести G твердого тела, удовлетворяющий соотношению

$$m\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP_i},$$

мы получим

$$T''' = m\overrightarrow{OG} \cdot (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) = m \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix}, \qquad (13)_3$$

где через x_0, y_0, z_0 обозначены координаты центра тяжести.

Из равенства (14) и из формул $(13)_1$, $(13)_2$, $(13)_3$ следует, что живая сила твердого тела в общем случае выражается в виде квадратичной формы от характеристических величин состояния движения u, v, w, p, q, r.

Важно обратить внимание на некоторые частные случаи установленных ранее общих формул.

Если центр приведения O (который в то же время является началом координат) выбирается в центре тяжести, а за оси координат принимаются соответствующие главные оси инерции, то будут равны нулю координаты x_0, y_0, z_0 центра тяжести, а вместе с ними и три произведения инерции (центробежные моменты): A', B', C', тогда как A, B, C будут теперь тремя главными центральными моментами инерции; поэтому для живой силы мы получим очень простое выражение

$$T = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \qquad (15)$$

которое в согласии с теоремой Кёнига (п. 8) дает разложение T на сумму живой силы, которую имел бы центр тяжести, если бы в нем была сосредоточена вся масса m системы S, и живой силы твердого тела в его движении относительно центра тяжести.

10. Твердое тело, имеющее неподвижную точку или неподвижную ось. Если тело S закреплено в одной из своих точек, то достаточно выбрать эту точку O за центр приведения неизменяемой системы (и за начало осей, неизменно связанных с твердым телом), чтобы исчезли u, v, w и, следовательно, T' и T'''; тогда живая сила тела определится равенством

$$T = T'' = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'rp - 2C'pq). \quad (16)$$

Если подвижные оси (неизменно связанные с твердым телом) совместить с главными осями инерции в закрепленной точке, то будем иметь еще более простое выражение:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad (17)$$

Равенство (16), естественно, сохраняет свое значение также и в случае твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси a (лишь бы начало O подвижной системы было взято на этой прямой), но поскольку в этом случае угловая скорость ω неизменно сохраняет направление оси a, то, если совместить с этой осью вращения одну из неподвижных осей, например ось x, кроме величин u, v, w, будут равны нулю также q и r, так что равенство (16) получит вид

$$T = \frac{1}{2}Ap^2 \quad (18)$$

или же, так как $|\omega| = p$,

$$T = \frac{1}{2}A\omega^2, \quad (18')$$

где A обозначает момент инерции твердого тела относительно оси вращения.

К этой формуле (18'), широко применяемой в приложениях, легко можно прийти и прямым элементарным путем. Достаточно припомнить, что для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси a с угловой скоростью ω, скорость точки P_i, расстояние которой от оси есть δ_i, по абсолютной величине определяется произведением $\delta_i\omega$ (п. 4), так что живая сила этой точки будет равна

$$\frac{1}{2}m_i\delta_i^2\omega^2;$$

отсюда, суммируя по всем точкам системы, получим для живой силы тела выражение

$$T=\frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i\delta_i^2,$$

очевидно, совпадающее с выражением (18′).

11. Живая сила голономной системы в лагранжевых координатах. В динамике голономных систем существенная роль принадлежит выражению живой силы в лагранжевых координатах. Пусть дана голономная система из N точек $P_i (i=1, 2, \ldots, N)$, имеющая n степеней свободы, тогда мы можем предположить (т. I, гл. VI, п. 1), что положения точек системы определяются параметрическими уравнениями вида (5)

$$P_i=P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n | t), \quad (i=1, 2, \ldots, N).$$

Взяв производную по времени, получим отсюда выражения для скоростей (возможных) $\boldsymbol{v}_i$ отдельных точек P_i (в функциях от координат q, лагранжевых скоростей $\dot{q}$ и времени t)

$$\boldsymbol{v}_i=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h+\frac{\partial P_i}{\partial t}, \qquad (i=1, 2, \ldots, N); \tag{19}$$

достаточно подставить эти выражения в равенство

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i,$$

чтобы видеть, что *живая сила голономной системы есть целая рациональная функция второй степени от $\dot{q}$ с коэффициентами, зависящими только от q и t.* Поэтому можно написать

$$T=T_2+T_1+T_0, \tag{20}$$

где через T_2, T_1, T_0 обозначены соответственно совокупность членов второй степени относительно $\dot{q}$, совокупность членов первой степени относительно $\dot{q}$ и, наконец, совокупность членов, не зависящих от $\dot{q}$.

Если связи не зависят от времени, то выражения (19) скоростей $\boldsymbol{v}_i$ сводятся к их линейной однородной части относительно $\dot{q}$

$$\boldsymbol{v}_i=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h, \qquad (i=1, 2, \ldots, N) \tag{19′}$$

и не будут больше содержать t в коэффициентах, поэтому T будет *квадратичной формой* относительно $\dot{q}$ с коэффициентами, зависящими только от координат q. Явное выражение T будет иметь вид

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_k}\dot{q}_k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\dot{q}_h\dot{q}_k;$$

достаточно изменить порядок суммирования и положить

$$a_{hk}=\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\frac{\partial P_i}{\partial q_k}=\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_h}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_k}+\frac{\partial \eta_i}{\partial q_h}\frac{\partial \eta_i}{\partial q_k}+\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_h}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_k}\right), \qquad (21)$$

чтобы заключить, что

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k, \qquad (22)$$

где коэффициенты a_{hk} зависят только от координат q.

Эта форма поэтому является общим выражением *живой силы голономной системы со связями, не зависящими от времени, и с n степенями свободы.*

Важно отметить, что эта квадратичная форма (22) в переменных $\dot{q}$ по своей природе является *определенной положительной*, т. е. остается большей нуля при каком угодно выборе аргументов $\dot{q}$, за исключением случая, когда исчезают все обобщенные скорости $\dot{q}$ и когда она становится равной нулю. Чтобы в этом убедиться, заметим, что живая сила T в силу своего определения (9) в функции от скоростей v_i остается всегда положительной, за исключением случая, когда исчезают все v_i; в этом случае форма (22) будет равна нулю. Остается поэтому только показать, что все $\dot{q}$ будут нулями тогда и только тогда, когда нулями будут и все v.

На основании соотношений (19′) мы непосредственно видим, что, когда $\dot{q}_h=0\ (h=1, 2, \ldots, n)$, то также и $v_i=0\ (i=1,2, \ldots, N)$, а с другой стороны, мы видим, что равенство $v_i=0\ (i=1,2, \ldots, N)$ может иметь место только в том случае, когда все скорости $\dot{q}$ удовлетворяют линейной однородной системе

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_h}\dot{q}_h=0, \quad \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_h}\dot{q}_h=0, \quad \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_h}\dot{q}_h=0 \quad (i=1,2,\ldots, N),$$

из которой как раз и следует, что $\dot{q}_h=0\ (h=1,2, \ldots, n)$, поскольку якобиева матрица от ξ, η, ζ по q вследствие предположения о независимости этих лагранжевых координат при любых значениях их должна иметь ранг n (т. I, гл. VI, п. 2). Заметим еще, что если в противоположность тому, что предполагалось ранее, связи зависят от времени, то те вычисления, которые только что привели нас к выражению для кинетической энергии T, дадут ее однородную квадратичную часть T_2.

Действительно, чтобы получить T_2, достаточно подставить в формулу (9) вместо каждого $\mathbf{v}_i$ не полное выражение (19), а только его однородную часть, которая формально тождественна с (19′), с той только разницей, что коэффициенты зависят, кроме q, еще и от t. Отсюда следует, что если мы и в этом случае введем обозначения (21), то сможем написать

$$T_2 = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k, \qquad (22')$$

где, как и в только что указанной формуле, коэффициенты суть вполне определенные функции от q и времени.

Тем же путем, каким мы пришли к выражению (22), доказывается, что квадратичная форма T_2 также всегда будет определенной положительной.

Заметим еще, кроме того, что как в том, так и в другом случае определитель $\|a_{hk}\|$ из n коэффициентов a_{hk}, как дискриминант определенной (положительной) формы, не может обращаться в нуль тождественно. Действительно, если бы этот определитель был тождественно равен нулю, то существовало бы n значений $\dot{q}$, не исчезающих одновременно и удовлетворяющих n линейным однородным уравнениям

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}\dot{q}_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Умножая предыдущее равенство на $\dot{q}_h$ и суммируя почленно по h от 1 до n, мы для такой системы значений $\dot{q}$ имели бы

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = 0.$$

Это соотношение согласно теореме Эйлера сведется либо к равенству $T = 0$, если связи не зависят от времени, либо к равенству $T_2 = 0$ в случае связей, зависящих от времени. Это заключение противоречит характеру определенной (положительной) формы, который мы установили выше для T и T_2.

§ 3. Количество движения и момент количеств движения системы

12. Количество движения системы. *Количеством движения* (или также *импульсом*) системы в любой момент называется векторная сумма

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \tag{23}$$

количеств движения, которые имеют в рассматриваемый момент отдельные точки P_i системы.

Если возьмем производную по времени от векторного равенства, определяющего положение центра тяжести G системы относительно некоторой *неподвижной* точки O (т. I, гл. X, п. 8)

$$m\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP}_i,$$

то, обозначая через $\boldsymbol{v}_G$ скорость точки G, получим

$$m\boldsymbol{v}_G = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i$$

или же в силу определения (23)

$$\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_G. \tag{24}$$

Поэтому имеем теорему:

Количество движения какой угодно материальной системы в любой момент равно количеству движения центра тяжести системы в этот момент, если бы он был такой материальной точкой, в которой сосредоточена вся масса системы.

13. Момент количеств движения системы. *Моментом количеств движения (или кинетическим моментом)* относительно какой-нибудь точки O какой угодно материальной системы S в любое мгновение называется результирующий момент относительно O всех количеств движения отдельных точек P_i системы (приложенных в соответствующих точках), т. е. векторная величина

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i. \tag{25}$$

Кинетической *парой* системы иногда называется всякая пара с моментом $\boldsymbol{K}$ (ср. т. I, гл. I, п. 48).

Так как количество движения $\boldsymbol{Q}$ и момент количеств движения $\boldsymbol{K}$ суть не что иное, как результирующая и результирующий момент относительно любой точки O системы векторов $m_i\boldsymbol{v}_i$, каждый из которых приложен в соответствующей точке P_i, то момент $\boldsymbol{K}'$ количеств движения относительно какой-нибудь другой точки O' определится равенством (т. I, гл. I, п. 33)

$$\boldsymbol{K}'=\boldsymbol{K}+\overrightarrow{O'O}\times\boldsymbol{Q}.$$

К другому результату, который не только интересен сам по себе, но и будет использован в дальнейшем (гл. V, п. 10), мы придем, если за центр приведения моментов возьмем центр тяжести G системы.

Если введем скорости $\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ движения точек системы относительно G, то (согласно п. 7) будем иметь

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_G+\boldsymbol{v}_i^{(r)} \quad (i=1, 2, \ldots, N).$$

Если теперь примем во внимание, что по самому определению центра тяжести

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{GP_i}=0,$$

то, принимая за центр приведения центр тяжести, получим из формулы (25)

$$\boldsymbol{K}=\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{GP_i}\times m_i\boldsymbol{v}_i^{(r)}.$$

Так как в правой части стоит результирующий момент относительно точки G *относительных* количеств движения $m_i\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ отдельных точек системы, то заключаем, что *как бы система ни двигалась, момент (абсолютный) количеств движения относительно центра тяжести совпадает с аналогичным относительным моментом количеств движения по отношению к самому центру тяжести.*

14. Производная по времени от момента количеств движения системы. Для последующего важно иметь явное выражение производной по времени от момента количеств движения $\boldsymbol{K}$. Если через $\boldsymbol{v}'$ обозначить скорость точки O и через $\boldsymbol{a}_i$ — ускорение точки P_i, то из равенства (25) следует, что

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{OP_i}\times m_i\boldsymbol{a}_i+\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}')\times m_i\boldsymbol{v}_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{OP_i}\times m_i\boldsymbol{a}_i+\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}'\times\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{v}_i;$$

Отсюда, замечая, что $\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i$ тождественно равно нулю и принимая во внимание равенство (24), получим

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i a_i - \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q}. \tag{26}$$

Это и есть искомая формула.

Если центр приведения неподвижен ($\boldsymbol{v}' = 0$), то формула (26) упрощается и принимает вид

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i a_i. \tag{27}$$

Здесь особенно важно заметить, что формула (27) сохраняет свое значение даже и тогда, когда центр приведения O (не будучи, вообще говоря, неподвижным) в любой момент совпадает с центром тяжести системы. Действительно, в этом случае член $\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q}$, появляющийся в общей формуле (26), будет тождественно равен нулю, потому что скорость $\boldsymbol{v}'$ центра приведения совпадает со скоростью $\boldsymbol{v}_G$ центра тяжести и вектор количества движения $\boldsymbol{Q}$ на основании формулы (24) коллинеарен с вектором $\boldsymbol{v}'$.

15. Количество движения и момент количеств движения твердого тела. Если движущаяся система S представляет собой твердое тело и за центр приведения O принимается точка, неизменно связанная с системой, то два вектора $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$ очень просто выражаются через характеристики u, v, w, p, q, r состояния движения системы, относящиеся к каким-нибудь подвижным (неизменно связанным с телом) осям $Oxyz$. Точнее можно сказать, *проекции векторов $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$ на оси $Oxyz$ равны частным производным от живой силы T твердого тела по переменным u, v, w и p, q, r соответственно.*

Действительно, возьмем равенство

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(v_i^2|_x + v_i^2|_y + v_i^2|_z\right)$$

и примем во внимание соотношения

$$\left.\begin{aligned} v_i|_x &= u + q z_i - r y_i, \\ v_i|_y &= v + r x_i - p z_i, \\ v_i|_z &= w + p y_i - q x_i, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

которые получаются путем проектирования на оси векторного равенства $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}_i$. Рассматривая теперь T как функцию от u, v, w, p, q, r, составляющуюся при помощи выражений (28), возьмем от нее частную производную сначала по u. Так как согласпо формулам (28) от u зависит только $v_i|_x$ и мы имеем

$$\frac{\partial v_i|_x}{\partial u}=1,$$

то получим тождество

$$\frac{\partial T}{\partial u}=\sum_{i=1}^{N} m_i v_i|_x,$$

правая часть которого есть не что иное, как проекция Q_x вектора Q на ось x. Поэтому, принимая во внимание результаты, которые получатся после круговой перестановки букв x, y, z и u, v, w, будем иметь:

$$Q_x=\frac{\partial T}{\partial u},\quad Q_y=\frac{\partial T}{\partial v},\quad Q_z=\frac{\partial T}{\partial w}. \tag{29}$$

Далее, если возьмем производную от T по p, то так как $v_i|_x$ не зависит, а $v_i|_y$ и $v_i|_z$ зависят от p, будем иметь

$$\frac{\partial v_i|_y}{\partial p}=-z_i,\quad \frac{\partial v_i|_z}{\partial p}=y_i.$$

Таким образом, приходим к тождеству

$$\frac{\partial T}{\partial p}=\sum_{i=1}^{N} m_i(-z_i v_i|_y+y_i v_i|_z)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}(y_i m_i v_i|_z-z_i m_i v_i|_y),$$

в котором правая часть есть проекция K_x вектора K на ось x; при помощи круговой перестановки букв x, y, z и p, q, r получим

$$K_x=\frac{\partial T}{\partial p},\quad K_y=\frac{\partial T}{\partial q},\quad K_z=\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{30}$$

Если мы не добавим никакого частного предположения ни о движении твердого тела, ни о его материальной структуре, ни о выборе подвижных осей, то для T необходимо принять общее выражение, даваемое равенствами (13) и (14) п. 9, и тогда для проекции векторов Q и K получатся следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} Q_x&=m(u+z_0q-y_0r),\\ Q_y&=m(v+x_0r-z_0p),\\ Q_z&=m(w+y_0p-x_0q),\end{aligned}\right\} \tag{29'}$$

$$\left.\begin{aligned} K_x&=Ap-C'q-B'r+m(y_0w-z_0v),\\ K_y&=-C'p+Bq-A'r+m(z_0u-x_0w),\\ K_z&=-B'p-A'q+Cr+m(x_0v-y_0u).\end{aligned}\right\} \tag{30'}$$

Заметим еще, что, применяя теорему Эйлера об однородных функциях к выражению живой силы T, рассматриваемому, как квадратичная форма от шести величин, характеризующих кинематическое состояние тела, и принимая во внимание уравнения (29), (30), мы получим для живой силы замечательное выражение

$$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{Q}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}.$$

Если полюс O совпадает с центром тяжести ($\boldsymbol{Q}=m\boldsymbol{v}_0$), то это выражение можно написать в виде

$$T=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{K}.$$

16. Канонические формы для проекции векторов $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$. Твердое тело с закрепленной точкой или отнесенное к системе осей с началом в центре тяжести. Если за центр O приведения моментов (и начала подвижных осей) возьмем центр тяжести твердого тела, так что одновременно исчезнут x_0, y_0, z_0, то формулы (29′) приведутся к каноническому виду

$$Q_x=mu,\quad Q_y=mv,\quad Q=mw \tag{29″}$$

и будут выражать уже известное тождество вектора $\boldsymbol{Q}$ с количеством движения, которое имел бы центр тяжести, если бы в нем была сосредоточена вся масса m твердого тела (п. 12).

Что же касается проекций (30′) вектора $\boldsymbol{K}$, то очевидно, что в каждой из них последние члены сведутся к нулю как в том случае, когда центр приведения O совпадает с центром тяжести ($x_0=y_0=z_0=0$), так и в том случае, когда точка O тела закреплена в пространстве ($u=v=w=0$). Как в том, так и в другом случае равенства (30′) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} K_x&=Ap-C'q-B'r,\\ K_y&=-C'p+Bq-A'r,\\ K_z&=-B'p-A'q+Cr;\end{aligned}\right\} \tag{30″}$$

достаточно принять за подвижные оси три главные оси инерции относительно точки O (центр тяжести или закрепленная точка, неизменно связанная с телом), чтобы привести, наконец, проекции момента количеств движения к канонической форме:

$$K_x=Ap,\quad K_y=Bq,\quad K_z=Cr, \tag{30‴}$$

где A, B, C обозначают главные моменты инерции.

Формулы (30‴) и (29″) будут справедливы всякий раз, когда центр приведения совпадает с центром тяжести, но не в том случае, когда точка O будет закреплена в пространстве, так как тогда наряду с формулами (30‴) для составляющих $\boldsymbol{Q}$ получатся выражения

$$Q_x = z_0 q - x_0 r, \quad Q_y = x_0 r - z_0 p, \quad Q_z = y_0 p - x_0 q. \qquad (29''')$$

Важно отметить, что в этом последнем предположении (центр приведения закреплен) живая сила может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{K},$$

тогда как в том случае, когда центр приведения совпадает с центром тяжести, это выражение даст живую силу T'' твердого тела, движущегося относительно своего центра тяжести.

17. Твердое тело гироскопической структуры относительно какой-либо его точки и гироскопы. В динамике твердых тел мы часто будем иметь случай обращаться к таким телам, для которых существует некоторая точка O, относительно которой эллипсоид инерции будет эллипсоидом вращения. Всякое такое твердое тело мы будем называть телом с *гироскопической структурой* относительно точки O, а ось симметрии соответствующего эллипсоида инерции будет называться *гироскопической осью*.

Если такое твердое тело отнесем к системе $Oxyz$, ось z которой совпадает с гироскопической осью, и обозначим, как обычно, через A, B, C (главные) моменты инерции твердого тела относительно осей x, y, z, то характеристическое условие гироскопической структуры определится равенством

$$A = B; \qquad (31)$$

отсюда, если введем моменты инерции относительно трех (главных) плоскостей:

$$yz, \ zx, \ xy,$$

т. е. суммы

$$s_1 = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2, \quad s_2 = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2, \quad s_3 = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i^2,$$

следует, что

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{2} C, \quad s_3 = A - \frac{1}{2} C.$$

Предположим теперь, в частности, что точка O, относительно которой твердое тело имеет гироскопическую структуру, совпадает с его центром тяжести. Если на гироскопической оси z возьмем какую-нибудь другую точку O_1, для которой будет $OO_1 = z_0$, и рассмотрим систему $O_1 x_1 y_1 z$, в которой оси x_1, y_1 параллельны и одинаково направлены с осями x, y, то моменты инерции A_1, B_1,

C_1 твердого тела относительно новых осей в силу теоремы Гюйгенса (т. I, гл. X, п. 21) определятся равенствами

$$A_1 = A + mz_0^2, \quad B_1 = B + mz_0^2, \quad C_1 = C,$$

где m обозначает полную массу тела, так что мы будем иметь

$$A_1 = B_1. \tag{31'}$$

С другой стороны, если мы примем во внимание, что точка O есть центр тяжести, и, следовательно, статические моменты

$$\sum_{i=1}^{N} m_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i y_i, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

твердого тела относительно плоскостей yz, zx, xy равны нулю, то немедленно убедимся в том, что будут также равны нулю вместе с произведениями инерции A', B', C' относительно осей x, y, z аналогичные произведения A_1', B_1', C_1' *) относительно осей x_1, y_1, z_1. Таким образом, мы видим, что x_1, y_1, z суть главные оси инерции твердого тела, которое на основании равенства (31') имеет поэтому гироскопическую структуру не только относительно центра тяжести, но также и относительно всякой другой точки O_1 его оси.

Иначе говоря, если центральный эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения, то эллипсоиды инерции относительно всякой другой точки на его оси симметрии будут также эллипсоидами вращения.

И наоборот, достаточно, чтобы твердое тело имело гироскопическую структуру относительно какой-нибудь точки и чтобы ось симметрии соответствующего эллипсоида инерции проходила через центр тяжести, для того чтобы и центральный эллипсоид был эллипсоидом вращения.

Всякое тело, центральный эллипсоид инерции которого есть эллипсоид вращения, мы будем называть *гироскопом.*

Гироскопом, конечно, будет однородное тело вращения или вообще твердое тело, представляющее полную симметрию относительно некоторой оси, не только геометрическую, но и материальную. Ради краткости мы будем говорить в этих случаях, что речь идет о „гироскопах в узком смысле“.

Вернемся к предположению, что твердое тело имеет гироскопическую структуру относительно одной своей точки O. Если эта

---

*) Действительно, эти величины представятся в виде

$$A_1' = \sum m_i y_i (z_i - z_0) = \sum m_i y_i z_i - z_0 \sum m_i y_i = A' = 0,$$

$$B_1' = \sum m_i (z_i - z_0) x_i = \sum m_i z_i x_i - z_0 \sum m_i x_i = B' = 0,$$

$$C_1' = C' = 0,$$

так как статические моменты $\sum m_i y_i$ и $\sum m_i x_i$, как только что было сказано, равны нулю. *(Прим. ред.)*

точка неподвижна (или совпадает с центром тяжести), то уравнения (30′) на основании условия $A=B$ приведутся к следующим:

$$K_x = Ap, \quad K_y = Aq, \quad K_z = Cr,$$

так что если обозначим через $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{H}$ экваториальные составляющие векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$, т. е. их составляющие в плоскости, перпендикулярной к гироскопической оси, то эти формулы можно будет заменить двумя равенствами (первое из которых векторное, второе — скалярное):

$$\boldsymbol{H} = A\boldsymbol{e}, \quad K_z = Cr.$$

Далее, если обозначим через $\boldsymbol{k}$ единичный вектор гироскопической оси z (направленной в сторону, которая выбирается произвольно при выборе осей $Oxyz$), то для векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$ будем иметь выражения

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{e} + r\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{K} = A\boldsymbol{e} + Cr\boldsymbol{k},$$

а отсюда, после исключения экваториальной составляющей $\boldsymbol{e}$ вектора $\boldsymbol{\omega}$, получатся два эквивалентных друг другу равенства, каждое из которых выражает один из двух векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$ в функции от другого (и единичного вектора $\boldsymbol{k}$ гироскопической оси):

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{A}\boldsymbol{K} + \frac{A-C}{A} r\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{K} = A\boldsymbol{\omega} + (C-A) r\boldsymbol{k}.$$

Полученными выше формулами для какого угодно твердого тела гироскопической структуры мы будем неоднократно пользоваться в динамике твердого тела (гл. VII, VIII, IX). Важно отметить, что на основании того обстоятельства, что *всякая* пара взаимно перпендикулярных прямых, расположенных в экваториальной плоскости, вместе с гироскопической осью составляет тройку главных осей инерции, все эти формулы останутся в силе даже тогда, когда вместо осей $Oxyz$, неизменно связанных с твердым телом, будут выбраны оси Ox_1y_1z, вращающиеся по какому-нибудь закону вокруг гироскопической оси z (стереокинетическая система отсчета для тела с гироскопической структурой).

18. Геометрическое соответствие между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$. Обращаясь теперь к какому угодно твердому телу, отнесенному к одной из троек главных осей инерции $Oxyz$, возьмем снова скалярное произведение

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \tag{32}$$

которое, как мы знаем, дает живую силу твердого тела в его абсолютном движении или в его движении относительно центра тяжести, смотря по тому, будет ли центр O приведения моментов количеств движения закрепленной точкой (неизменно связанной с твердым телом), или центром тяжести твердого тела (п. 16). Обозначая эту живую силу в обоих случаях через T (в п. 9 во втором случае мы ее обозначали через T'') и принимая во внимание, что она по отношению к величинам p, q, r является определенной положительной формой, заключаем, что (кроме возможных моментов, когда исчезает $\boldsymbol{\omega}$ и, следовательно, в силу формул (30''), исчезает также и $\boldsymbol{K}$) *угол между двумя векторами* $\boldsymbol{\omega}$ *и* $\boldsymbol{K}$ *будет всегда острым.* Но наряду с этим чисто качественным результатом легко можно найти геометрическое построение, позволяющее определить направление одного из двух векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$, когда известно направление другого.

С этой целью рассмотрим эллипсоид инерции твердого тела относительно точки O и заметим, что в соответствующем уравнении (отнесенном к главным осям инерции)

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1, \tag{33}$$

левая часть даст удвоенную живую силу $2T$, если вместо величин x, y, z подставить величины p, q, r.

Если величины p, q, r рассматривать как однородные координаты (пропорциональные направляющим косинусам) прямой, параллельной вектору $\boldsymbol{\omega}$, и принять во внимание полярные свойства эллипсоида инерции, то из соотношений (30)

$$K_x=\frac{\partial T}{\partial p}, \quad K_y=\frac{\partial T}{\partial q}, \quad K_z=\frac{\partial T}{\partial r}$$

будет видно, что проекции вектора $\boldsymbol{K}$ на оси x, y, z являются коэффициентами при x, y, z в уравнении диаметральной плоскости, сопряженной с направлением $\boldsymbol{\omega}$, или, другими словами, угловыми коэффициентами (пропорциональными направляющим косинусам) нормали к этой плоскости.

Поэтому можно сказать, что кинетический *момент* $\boldsymbol{K}$ *всегда перпендикулярен к диаметральной плоскости эллипсоида инерции, сопряженной с направлением угловой скорости* $\boldsymbol{\omega}$.

Если вспомним, что касательная плоскость к эллипсоиду (так же как и к какой угодно поверхности второго порядка) в любой точке сопряжена с диаметром, проходящим через точку касания, то можно сказать также, что *момент* $\boldsymbol{K}$ *перпендикулярен к двум касательным плоскостям* (друг другу параллельным) *к эллипсоиду инерции в двух точках, в которых эллипсоид пересекается с диаметром, параллельным вектору* $\boldsymbol{\omega}$.

Отсюда, в частности, следует, что векторы $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{\omega}$ будут параллельны тогда и только тогда, когда оба они имеют направление одной из главных осей или, в другом выражении, когда мгновенное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ происходит вокруг одной из главных осей инерции.

Установленное выше геометрическое свойство и качественная оценка, произведенная вначале, позволяют всегда определить направление и сторону какого-нибудь одного из двух векторов $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{\omega}$, если известны направление и сторона другого. Для того чтобы иметь линию действия (ориентированную) вектора $\boldsymbol{K}$, достаточно рассмотреть касательную плоскость к эллипсоиду инерции в какой-нибудь одной из двух точек, в которых он пересекается линией действия вектора $\boldsymbol{\omega}$ (приложенного в точке O) и провести из точки O перпендикуляр к этой плоскости в ту сторону, которая с $\boldsymbol{\omega}$ образует острый угол. И обратно, мы получим линию действия вектора $\boldsymbol{\omega}$, если возьмем какую-нибудь одну из касательных плоскостей к эллипсоиду, перпендикулярных к вектору $\boldsymbol{K}$, и направим прямую, соединяющую O с точкой касания в ту сторону, которая составляет с $\boldsymbol{K}$ острый угол.

Остается показать, что когда известна величина ω угловой скорости, можно вычислить величину K кинетического момента и обратно.

Если задана угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, а следовательно, также и живая сила T, и требуется вычислить K, то достаточно обратиться к формуле (32), чтобы получить

$$K\omega\cos\alpha = 2T, \tag{32'}$$

где острый угол α считается известным на основании изложенных выше геометрических соображений.

Далее, если, предполагая известным $\boldsymbol{K}$, мы желаем найти величину ω угловой скорости, то можно прежде всего определить путем геометрического построения (ориентированную) линию действия вектора $\boldsymbol{\omega}$ и, следовательно, величину α (острого) угла между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$. Если, обозначая через Q точку, в которой эта линия действия в своем положительном направлении пересекает эллипсоид инерции, мы положим $\rho = OQ$ и примем во внимание, что направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{\omega}$ определяются отношениями $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}$, то для координат точки Q получим выражения

$$\rho\frac{p}{\omega},\ \rho\frac{q}{\omega},\ \rho\frac{r}{\omega},$$

а отсюда, учитывая, что эти величины удовлетворяют уравнению (33) эллипсоида инерции, придем к соотношению

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} = 2T. \tag{34}$$

Исключив из равенств (32') и (34) живую силу T, получим искомое выражение для ω:

$$\omega = K\rho^2\cos\alpha.$$

Здесь, наконец, имея в виду будущие приложения, полезно также вычислить расстояние δ от центра O эллипсоида до его касательной плоскости в точке Q. Очевидно, имеем

$$\delta = \rho \cos \alpha; \tag{35}$$

исключая ρ посредством равенства (34) и принимая во внимание равенство (32′), получим

$$\delta = \frac{\sqrt{2T}}{K}. \tag{36}$$

19. Векторная гомография инерции. Соответствие между двумя векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$, которое мы только что изучали с геометрической точки зрения и которое по отношению к любым подвижным осям аналитически представляется равенствами (30″), а по отношению к главным осям инерции относительно точки O — равенствами (30‴), является первым примером тех взаимно однозначных соответствий между (переменными) векторами, которые по отношению к какой-нибудь системе отсчета устанавливаются путем определения составляющих одного из двух векторов в виде линейных функций от составляющих другого. Это так называемые *векторные гомографии (или аффинные преобразования)*; это название дал им Бурали-Форти, а Марколонго в последние годы развил их теорию[1]).

Векторные гомографии мы рассмотрим несколько подробнее в III томе, но уже теперь для удобства изложения условимся называть рассматриваемое здесь соответствие между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$ *(векторной) гомографией инерции* твердого тела *относительно его точки* O, выбранной за центр приведения. Векторную гомографию инерции, если рассматривать ее как однозначную операцию, которая, будучи приложена к вектору $\boldsymbol{\omega}$, даст в результате вектор $\boldsymbol{K}$, удобно выразить символом σ, полагая

$$\boldsymbol{K} = \sigma(\boldsymbol{\omega}).$$

Обратная операция, которая, будучи приложена к вектору $\boldsymbol{K}$, дает вектор $\boldsymbol{\omega}$, так же как и операция σ, однозначна, как мы видели в предыдущем пункте, и может быть выражена символом σ^{-1}, именно

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma^{-1}(\boldsymbol{K}).$$

Оба предыдущих символических уравнения выражают в краткой форме, с одной стороны, уравнения (30″), относящиеся к любым подвижным осям, связанным с твердым телом, и уравнения, получающиеся в результате их решения, а с другой стороны, уравнения (30‴), относящиеся к главным осям инерции в точке O, и соответственно уравнения, представляющие собой решения уравнений (30‴).

---

[1]) См., в частности, Burali — Forti e Marcolongo, *Transformations linéaires*, Pavia, Mattei, 1912.

Уравнения (30‴) вместе с их решениями

$$p=\frac{K_x}{A},\quad q=\frac{K_y}{B},\quad r=\frac{K_z}{C}$$

называются *каноническими уравнениями* гомографии; направления главных осей инерции, к которым относятся эти уравнения, называются иногда *главными направлениями гомографии.*

20. Твердое тело, имеющее неподвижную ось. Если твердое тело S вращается вокруг неподвижной прямой a, то удобно принять эту прямую, ориентированную как угодно, за одну из подвижных осей отсчета, например за ось x, и взять в одной из ее точек центр приведения O моментов; эту точку можно затем принять за начало подвижных осей. Благодаря этому обратятся в нуль все величины, характеризующие кинематическое состояние тела, за исключением p $(u=v=w=q=r=0,\ p\neq 0)$, а так как при неподвижном центре приведения O уравнения (29‴), (30″) п. 16 сохраняют свое значение, то для проекций количества движения $\boldsymbol{Q}$ и момента количеств движения $\boldsymbol{K}$ будем иметь выражения:

$$Q_x=0,\qquad Q_y=-z_0p,\qquad Q_z=y_0p; \tag{37}$$

$$K_x=Ap,\qquad K_y=-C'p,\qquad K_z=-B'p. \tag{38}$$

С точки зрения основной задачи динамики (определить движение, когда заданы активные силы) наиболее важным из этих шести элементов (как это мы увидим в гл. VII) является момент $K_a=K_x$ количеств движения относительно оси вращения. Обозначая, как обычно, через ω абсолютную величину угловой скорости, имеем $p=\pm\omega$, причем знак выбирается в зависимости от того, будет ли (в рассматриваемый момент) произвольно выбранное за положительное направление оси совпадать или не совпадать с направлением угловой скорости *).

Первое из уравнений (38) показывает, таким образом, что *момент количеств движения относительно оси вращения выражается произведением* $\pm\omega$ *на* A (момент инерции тела относительно той же оси), где нужно взять знак плюс, если ось вращения ориентирована таким образом, что в рассматриваемый момент вращение твердого тела по отношению к ней оказывается правым.

Не лишним будет показать, как к этому выражению K_a можно прийти элементарным путем.

Действительно, заметим, что если речь идет о вращательном движении вокруг оси a, то скорость точки P_i, расстояние которой от оси есть δ_i, имеет величину $\omega\delta_i$ и направлена перпендикулярно к плоскости P_ia; так как δ_i есть кратчайшее расстояние линии

---

*) Если под ω подразумевают не модуль вектора ω, а его проекцию на ось, то необходимость постановки двойного знака отпадает. *(Прим. ред.)*

действия скорости от оси, то момент этой скорости относительно оси будет равен $\omega\delta_i^2$, причем не только по абсолютной величине, но и по знаку, если ось ориентирована в ту сторону, с какой вращение в рассматриваемый момент оказывается правым. В силу этого момент относительно оси a количества движения материальной точки P_i при указанном выборе направления оси равен $m_i\omega\delta_i^2$; суммируя по всем точкам системы, найдем снова формулу

$$K_a = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i\delta_i^2,$$

которая совпадает с ранее полученной, так как $\sum_{i=1}^{N} m_i\delta_i^2$ есть момент инерции твердого тела относительно оси вращения. Если направление этой оси меняется на обратное, то в правой части, естественно, надо будет изменить знак.

Если через θ обозначить угол, который полуплоскость, выходящая из a и неизменно связанная с телом, образует с аналогичной полуплоскостью, неподвижной в пространстве (этот угол будем считать положительным при правом вращении вокруг a), то можно будет написать

$$K_a = A\dot{\theta},$$

так как, согласно определению угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\theta}$ есть ее проекция на ось a (т. I, гл. III, п. 8).

§ 4. Система отсчета для какой угодно материальной системы, соответствующая наименьшей кинетической энергии

21. Относительный характер живой силы, уже отмеченный в п. 6, приводит к рассмотрению некоторого особого класса систем отсчета для любой материальной системы.

Предположим, что движение некоторой системы S определено относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$, которые для простоты назовем неподвижными, и поставим себе задачу определить такую систему отсчета, относительно которой живая сила системы будет наименьшей.

Заметим теперь же, что если некоторый триэдр обладает этим свойством, то то же будет иметь место и для всякого другого триэдра, неподвижного относительно первого, так что все сводится к выяснению того, каким должно быть движение искомой системы отсчета $Oxyz$ относительно неподвижной системы $\Omega\xi\eta\zeta$. Для этой цели достаточно указать характеристические векторы $v_0 = d_aO/dt$ и $\boldsymbol{\omega}$ движения осей $Oxyz$, где d_a/dt обозначает (абсолютную) производную, относящуюся к осям $\Omega\xi\eta\zeta$.

Теорема Кёнига позволяет непосредственно заключить, что должно быть

$$\frac{d_a O}{dt} = \frac{d_a G}{dt},$$

где G, как обычно, обозначает центр тяжести системы. Действительно, в силу этой теоремы живая сила системы S относительно системы осей $Oxyz$ состоит из живой силы относительно центра тяжести, увеличенной на *существенно положительное слагаемое*

$$\frac{1}{2} m \left[\frac{d_a \overrightarrow{OG}}{dt}\right]^2,$$

где m обозначает полную массу системы S, так что искомая система отсчета должна иметь начало O неподвижным относительно центра тяжести G, или, несколько точнее, относительно системы $G\xi\eta\zeta$ с началом в G и с неизменными направлениями осей.

Условимся называть *абсолютными* кинематические величины, которые относятся к этим последним осям, и *относительными* кинематические величины, относящиеся к неизвестной системе осей, обладающей указанным выше свойством.

Относительную скорость какой-нибудь точки $P_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ системы можно представить в виде $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{w}_i$, где $\boldsymbol{v}_i$ есть аналогичная абсолютная скорость, которую мы можем считать известной, а

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{GP_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (39)$$

есть соответствующая переносная скорость. Отсюда для относительной живой силы находим выражение

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{w}_i)^2.$$

Далее, из анализа известно, что для того, чтобы T, рассматриваемая как функция угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (или соответствующих абсолютных ее составляющих π, χ, ρ), имела минимум при данном значении $\boldsymbol{\omega}$, необходимо, чтобы при любом бесконечно малом приращении $\delta\boldsymbol{\omega}$ вектора $\boldsymbol{\omega}$ исчезала соответствующая вариация T.

Так как T зависит от $\boldsymbol{\omega}$ только через посредство $\boldsymbol{w}_i$, то эта вариация определяется равенством

$$\delta T = -\sum_{i=1}^{N} m_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{w}_i) \cdot \delta\boldsymbol{w}_i,$$

где в силу соотношения (39)

$$\delta\boldsymbol{w}_i = \delta\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{GP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

поэтому, подставляя эти выражения вместо $\delta \boldsymbol{w}_i$ и переставляя множители смешанного произведения, получим

$$\delta T = -\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{GP}\times m_i(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{w}_i).$$

Полученная вариация δT будет равна нулю при любом значении $\delta\boldsymbol{\omega}$ в том и только в том случае, если выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{GP_i}\times m_i(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{w}_i)=0. \tag{40}$$

Отсюда заключаем, *что искомая система осей должна быть такой, чтобы в движении по отношению к ней кинетический момент материальной системы относительно центра тяжести был равен нулю*[1]).

Следует заметить, что равенство (40) в силу соотношения (39) приводит к трем линейным уравнениям относительно трех неизвестных проекций π, χ, ρ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, которые определяются из этих уравнений однозначно. Это можно видеть и не производя вычислений, если мысленно спроектировать уравнение (40) на главные оси инерции $G\xi\eta\zeta$, проходящие через центр тяжести.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что если в любой момент движение твердого тела является винтовым, то элементарная работа центробежных сил (отнесенных к мгновенной винтовой оси) равна нулю.

2. Диск произвольного вида (т. е. ограниченный произвольной кривой) движется в своей плоскости, катясь без скольжения по прямой l. Пусть ω есть угловая скорость диска в любой момент и v — абсолютная величина скорости центра тяжести G. Показать, что, обозначая через ρ расстояние от центра тяжести G диска до точки P касания диска с прямой l и через δ радиус инерции диска относительно оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через центр тяжести, будем иметь

$$v^2=\frac{\rho^2}{\delta^2+\rho^2}\omega^2.$$

Достаточно приравнять два выражения, которые получатся для живой силы диска, когда за центр приведения берется точка касания или центр тяжести.

---

[1]) В случае твердого тела это будет иметь место для всякой системы осей, неизменно связанной с телом. Аппелль, пытаясь распространить некоторые свойства, которыми обладают системы осей, неизменно связанные с твердым телом, на какие угодно системы осей, был вынужден исходить из условия (40), выражающего обращение в нуль кинетического момента относительно центра тяжести в относительном движении (*Comptes Rendus*, т. 166, 1918, стр. 513—516). Вывод условия (40), приведенный в тексте, был сообщен авторам устно Альманси.

3. Определить структурные условия, при которых твердое тело, закрепленное в его точке O, при движении около этой точки имеет живую силу, пропорциональную квадрату угловой скорости.

Прежде всего заметим, что кинетическое условие того, что отношение T/ω^2 не должно зависеть от величины угловой скорости и направления мгновенной оси тела, означает, что эллипсоид инерции относительно точки O сводится к шару. Таким образом, мы прямо переходим к вопросу чистой геометрии масс. Для того чтобы существовала такая точка, необходимо и достаточно, чтобы центральный эллипсоид инерции был сплюснутым эллипсоидом вращения. В этом случае существуют две точки O, обе лежащие на оси симметрии эллипсоида на расстоянии c от центра тяжести, связанном с полной массой m и с главными моментами инерции (экваториальным и полярным) A и C соотношением

$$A+mc^2=C.$$

4. Показать, что всякое твердое тело с двумя плоскостями симметрии есть гироскоп.

5. Когда мгновенная винтовая ось и центральная ось q количеств движения совпадают?

Эти оси соответственно параллельны (при обозначениях пп. 9 и 10) векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{Q}=m\boldsymbol{v}_G$, так что прежде всего вектор $\boldsymbol{v}_G$ должен быть параллелен вектору $\boldsymbol{\omega}$. Это показывает, что при допущенном предположении мгновенная винтовая ось и, следовательно, центральная ось q проходят через центр тяжести G. После этого необходимо и достаточно, чтобы результирующий момент $\boldsymbol{K}$ количеств движения относительно центра тяжести G, взятого за центр приведения, был параллелен вектору $\boldsymbol{Q}$ и, следовательно, вектору $\boldsymbol{\omega}$. А для этого необходимо и достаточно, чтобы три главных центральных момента инерции были равны между собой.

6. Три материальные точки: P, P_1, P_2 с массами m, m_1, m_2 движутся по плоскости; точки P_1 и P_2 связаны с точкой P двумя твердыми стержнями, могущими свободно вращаться вокруг P, длиной l_1, l_2. Мы имеем здесь, очевидно, голономную систему с четырьмя степенями свободы. Определить живую силу системы T, пренебрегая массой стержней и принимая за параметры Лагранжа координаты x, y точки P относительно какой-нибудь декартовой системы Oxy в плоскости движения и углы θ_1, θ_2, образованные прямыми PP_1 и PP_2 с осью Ox.

Ответ:

$$2T=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\sum_{i=1}^{2} m_i\{(\dot{x}-l_i\sin\theta_i\dot{\theta}_i)^2+(\dot{y}+l_i\cos\theta_i\dot{\theta}_i)^2\}.$$

7. Если характеристикам u, v, w, p, q, r состояния движения твердого тела придадим бесконечно малые приращения δu, δv, ..., δr, то живая сила T получит приращение, которое по теореме о полном дифференциале определится равенством

$$\delta T=\frac{\partial T}{\partial u}\delta u+\frac{\partial T}{\partial v}\delta v+\frac{\partial T}{\partial w}\delta w+\frac{\partial T}{\partial p}\delta p+\frac{\partial T}{\partial q}\delta q+\frac{\partial T}{\partial r}\delta r.$$

С другой стороны, обозначив через $\delta\boldsymbol{v}_0$ и $\delta\boldsymbol{\omega}$ соответствующие приращения двух характеристических векторов $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$, для скорости любой точки P_i твердого тела будем иметь

$$\delta\boldsymbol{v}_i=\delta\boldsymbol{v}_0+\delta\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OP_i}\qquad (i=1, 2, \ldots, N).$$

После этого, отправляясь от выражения

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^2$$

и принимая во внимание определение векторов $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$, вычислить выражение приращения δT. Сравнение с предыдущим приведет к формулам (29), (30) п. 15.

8. Рассматривая квадратичную форму T, выражающую живую силу твердого тела через характеристики u, v, w, p, q, r, обозначим через (T) взаимную форму, т. е. квадратичную форму, получающуюся из T, если вместо шести указанных выше аргументов вводятся шесть их линейных комбинаций:

$$Q_x=\frac{\partial T}{\partial u}, \quad Q_y=\frac{\partial T}{\partial v}, \quad Q_z=\frac{\partial T}{\partial w}, \quad K_x=\frac{\partial T}{\partial p}, \quad K_y=\frac{\partial T}{\partial q}, \quad K_z=\frac{\partial T}{\partial r}.$$

Предполагается, что эти линейные комбинации независимы. Проверить прежде всего, что это условие достаточно и что поэтому произвольным приращениям $\delta u, \delta v, \ldots$, соответствуют вполне определенные приращения δQ_x, $\delta Q_y, \ldots, \delta K_z$, и обратно. По теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$2T=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{K}\cdot\omega.$$

Отсюда и из соотношения $\delta(T)=\delta T$ получим

$$\delta(T)=\boldsymbol{v}_0\cdot\delta\boldsymbol{Q}+\omega\cdot\delta\boldsymbol{K},$$

а также выражения для кинетических характеристик $u, v, \ldots r$, которые являются производными от (T).

Глава V

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА. НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Общие сведения

1. Основной задачей динамики является *определение движения какой угодно материальной системы при заданных действующих силах*.

Для уточнения самой формулировки этой задачи необходимы некоторые предварительные сведения. Будем при этом пользоваться аналогией со случаем одной материальной точки, пока это не вызовет противоречий.

Если, как обычно, обратимся к системе S из N материальных точек P_i $(i=1, 2, \ldots, N)$, то всякая система действующих сил будет состоять из сил, приложенных к N точкам системы. Эту систему сил на основании постулата о независимости действия сил (т. I, гл. VII, п. 12) можно свести к N силам, приложенным соответственно к N точкам P_i, заменяя для каждой из них все различные действующие на нее силы их равнодействующей. Имея это в виду, мы будем считать известной систему сил, действующих на материальную систему, всякий раз, как для каждой точки P_i будет задана равнодействующая приложенных к ней сил в функции от конфигурации системы, от скоростей всех N точек в данный момент и от времени (ср. т. I, гл. VII, п. 22).

Если, как в задаче небесной механики для N тел (гл. III, п. 22), эти N точек P_i свободны и задана, в только что указанном смысле, система действующих на них сил, то задачу о движении тотчас же можно будет выразить в уравнениях.

Действительно, применяя к каждой из N точек основное уравнение динамики, мы получим N векторных уравнений

$$m_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{F}_i$ обозначает заданную равнодействующую всех сил, приложенных к точке P_i, m_i — массу этой точки и $\boldsymbol{a}_i$ — ее неизвестное ускорение, отнесенное к галилеевой системе отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$ (т. е. к системе, которая относительно звезд неподвижна или движется поступательно и притом прямолинейно и равномерно). Если ξ_i, η_i, ζ_i суть координаты точки P_i и X_i, Y_i, Z_i — составляющие силы $\boldsymbol{F}_i$ в этой системе, то векторные уравнения (1), если их спроектировать на три оси $\Omega\xi\eta\zeta$, дадут $3N$ скалярных уравнений:

$$m_i\ddot{\xi}_i=X_i, \quad m_i\ddot{\eta}_i=Y_i, \quad m_i\ddot{\zeta}_i=Z_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{1'}$$

где X_i, Y_i, Z_i по предположению обозначают некоторые известные функции от $6N+1$ аргументов

$$\xi_i,\quad \eta_i,\quad \zeta_i;\quad \dot{\xi}_i,\quad \dot{\eta}_i,\quad \dot{\zeta}_i;\quad t \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Следовательно, речь идет о системе $3N$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с $3N$ неизвестными функциями ξ_i, η_i, ζ_i от одной независимой переменной t; задача о движении N свободных точек P_i при заданной системе сил приводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (1').

Это интегрирование, как известно, вообще говоря, не может быть выполнено в конечном виде при помощи элементарных способов. Но на основании известных теорем о существовании[1]) можно утверждать, что при достаточно широких условиях для функций X_i, Y_i, Z_i система (1') имеет общий интеграл, зависящий от $6N$ произвольных постоянных.

Следовательно, можно сказать, что для N свободных точек P_i при заданных силах возможны ∞^{6N} различных движений; из них можно выделить одно, задавая соответствующие начальные условия, например задавая произвольно положение системы и ее кинематическое состояние в начальный момент.

2. Рассмотренный случай системы из N *свободных* точек встречается в физической действительности только в упомянутой выше задаче небесной механики (в которой система сил, как мы знаем, принадлежит не к общему виду, как предположено в предыдущем пункте, а представляет собой систему позиционных сил). В огромном же большинстве конкретных вопросов приходится рассматривать *материальные системы со связями*.

Далее, если система из N материальных точек P_i с какими угодно связями находится под действием системы сил, то, основываясь на постулате о реакциях связей (т. I, гл. VII, п. 10), мы можем принять, что действие, оказываемое связями при заданных силах на каждую точку системы, можно заменить некоторой силой, которую называют реакцией связи.

После этого, на основании только что упомянутого постулата, можно рассматривать систему S как систему, состоящую из N свободных точек, каждая из которых находится под совокупным действием равнодействующей прямо приложенных к ней сил и равнодействующей реакций, которыми заменяется действие связей.

Отсюда следует, что также и в более общем случае систем со связями остаются в силе основные уравнения (1) *при условии, что каждая из сил F_i рассматривается как равнодействующая*

---

[1]) Вспомним подстрочное примечание к п. 18 главы II первого тома русского издания.

активных сил и реакций, под действием которых находится соответствующая точка P_i.

Таким образом, между рассматриваемым случаем и случаем, который был разобран в предыдущем пункте, имеется существенное различие. Здесь, помимо активных сил, оказываются известными только способы реализации связей, но не соответствующие реакции, которые вследствие этого являются *вспомогательными неизвестными*. Эти неизвестные входят в виде явных слагаемых в правые части уравнений (1). Отсюда следует, что уравнения (1) в случае движения системы со связями представляют собой только предварительную постановку задачи; поэтому в динамике приходится отыскивать способы, которые позволили бы исключить из уравнений (1) в наиболее общих возможных случаях реакции и таким образом для определения движения дать дифференциальные уравнения, зависящие только от прямых данных рассматриваемой задачи.

3. В предыдущем пункте в силу логической необходимости нам пришлось разделить действующие на систему силы на *силы прямо приложенные*, или *активные*, и *силы связей*, или *реакции*.

Этой классификации можно противопоставить другую (которая была введена уже в статике и к которой мы возвращались в п. 3 предыдущей главы) классификацию этих же сил: разделение их на *внешние* и *внутренние*. Здесь, имея в виду важность такого различения сил, напомним, хотя это может показаться почти излишним, что *внутренними силами* называются силы, с которыми на каждую отдельную точку системы действуют другие точки той же системы (в частности, точки, соседние с ней), *внешними* же мы называли все остальные силы (происходящие от внешних влияний на систему).

Чтобы избежать опасной путаницы, мы тотчас же условимся, что эта вторая классификация сил не зависит от первой. Для некоторых частных систем, как, например, для свободного твердого тела, находящегося под действием силы тяжести и поверхностных растягивающих или сжимающих сил, обе классификации приводят к одному и тому же распределению сил; в этом случае активные силы (вес и поверхностные силы) являются внешними, а реакции (силы связей твердого тела) — внутренними. Но достаточно подумать о связях, осуществляемых посредством соединений системы с внешними по отношению к ней телами (например, подвешенное или опертое твердое тело), а с другой стороны, о силах, происходящих не от связей, но возбуждаемых искусственными приспособлениями или возникающих в естественных физических условиях (например, ньютонианское притяжение между материальными элементами движущейся системы), чтобы видеть, что, вообще говоря, *и активные силы, и силы реакции могут быть как внешними, так и внутренними*.

4. Две указанные выше классификации сил, действующих на материальную систему, играют важную роль в динамике, поскольку с каждой из них связывается целая группа общих теорем и последующих конкретных приложений. Не будет поэтому лишним вспомнить, что аналогичные обстоятельства имели место в статике, где сначала, разделив силы на внешние и внутренние, мы пришли к *основным условиям равновесия* (т. I, гл. XII), приложимым в качестве необходимых к всевозможным типам материальных систем (например, к стержневым системам, нитям и т. д., гл. XIV) и, в частности, являющимся достаточными для равновесия твердого тела (гл. XIII) затем в общей статике (гл. XV), отправляясь от разделения сил на активные силы и реакции и присоединяя ограничительные предположения о природе связей (отсутствие трения), мы пришли, применяя принцип виртуальной работы, к исключению неизвестных реакций из условий равновесия.

В настоящей главе мы будем придерживаться, применительно к вопросам динамики, того же порядка изложения. В § 2 на основании разделения сил, действующих на какую-нибудь систему, на внешние и внутренние мы установим два векторных уравнения (*основные уравнения движения*), применяя которые к любой возможной системе мы придем к весьма разнообразным выводам и которые в случае твердого тела, как мы это увидим в гл. VII будут *достаточны* для определения движения.

В §§ 3—6, наоборот, мы будем исходить из деления сил на активные силы и реакции связей и покажем, в предположении отсутствия трения, как и в этом динамическом случае принцип виртуальной работы позволит исключить из дифференциальных уравнений движения в самом общем виде неизвестные реакции. Мы придем таким образом к классическим уравнениям Лагранжа (§ 6) и посредством ряда дополнительных выводов и конкретных примеров покажем их огромную важность как в теоретических вопросах, так и для приложений (§§ 7—9).

§ 2. Теоремы о количестве движения и о моменте количеств движения. Основные уравнения движения

5. Теорема о количестве движения. Рассматривая материальную систему S из N точек P_i ($i=1, 2, \ldots, N$) с произвольными связями, находящуюся под действием каких угодно сил, разобьем совокупность *всех* сил, действующих на систему (как прямо приложенных, так и реакций связей), на *внешние* и *внутренние* и обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ равнодействующую всех внешних сил, действующих на любую точку P_i, а через $\boldsymbol{f}_i$ — равнодействующую всех внутренних сил. Полная сила, действующая на точку P_i, будет равна $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{f}_i$, так что уравнения движения системы можно будет написать в виде

$$m_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{f}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N). \tag{2}$$

Но внутренние силы f_i вследствие самой природы их составляют на основании принципа о равенстве действия и противодействия (т. I, гл. XII, § 1) систему векторов, эквивалентную нулю (т. е. имеющую равную нулю результирующую и результирующий момент). Отсюда следует, что, складывая почленно N уравнений (2), мы получим

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i$$

или же, обозначая через $\boldsymbol{R}^{(e)}$ результирующую всех внешних сил,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)};$$

достаточно вспомнить определение количества движения (предыдущая глава, п. 12)

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i,$$

чтобы придать предыдущему соотношению вид

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)}. \tag{3}$$

Поэтому имеем (теорема о количестве движения или импульса), что *производная от количества движения какой угодно материальной системы в любой момент равна результирующей внешних сил.*

6. Теорема о движении центра тяжести. Если мы примем во внимание (предыдущая глава, п. 12), что

$$\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_G,$$

где m — полная масса системы и $\boldsymbol{v}_G$ — скорость центра тяжести G, то равенство (3), обозначая через $\boldsymbol{a}_G$ ускорение точки G, можно будет написать в виде

$$m\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{R}^{(e)}. \tag{3'}$$

Мы имеем здесь так называемую теорему о движении центра тяжести:

Какова бы ни была рассматриваемая материальная система и каковы бы ни были силы, под действием которых она находится, центр тяжести ее движется так, как если бы он был материальной точкой, в которой сосредоточена вся масса системы и которая находится под действием результирующей всех внешних сил, действующих на систему.

С аналитической точки зрения эта теорема является только другой формой теоремы о количестве движения, но по своему смыслу она более выразительна. В частности, для всякой системы она обнаруживает существование точки (внутренней), т. е. центра тяжести, движение которой строго следует закону движения материальной точки; тем самым оправдывается замена тела с конечными размерами простой материальной точкой не только в тех случаях, когда этими размерами можно пренебречь, но даже и тогда, когда размеры тела значительны, но достаточно принять во внимание движение только одной его точки.

7. В виде простейшего приложения теоремы о движении центра тяжести рассмотрим тело, обладающее *внутренней* структурой, сколь угодно сложной, и находящееся исключительно под действием силы тяжести, например животное, падающее в пустоте. Теорема предыдущего пункта в этом случае показывает, что никакие внутренние приспособления, а в случае животного — никакие мускульные усилия не в состоянии изменить траекторию центра тяжести; действительно, все возникающие при этом силы, как бы они ни были разнообразны и велики, остаются все же только внутренними, и центр тяжести будет описывать параболу, определяемую действием только силы тяжести.

Для избежания недоразумений не лишне подчеркнуть, что это совершенно не исключает возможности полета; действительно, в этом случае существенную роль играет воздух, и посредством крыльев или каких-либо других средств вызывается также и внешнее *воздействие* на рассматриваемую систему.

8. Если для какой-нибудь системы S результирующая $\boldsymbol{R}^{(e)}$ внешних сил постоянно равна нулю, то из уравнения (3′) следует, что $a_G = 0$, т. е. *центр тяжести движется прямолинейно и равномерно*.

Это и есть так называемая *теорема о сохранении движения центра тяжести*. Она, например, должна иметь силу, по крайней мере приблизительно, для солнечной системы, поскольку можно пренебречь действиями со стороны звезд, так как эти действия вследствие огромных расстояний оказываются ничтожными по сравнению со взаимными притяжениями между Солнцем и планетами. Действительно, на основании оценки среднего движения из большого числа астрономических наблюдений найдено, что центр тяжести солнечной системы, расположенный вблизи от центра Солнца, движется со скоростью 20 *км/сек* к некоторой точке небесной сферы, расположенной вблизи от Веги и называемой *апексом*.

9. Возвращаясь к какой угодно системе, предположим вообще, что составляющая $R_a^{(e)}$ результирующей $\boldsymbol{R}^{(e)}$ по некоторому определенному направлению a постоянно равна нулю. В таком случае, проектируя на это направление уравнение (3′), получим $a_{G|a}=0$ или $\frac{dv_{G|a}}{dt}=0$; отсюда заключаем, что *во время движения системы проекция $v_{G|a}$ скорости центра тяжести на направление a остается постоянной.*

Эти столь простые и в то же время столь общие результаты очень часто используются для конкретных приложений. Чтобы указать в виде примера на одно следствие из последнего замечания, докажем, что если бы не было трения, то нельзя было бы ходить; точнее, человек, стоящий вертикально на горизонтальном, абсолютно гладком полу, не смог бы ни при каком мускульном усилии перейти в другое место, если бы он вначале был в покое.

Действительно, так как трение отсутствует, то внешние силы (вес и реакция пола) обе вертикальны, так что для любого горизонтального направления a мы имеем $v_{G|a}=\text{const}$, а так как человек вначале предполагается находящимся в покое, то для него постоянно имело бы место равенство $v_{G|a}=0$, т. е. горизонтальная проекция центра тяжести оставалась бы неподвижной. Этот человек, следовательно, никоим образом не смог бы вызвать собственного перемещения в каком нибудь горизонтальном направлении: если он переместит какую-нибудь часть своего тела в одном направлении, то какая-нибудь другая часть его тела необходимо должна будет переместиться в противоположном направлении (что вызвало бы — самое большее — подъем или опускание центра тяжести вдоль вертикали). В действительности это теоретически возможное положение не имеет места, и движение удается начать, используя трение.

10. Теорема о моменте количеств движения. Возьмем снова основное уравнение (2)

$$m_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{f}_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

и будем рассматривать в качестве центра приведения некоторую точку O, *движущуюся по какому-нибудь определенному закону* или, в частности, *находящуюся в покое* (относительно нашей системы отсчета).

Если, далее, умножим векторно это уравнение (2) на $\overrightarrow{OP_i}$ и просуммируем обе части по i от $i=1$ до $i=N$, помня, что результирующий момент внутренних сил $\boldsymbol{f}_i$ относительно любой точки O постоянно равен нулю, то получим

$$\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{OP_i}\times m_i\boldsymbol{a}_i=\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{OP_i}\times\boldsymbol{F}_i,$$

где в правой части остается только результирующий момент внешних сил $\boldsymbol{F}_i$ относительно точки O, который мы обозначим через $\boldsymbol{M}^{(e)}$.

Но в п. 14 предыдущей главы было показано, что если обозначить через $\boldsymbol{K}$ результирующий момент количеств движения системы и через $\boldsymbol{v}'$ скорость (относительно нашей системы отсчета) центра приведения O, то будем иметь тождественно

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i = \frac{d\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q}.$$

Поэтому предыдущее соотношение можно написать в особенно удобной форме

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{M}^{(e)}; \tag{4}$$

Это уравнение сохраняет свое значение при каком угодно законе движения центра приведения O. Но в общих выводах динамики оно чаще всего применяется для двух частных случаев: 1) когда центр O неподвижен; 2) когда центр O, будучи, вообще говоря, движущимся, совпадает во все время движения с центром тяжести материальной системы. В обоих случаях (так как в первом имеем $\boldsymbol{v}' = 0$, а во втором вектор $\boldsymbol{Q}$ параллелен $\boldsymbol{v}'$) исчезает член $\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q}$ (ср. предыдущую главу, п. 14) и уравнение (4) принимает более простой вид

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}^{(e)}; \tag{4'}$$

в этом виде оно вполне соответствует уравнению (3). Уравнение (4') выражает т е о р е м у о м о м е н т е к о л и ч е с т в д в и ж е н и я (или к и н е т и ч е с к о м м о м е н т е):

Как бы ни двигалась материальная система, производная по времени от момента количеств движения относительно какой-нибудь неподвижной точки или точки, совпадающей с центром тяжести, в любой момент равна результирующему моменту всех внешних сил относительно той же точки.

Эта теорема доказана здесь при единственном неявном предположении, что движение системы отнесено к осям, неподвижным относительно неподвижных звезд или, по крайней мере, находящимся относительно их в прямолинейном и равномерном поступательном движении.

Но мы знаем (предыдущая глава, п. 13), что если за центр приведения принять центр тяжести, то момент количеств движения (абсолютный) системы совпадет с моментом количеств движения относительно центра тяжести; поэтому уравнение (4') будет справедливо даже и тогда, когда вместо $\boldsymbol{K}$ берется этот последний момент, лишь бы результирующий момент $\boldsymbol{M}^{(e)}$ внешних сил вычислялся относительно центра тяжести.

Наконец, почти нет необходимости упоминать, что если a есть *какая-нибудь* неподвижная прямая, проходящая через центр приведения, предполагаемый неподвижным, или прямая, проходящая через центр тяжести G и сохраняющая неизменное направление, то равенство (4′) после проектирования на a дает

$$\frac{dK_a}{dt} = M_a^{(e)}, \tag{5}$$

если за центр приведения выбирается центр тяжести G.

Соотношение (5) выражает *теорему о моменте количеств движения относительно оси.*

11. Если действующие на систему силы таковы, что результирующий момент $\boldsymbol{M}^{(e)}$ внешних сил остается постоянно равным нулю, то из равенства (4′) следует, что *во все время движения вектор* $\boldsymbol{K}$ *остается постоянным* (по величине и направлению).

В этом случае постоянным будет также и положение плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{K}$ и проходящей через центр приведения O.

Такая плоскость называется *неизменяемой плоскостью* системы, а уравнение

$$\boldsymbol{K} = \text{const} = \boldsymbol{K}_0$$

называется *интегралом момента* (векторного) *количеств движения.*

Как тем, так и другим свойством обладают все системы, находящиеся под действием только внутренних сил; для таких систем обращаются в нуль как $\boldsymbol{R}^{(e)}$, так и $\boldsymbol{M}^{(e)}$, и, следовательно, одновременно остаются постоянными количество движения $\boldsymbol{Q}$ и момент количеств движения $\boldsymbol{K}$. Такой системой, например, по крайней мере приближенно, будет солнечная система, неизменяемая плоскость которой называется также *плоскостью Лапласа.*

Отметим еще как непосредственное следствие равенства (5), что *если результирующий момент внешних сил относительно прямой a, неподвижной или проходящей через центр тяжести и сохраняющей неизменное направление, постоянно равен нулю, то во все время движения (скалярный) результирующий момент K_a количеств движения относительно прямой a будет оставаться постоянным (интеграл скалярного момента количеств движения).*

12. Теорема о моменте количеств движения и ее следствия наравне с теоремой о количестве движения находят многочисленные и разнообразные применения.

Чтобы дать некоторые примеры, начнем с рассмотрения твердого тела, находящегося под действием внешних сил, результирующий момент которых относительно центра тяжести равен нулю, и заметим, что это всегда будет иметь место в случае тяжелого твердого тела, так как веса всех отдельных элементов тела эквивалентны в смысле теории приложенных векторов (а для твердых тел, как увидим, также и в динамическом смысле) одной силе, приложенной в центре тяжести.

Можно утверждать, что если твердое тело под действием внешних сил, удовлетворяющих указанному выше условию, движется, исходя *из состояния покоя*, то его движение необходимо будет поступательным.

Чтобы это доказать, покажем, что угловая скорость, которая по предположению вначале равна нулю, останется равной нулю и в течение всего времени движения.

Для этой цели будем исходить из теоремы о кинетическом моменте, отнесенном к центру тяжести твердого тела. Так как по предположению момент активных сил относительно центра тяжести равен нулю, то аналогичный момент K количеств движения должен быть постоянным по величине и направлению; и так как, кроме того, вначале скорости, а следовательно, и количества движения всех точек системы равны нулю, то будет также равно нулю начальное значение момента K, который, оставаясь постоянным, будет равен нулю и в течение всего времени движения.

Но тогда достаточно вспомнить, что относительно главных центральных осей инерции составляющие вектора K равны Ap, Bq, Cr (предыдущая глава, п. 16), где (если исключим тривиальный случай, когда материальные точки системы S все принадлежат одной и той же прямой) величины A, B, C (в силу их определения как моментов инерции) все отличны от нуля, чтобы заключить, что вместе с K постоянно будут равны нулю составляющие p, q, r вектора ω, а значит, и сама угловая скорость ω.

Отсюда следует, в частности, что тяжелое твердое тело, падающее в пустоте, не может перевернуться, если оно выходит из состояния покоя или же если оно будет брошено таким образом, что угловая скорость вначале равна нулю.

Таким образом мы строго установили возможность сообщить падающему в пустоте тяжелому телу чисто поступательное движение в полном согласии с тем, что мы уже имели случай однажды утверждать на основании интуиции (т. I, гл. XVI, п. 5).

13. Отбросим теперь предположение, что момент $M^{(e)}$ внешних сил относительно центра тяжести равен нулю, и предположим только, что $M_a^{(e)} = 0$, где a есть ось, неподвижная или имеющая неизменное направление и проходящая через центр тяжести рассматриваемого твердого тела. Мы сейчас же увидим, что *невозможно вызвать вращение вокруг оси a*, если *исходить из состояния покоя*. Действительно, из равенства (5) следует, что составляющая K_a остается постоянной; а так как составляющая K_a равна $A\dot{\theta}$, где θ — угол, определяющий положение тела, то угловая скорость $\dot{\theta}$ останется равной нулю, если она вначале равна нулю (так как момент инерции A отличен от нуля).

14. В качестве второго примера рассмотрим систему S несколько более общую, именно систему, состоящую из двух частей S_1 и S_2, каждая из которых представляет собой твердое тело, но эти тела не неизменно связаны друг с другом. Предположим, как выше, что $M_a^{(e)}=0$, где $M_a^{(e)}$ обозначает теперь результирующий момент относительно оси a всех внешних сил, действующих как на S_1, так и на S_2. И здесь составляющая K_a момента количеств движения будет все еще постоянной и даже равной нулю, если, как мы и будем предполагать, система выходит из состояния покоя. Если, далее, известно еще, что движение каждого из двух тел сводится к вращению вокруг оси a, то соответствующие моменты количеств движения будут равны $A_1\dot{\theta}_1$, $A_2\dot{\theta}_2$. Следовательно, $A_1\dot{\theta}_1+A_2\dot{\theta}_2$ будет результирующим моментом количеств движения системы, и в любой момент будем иметь

$$A_1\dot{\theta}_1+A_2\dot{\theta}_2=0,$$

или же, интегрируя и предполагая, что для каждой из двух отдельных систем S_1 и S_2 угол отсчитывается от начального положения,

$$A_1\theta_1+A_2\theta_2=0.$$

Отсюда мы видим, что угловые перемещения θ_1 и θ_2 должны иметь противоположные знаки, т. е. если одно из двух твердых тел вращается в одну сторону, то другое необходимо должно вращаться в противоположную сторону; кроме того, углы поворота (описываемые в равные промежутки времени) обратно пропорциональны соответствующим моментам инерции. Поэтому никоим образом не исключено, как это имело место, когда речь шла об одном твердом теле, что если система выходит из состояния покоя, одно из двух тел, например S_1, изменяет ориентацию до достижения некоторого заданного произвольно угла θ_1; однако при указанных условиях нельзя избежать того, чтобы другое тело не вращалось в противоположную сторону, так как необходимо, чтобы выполнялось условие $A_1\theta_1+A_2\theta_2=0$.

15. Применим то, что изложено выше, к примеру, который уже служил нам для иллюстрации сохранения движения центра тяжести, т. е. к человеку, прямо стоящему на горизонтальном, абсолютно гладком полу (п. 9). Пусть a будет вертикаль, проходящая через центр тяжести человека, и пусть человеку требуется, например, сделать полуоборот, т. е. повернуться на 180° вокруг прямой a. Внешними силами в этом случае являются вес и реакция пола в точках опоры; все силы вертикальны, и потому результирующий момент их относительно оси a равен нулю. При этих условиях мы найдем, следовательно, что совокупное вращение, т. е. вращение человека как одной неизменяемой системы, невозможно.

Но замечание, сделанное для случая двух твердых тел, показывает, что если даже оставить в стороне трение, вращение вокруг a было бы вполне осуществимо, если бы была возможность связать с человеком какой-нибудь предмет, способный вращаться в противоположную сторону. Так, в частности, если вокруг талии подвязать пояс с жолобом, по которому может катиться тяжелый шар, то достаточно было бы придать ему рукой движение, чтобы вызвать вращение (пусть хотя бы и малое) всего человека в противоположную сторону; по истечении достаточного времени человек во всяком случае достиг бы желаемого результата.

Аналогичные соображения (когда необходимо вводить некоторые движения двух частей S_1 и S_2, не неизменно соединенных между собой) позволяют отдать себе отчет о так называемом „прыжке кошки". Речь идет о хорошо известном факте, что, как бы ни падала или как бы ни была брошена кошка, даже лапками вверх и из состояния покоя, она успевает повернуться за время падения без всякого вмешательства внешних сил (если для этого имеется достаточное время).

16. Основные уравнения движения какой угодно системы. Два векторных уравнения (3) и (4)

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}=\boldsymbol{R}^{(e)},$$

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}+\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{M}^{(e)}$$

или, в частности, уравнение (3) и уравнение (4')

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}=\boldsymbol{M}^{(e)}$$

называются *основными или общими уравнениями движения*.

Они приложимы ко всякой системе, лишь бы только:

а) движение было отнесено к галилеевым осям, т. е. к осям неподвижным или находящимся в поступательном и притом прямолинейном и равномерном движении относительно звезд;

б) векторные производные брались по отношению к тем же самым осям;

в) центр приведения был неподвижен или совпадал с центром тяжести системы, если мы хотим применить эти уравнения в форме (3), (4').

Необходимо отметить, что эти уравнения в статическом случае ($\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{K}=0$) дают как раз условия $\boldsymbol{R}^{(e)}=\boldsymbol{M}^{(e)}=0$, которые мы в статике установили как *необходимые* для равновесия какой угодно материальной системы и которые вследствие этого назвали основными или общими (т. I, гл. XII, п. 4). Как и тогда для статического случая (упомянутое место, п. 5), так и теперь мы можем утверждать, что основные уравнения движения, являясь *необходимыми* для всякой материальной системы, не будут, вообще говоря, достаточными для определения движения. Однако в полном согласии со статическим случаем в гл. VII мы увидим, что для неизменяемых систем они во всяком случае достаточны для полного определения движения и поэтому составляют основу всей динамики твердых тел.

17. Отнесение основных уравнений к осям, движущимся по какому-нибудь закону. В некоторых случаях, как это мы увидим не раз в дальнейшем, бывает выгодно освободиться от абсолютной системы отсчета и отнести основные уравнения к осям, движущимся в пространстве по закону a priori произвольному, который в зависимости от случая будет определяться способом, наиболее пригодным для задачи, подлежащей рассмотрению.

Если мы будем попрежнему рассматривать абсолютное движение (движение относительно неподвижных звезд), но отнесем основные уравнения движения к какой-нибудь подвижной системе осей, движущейся поступательно, то останутся неизменными не только векторы $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$, которые как абсолютные результирующая и результирующий момент количеств движения не зависят от выбора подвижной системы отсчета, но также и их производные по времени, как это непосредственно ясно из самого определения векторной производной и как на это уже указывалось в п. 10 гл. IV, т. I. В результате основные уравнения должны быть все еще взяты в их первоначальной форме: (3) и (4) или) (3′) и (4′).

Но если, наоборот, новая система отсчета вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}'$ и если производные по времени относительно этой новой системы осей обозначать точками, то будем иметь (т. I, гл. IV, п. 10)

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}=\dot{\boldsymbol{Q}}+\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{Q},\qquad \frac{d\boldsymbol{K}}{dt}=\dot{\boldsymbol{K}}+\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{K};$$

поэтому основные уравнения примут более общую форму

$$\dot{\boldsymbol{Q}}+\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}^{(e)}, \tag{6}$$

$$\dot{\boldsymbol{K}}+\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}^{(e)}. \tag{7}$$

В этих уравнениях $\boldsymbol{v}'$, как обычно, есть скорость той a priori произвольной точки, которая принимается за центр приведения. В большинстве случаев удобнее совместить эту точку с началом подвижной системы отсчета, тогда $\boldsymbol{v}'$ и $\boldsymbol{\omega}'$ будут представлять собой характеристические векторы кинематического состояния новой системы отсчета по отношению к первоначальной галилеевой системе.

§ 3. Принцип Даламбера и общее соотношение динамики

18. К общим теоремам предыдущего параграфа мы пришли, отправляясь от разделения сил, действующих на систему, на внешние и внутренние. Здесь мы применим другой критерий классификации (п. 3) и разделим эти силы на *активные* (или прямо приложенные) и *реакции связей*. Точнее, обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ равнодействующую активных сил, приложенных к любой точке

$$P_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N),$$

через $\boldsymbol{R}_i$ — соответствующую равнодействующую реакций. Так как систему S можно рассматривать как систему из N свободных точек, на которые соответственно действуют N сил $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i$, то в течение всего времени движения (отнесенного к галилеевым осям $\Omega\xi\eta\zeta$) останутся в силе основные уравнения

$$m_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{8}$$

которые можно написать в виде

$$\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{R}_i=0, \qquad (i=1, 2, \ldots, N). \tag{8'}$$

Если, подобно тому, как это делалось в теории относительного равновесия (т. I, гл. XVI, § 1), мы будем истолковывать каждый из векторов $-m_i\boldsymbol{a}_i$ (имеющих размерность силы) как силу (фиктивную), которую назовем *силой инерции*, относящейся к точке P_i, то из уравнений (8′), поскольку они относятся к N точкам, рассматриваемым как свободные (т. I, гл. VII, п. 16), будет следовать, что *при движении материальной системы с какими угодно связями активные силы, реакции и силы инерции в любой момент находятся в равновесии.*

Если же мы обратим внимание на то, что реакции в их совокупности представляют собой действие связей, то можно также сказать, что *при движении материальной системы с какими угодно связями в любой момент благодаря связям, наложенным на систему, активные силы и силы инерции уравновешиваются.*

Положению, которое мы здесь рассматриваем, можно дать третью эквивалентную форму, воспользовавшись следующим замечанием. Применяя тождество

$$\boldsymbol{F}_i=m_i\boldsymbol{a}_i+(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i),$$

можно любую активную силу разложить на две составляющие: $m_i\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i$. Первая из них, $m_i\boldsymbol{a}_i$, одна способна сообщить точке, если бы эта точка была свободной, то же самое движение, которое точка имеет при совместном действии силы $\boldsymbol{F}_i$ и связей. Поэтому вторая составляющая $\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i$ (геометрическая сумма активной силы и силы инерции) представляет собой ту часть силы $\boldsymbol{F}_i$, которая оказывается, в некотором смысле, потерянной благодаря действию связей. Таким образом, оказывается оправданным название *потерянных сил*, которое обычно дается силам $F_i - m_i a_i$. Благодаря этому предыдущий общий результат можно высказать в более сжатой форме:

При движении материальной системы с какими угодно связями потерянные силы вследствие связей, наложенных на систему, в любой момент уравновешиваются.

19. Принцип Даламбера. Результат, полученный в предыдущем пункте, в какой-либо из трех своих эквивалентных форм носит название *принципа Даламбера*[1]; название „принцип" находит свое оправдание в характере интуитивной очевидности, которой обладает это положение механики. С чисто математической стороны этот принцип, по сравнению с постулатами и общими теоремами, уже ранее установленными, не дает чего-либо нового, так как по существу он сводится к номинальному истолкованию основных уравнений (8). Но с теоретической точки зрения и для исследования механических задач принцип Даламбера представляет значительный интерес, поскольку он позволяет свести постановку какого угодно динамического вопроса к статическому вопросу. Составление уравнений движения материальной системы для какой-либо динамической задачи при помощи принципа Даламбера сводится к составлению уравнений равновесия соответствующей статической задачи.

В более определенной форме из этого принципа следует, что уравнения движения можно непосредственно получить из уравнений равновесия, если в них вместо всякой активной силы F_i (или составляющей такой силы) подставить потерянную силу $F_i - m_i a_i$ (или соответствующую составляющую).

Однако при этом следует всегда помнить, что все применения этого правила основаны на предположении, что состояние движения не изменяет поведения действующих сил и реакций связей.

20. Общее соотношение и общее уравнение динамики. С только что указанной точки зрения типичным является случай систем со

[1]) Ж. Даламбер (Jean Le Rond D'Alembert) родился в Париже в 1717 г., умер там же в 1783 г. После изучения медицины и юриспруденции посвятил себя исключительно математике и быстро достиг блестящих результатов. В 1742 г. был включен в состав Академии наук в Париже. Знаменитый принцип, носящий его имя, находится в его трактате по динамике, изданном в 1743 г. (Traité de Dynamique, Paris, 1743; русский перевод: Ж. Даламбер, Динамика, Москва, 1950), за которым последовал в 1744 г. Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides. Даламбер подготовил путь для развития небесной механики. В частности, он впервые рассмотрел уравнение в частных производных для решения задачи о колеблющейся струне. Мыслитель оригинальный и с большим кругозором, он написал Discours préliminaire и многочисленные статьи в Энциклопедии.

связями без трения, для которых на основании принципа виртуальных работ в его наиболее общей принятой нами форме (т. I, гл. XV, п. 2) сумма элементарных работ реакций R_i, *независимо от того, имеется ли равновесие или нет,* при всяком виртуальном перемещении положительна или равна нулю, т. е.

$$\delta\Lambda \equiv \sum_{i=1}^{N} R_i \cdot \delta P_i \geqslant 0. \qquad (9)$$

Имея это в виду, можно условия равновесия при отсутствии трения коротко написать в виде символического соотношения (т. I, гл. XV, п. 7)

$$\delta L \equiv \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i \leqslant 0.$$

Заменяя в этом выражении на основании принципа Даламбера активные силы F_i потерянными силами $F_i - m_i a_i$, мы непосредственно придем к определению движения системы при помощи соотношения

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i \leqslant 0. \qquad (10)$$

Это соотношение остается в силе для всех виртуальных и только виртуальных перемещений, которые можно сообщить точками при данной конфигурации системы.

В дальнейшем мы увидим всю важность этого соотношения. А пока заметим, что здесь оно получено как следствие из принципа Даламбера и общего соотношения статики (или принципа виртуальных скоростей в его первоначальной форме, данной Лагранжем).

Важно отметить, что если рассматривать уравнения (8) в форме

$$R_i = -(F_i - m_i a_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

(эти уравнения в сущности коротко выражают основной закон динамики точки и постулат о реакциях связей), то каждое из соотношений (9) и (10) будет непосредственным следствием другого.

Наконец, мы видим, что, допустив постулаты механики, коротко выражаемые уравнениями (8), мы будем иметь совершенную логическую эквивалентность между принципом виртуальных работ в его наиболее общей форме, с одной стороны, и совокупностью общего соотношения статики и принципа Даламбера — с другой.

Это заключение в случае систем со связями без трения объясняет и уточняет замечание, сделанное в общей форме в конце предыдущего пункта. Действительно, мы видим, что с математической стороны замена принципа виртуальных работ совокупностью общего соотношения статики и принципа Даламбера не дает никакого преимущества. Однако если принять во внимание, что вся аналитическая статика (для систем с идеальными связями) основывается на общем соотношении статики, то с точки зрения механики указанная выше замена соответствует разделению принципа виртуальных работ на две части, причем в общем соотношении выражена та часть его содержания, которая необходима и достаточна для развития статики, а принцип Даламбера позволяет рассматривать любую задачу динамики, как задачу статики.

Соотношение (10), поскольку оно характеризует в любой момент состояние движения всякой системы (со связями без трения) по отношению к прямо приложенным силам F_i и к соответствующим виртуальным перемещениям, носит название *общего соотношения динамики*, а когда речь идет о системе со связями только неосвобождающими или двусторонними (т. е. с обратимыми виртуальными перемещениями), оно заменяется соответствующим уравнением

$$\sum_{i=1}^{N}(F_i - m_i a_i)\cdot\delta P_i = 0, \tag{11}$$

которое по аналогии называется *общим уравнением динамики*.

21. Общее соотношение динамики установлено при явном предположении, что система находится исключительно под действием заданных активных сил F_i и заданных связей *без трения*, т. е. реакций, удовлетворяющих принципу виртуальных работ. Но может случиться (и это будет даже более общим случаем), что наряду с этими реакциями действуют другие (в виде пассивных сопротивлений или, в частности, трения, происходящего от шероховатых связей, и т. п.), которые не подчиняются принципу виртуальных работ. В этом предположении способ, посредством которого приходят к общему соотношению динамики, можно повторить с единственным изменением, что в числе сил, прямо приложенных к точке P_i, наряду с результирующей F_i активных сил в собственном смысле рассматривается и результирующая Φ_i указанных выше действий, которые не упоминаются в принципе виртуальных работ. Таким способом приходят к символическому соотношению

$$\sum_{i=1}^{N}(F_i + \Phi_i - m_i a_i)\cdot\delta P_i \leqslant 0, \tag{12}$$

которое нужно рассматривать как соотношение, сохраняющее свое значение для всех виртуальных и только для виртуальных перемещений, допускаемых системой со связями без трения.

Не следует забывать, что в общем случае силы Φ_i, по крайней мере некоторые из них, являются неизвестными, так как самое большее бывают известны только физические условия или механические приспособления, порождающие их; поэтому соотношение (12) далеко от того, чтобы обладать тем свойством краткости и вместе с тем определенности, которым отличается общее соотношение динамики (10) и которое, как это лучше будет видно в ближайших параграфах, составляет его выдающееся и отличительное достоинство. Однако в постановке механических задач даже и наиболее общее символическое соотношение (12) может иногда оказаться полезным; мы дадим один конкретный пример этого в п 53 настоящей главы.

§ 4. Непосредственные следствия из общего уравнения динамики

22. Системы, допускающие поступательные виртуальные перемещения. Рассмотрим материальную систему, не имеющую односторонних (освобождающих) связей, так что для нее при любых силах будет справедливо общее уравнение динамики (11)

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - ma_i) \cdot \delta P_i = 0.$$

Из этого уравнения, при некоторых довольно общих предположениях относительно виртуальных перемещений системы, вытекают очень важные следствия.

Предположим прежде всего, что система, исходя из какой-нибудь возможной для нее конфигурации (а следовательно, также и из таких, которые она действительно принимает во время движения), допускает *виртуальное поступательное перемещение* в некотором заданном направлении r. Обозначим через $\delta\tau$ общее значение N бесконечно малых векторов δP_i в этом виртуальном перемещении; подставляя $\delta\tau$ вместо δP_i в уравнение (11), будем иметь

$$\delta\tau \cdot \sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) = 0;$$

если раскроем скобки и положим

$$R^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} F_i, \quad Q = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i,$$

т. е. обозначим через $R^{(a)}$ результирующую всех активных и только активных сил, а через Q — количество движения системы (предыдущая глава, п. 12), то только что полученному уравнению можно придать вид

$$\frac{dQ}{dt} \cdot \delta\tau = R^{(a)} \cdot \delta\tau. \tag{13}$$

Деля обе части этого равенства на длину $\delta\tau$ и припоминая, что составляющая по какому-нибудь направлению (неподвижному относительно системы отсчета) производной от вектора равна производной от его составляющей в этом направлении, мы заключаем на основании уравнения (13), что

$$\frac{dQ_r}{dt} = R_r^{(a)},$$

т. е. при условии, что связи допускают виртуальное перемещение системы в направлении r, для системы оказывается справедливой *теорема о* (скалярном) *количестве движения по отношению только к активным силам* (вместо внешних сил, которые согласно первому основному уравнению (3) принимаются во внимание в этой теореме в общем случае).

Далее, если система во всякой своей конфигурации допускает в качестве виртуальных всевозможные поступательные перемещения (такой системой является, например, твердое тело), то уравнение (13) было бы справедливо при произвольном $\delta\tau$, и мы получаем

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^{(a)}, \tag{14}$$

т. е. для системы справедлива (векторная) *теорема о количестве движения по отношению к одним активным силам.* Естественно, вместе с ней будет справедлива также и аналогичная теорема о движении центра тяжести (п. 6)

$$m\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{R}^{(a)}.$$

23. Само собой разумеется, что для только что рассмотренной системы не перестает сохранять свое значение первое из основных уравнений (п. 5)

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)};$$

поэтому на основании уравнения (14) необходимо будем иметь

$$\boldsymbol{R}^{(e)} = \boldsymbol{R}^{(a)},$$

т. е. результирующая внешних сил совпадает для нашей системы с результирующей активных сил. Но так как результирующая внутренних сил равна нулю, то $\boldsymbol{R}^{(e)}$ дает результирующую всех сил, среди которых наряду с активными содержатся также и силы связей. Поэтому заключаем, что

Если материальная система с двусторонними (неосвобождающими) связями без трения в любой своей конфигурации допускает в качестве виртуальных перемещений всевозможные поступательные бесконечно малые перемещения, то реакции связей, возникающие в ней при действии каких угодно сил, имеют результирующую, постоянно равную нулю.

24. Системы, допускающие виртуальные вращательные перемещения. Предположим сначала, что система S (с двусторонними связями без трения) в любой ее конфигурации допускает виртуальное вращательное перемещение вокруг некоторой прямой r (относительно обычных осей $\Omega\xi\eta\zeta$). При этом виртуальном перемещении любая точка P_i испытывает перемещение вида

$$\delta P_i = \delta\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}_i,$$

где O обозначает точку на оси вращения r и $\delta\boldsymbol{\omega}$ — бесконечно малый вектор, параллельный r.

Если в общее уравнение динамики (11) вместо δP_i подставить его выражение и раскрыть скобки, принимая во внимание тождества (т. I, гл. I, п. 25)

$$m_i\boldsymbol{a}_i \cdot [\delta\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}_i] = \delta\boldsymbol{\omega} \cdot [\overrightarrow{OP}_i \times m_i\boldsymbol{a}_i],$$
$$\boldsymbol{F}_i \cdot [\delta\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}_i] = \delta\boldsymbol{\omega} \cdot [\overrightarrow{OP}_i \times \boldsymbol{F}_i],$$

то получим

$$\delta\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i\boldsymbol{a}_i = \delta\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times \boldsymbol{F}_i. \tag{15}$$

Если положить теперь

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{K}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}^{(a)},$$

т. е. если обозначить через $\boldsymbol{K}$ момент (относительно центра O) количеств движения системы (гл. IV, п. 11) и через $\boldsymbol{M}^{(a)}$ результирующий момент относительно того же центра *активных сил,* достаточно будет разделить обе части равенства (15) на длину вектора $\delta\boldsymbol{\omega}$ (имеющего направление r), чтобы заключить, что

$$\frac{dK_r}{dt} = M_r^{(a)}.$$

Таким образом, мы видим, что при сделанных предположениях для системы S справедлива *теорема о скалярном моменте количеств движения* (п. 10) *по отношению к одним активным силам.*

Если, далее, предположить, что неподвижная точка O есть *виртуальный полюс вращения,* т. е. что связи в любой момент допускают для системы какое угодно бесконечно малое вращение всей системы в целом вокруг точки O (как это имеет место, например, для твердого тела, закрепленного в точке O), то мы придем к заключению, что уравнение (15) должно остаться в силе, как бы ни выбирался вектор $\delta\omega$; это означает, что

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}^{(a)}. \tag{16}$$

Поэтому можно сказать, что *относительно виртуального полюса вращения сохраняет свою силу теорема о моменте* (векторном) *количеств движения для одних активных сил.*

Сравнивая этот результат со вторым основным уравнением в его форме (4′)

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}=\boldsymbol{M}^{(e)}$$

и рассуждая, как в предыдущем пункте, заключаем, что *если система с двусторонними* (неосвобождающими) *связями без трения допускает виртуальный полюс вращения, то реакции, возникающие в ней под действием каких-нибудь сил, имеют относительно этого полюса момент, постоянно равный нулю.*

25. Движение относительно центра тяжести. Рассмотрим снова материальную систему S из N точек P_i с двусторонними связями без трения и обозначим через $\delta^{(r)}P_i\,(i=1, 2, \ldots, N)$ какое-нибудь виртуальное перемещение системы S *относительно центра тяжести* G (т. е. относительно системы осей с началом в G и с неизменными по отношению к галилеевым осям направлениями) и через $\boldsymbol{a}_i^{(r)}$ ускорение относительно G точки P_i. Будем иметь

$$\delta P_i=\delta G+\delta^{(r)}P_i, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_G+\boldsymbol{a}_i^{(r)} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{18}$$

где δP_i, δG, $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{a}_G$ представляют собой абсолютные перемещения и ускорения. Подставляя прежде всего в общее уравнение динамики (11) вместо δP_i их выражения (17) и обозначая, как и в предыдущих пунктах, через $\boldsymbol{R}^{(a)}$ результирующую активных сил, через Q — количество движения (абсолютное) системы, получим

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot\delta^{(r)}P_i+\delta G\cdot\left(\boldsymbol{R}^{(a)}-\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}\right)=0. \tag{19}$$

Предположим теперь, что (как в п. 22) связи допускают для системы в любой момент произвольное виртуальное поступательное перемещение. Так как тогда для активных сил будет иметь место теорема о количестве движения, то второй член в левой части уравнения (19) будет тождественно равен нулю; если примем во внимание соотношение (18), то можно будет написать

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i^{(r)})\cdot\delta^{(r)}P_i-\boldsymbol{a}_G\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\delta^{(r)}P_i=0.$$

Но из тождества для центра тяжести G

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\overrightarrow{GP_i}=0$$

вследствие того, что виртуальное перемещение $\delta^{(r)}G$ точки G относительно нее самой тождественно равно нулю, вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \delta^{(r)} P_i = 0; \tag{20}$$

таким образом мы приходим к уравнению

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i^{(r)}) \cdot \delta^{(r)} P_i = 0, \tag{11'}$$

отличающемуся от общего уравнения динамики только подстановкой ускорений $a_i^{(r)}$ и перемещений $\delta^{(r)}P_i$ относительно центра тяжести вместо аналогичных абсолютных величин a_i и δP_i. Его можно назвать общим уравнением динамики, относящимся к центру тяжести; оно выражает, что *для всякой материальной системы с двусторонними связями без трения, которые в любой момент допускают поступательное виртуальное перемещение всей системы в каком угодно направлении, движение относительно центра тяжести следует тем же динамическим законам, которые имели бы место, если бы центр тяжести был неподвижен.*

Для иллюстрации этого результата представим себе прибор с двусторонними связями без трения, для которого допустимы всевозможные виртуальные поступательные перемещения. Пусть этот прибор помещен на каком-нибудь движущемся основании (поезде, корабле, аэроплане и т. п.). Когда движение основания является поступательным, даже неравномерным, то всякая система осей координат с началом в центре тяжести прибора, оси которой имеют неизменные направления в пространстве, будет сохранять неизменными направления осей также и относительно движущегося основания, так что можно сказать, что динамические законы, согласно которым действует прибор (относительно своего центра тяжести) внутри движущегося предмета, будут такими же, как если бы этот предмет был неподвижным.

Обращаясь к какой угодно материальной системе, предположим, что связи в любой момент допускают как поступательное перемещение в каком угодно направлении, так и произвольное виртуальное вращение около центра тяжести. В этом предположении для общего уравнения (11') динамики, относящегося к центру тяжести, допустимы все те рассуждения, которые имели место в предыдущем пункте по отношению к абсолютному движению, так что мы придем к уравнению

$$\frac{dK^{(r)}}{dt} = M^{(a)}, \tag{16'}$$

где $\boldsymbol{K}^{(r)}$ обозначает момент относительно центра тяжести количеств движения, относящихся к центру тяжести, и $\boldsymbol{M}^{(a)}$ есть аналогичный результирующий момент активных сил.

Если примем во внимание тождество $\boldsymbol{K}^{(r)}=\boldsymbol{K}$ (предыдущая глава, п. 13), то увидим, что уравнение (16′) есть не что иное, как распространение уравнения (16) предыдущего пункта на случай, когда центр приведения (и виртуальный полюс вращения) совпадает с центром тяжести (вместо того, чтобы быть неподвижным).

Сравнивая затем уравнение (16′) со вторым уравнением (4′) (отнесенным к центру тяжести) и припоминая еще тождество $\boldsymbol{K}^{(r)}=\boldsymbol{K}$, заключаем, что *если для какой-нибудь материальной системы связи, предполагаемые двусторонними и без трения, допускают произвольное перемещение (виртуальное) ее как неизменяемой системы, то реакции, которые возникают под действием каких угодно сил, имеют относительно центра тяжести результирующий момент, постоянно равный нулю.*

26. Системы, находящиеся под действием силы тяжести. В частном случае, когда активные силы сводятся к силе тяжести отдельных точек P_i и, следовательно, имеем $\boldsymbol{F}_i=m_i\boldsymbol{g}$ (где $\boldsymbol{g}$ есть обычное ускорение силы тяжести), из уравнения (20) предыдущего пункта получим

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta^{(r)}P_i=\boldsymbol{g}\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\delta^{(r)}P_i=0;$$

отсюда следует, что та часть элементарной работы в общем уравнении динамики (11′), относящемся к центру тяжести, которая представляет собой работу сил тяжести, равна нулю. Поэтому заключаем, что *для любой системы, находящейся под действием силы тяжести, движение относительно центра тяжести происходит так, как если бы силы веса не действовали.*

27. Общее уравнение динамики для твердого тела. Наконец, здесь полезно дать явный вид общего уравнения динамики для твердого тела с какими угодно связями и под действием каких угодно сил (лишь бы, разумеется, связи были двусторонними и без трения). Любое виртуальное перемещение твердого тела, если обозначим через δG и $\delta\boldsymbol{\omega}$ соответствующие характеристические векторы (бесконечно малые) относительно центра тяжести G (перемещение центра тяжести и поворот около центра тяжести), определится равенством

$$\delta P_i=\delta G+\delta\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{GP_i}\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N);$$

подставляя это выражение для δP_i в уравнение (11) и преобразовывая результат обычным образом, получим

$$\delta G \cdot \sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) + \delta\omega \cdot \sum_{i=1}^{N} [\overrightarrow{GP}_i \times F_i - \overrightarrow{GP}_i \times m_i a_i] = 0;$$

теперь достаточно ввести результирующую $R^{(a)}$ и результирующий момент $M^{(a)}$ относительно центра G активных сил и вспомнить известные выражения количества движения Q и момента количеств движения K относительно G, чтобы предыдущему уравнению придать искомый вид

$$\left(R^{(a)} - \frac{dQ}{dt}\right) \cdot \delta G + \left(M^{(a)} - \frac{dK}{dt}\right) \cdot \delta\omega = 0.$$

Эта формула часто применяется в динамике твердого тела (ср., например, гл. IX, п. 3).

28. Понятие об общей кинетостатике[1]). Можно, наконец, связать с общим уравнением динамики ряд задач, имеющих большое значение в технических приложениях; мы сделаем это в очень сжатом виде.

С самого начала (п. 2), разбивая силы, действующие на любую материальную систему, на *силы активные* (обычно задаваемые) и *реакции* (вообще говоря, неизвестные), мы указывали, как на одну из целей теоретической динамики, на систематическое исключение реакций. Но с точки зрения техники нередко бывает интересно определение как раз этих реакций, которые благодаря наличию данных связей действуют на рассматриваемую материальную систему в заданном состоянии движения (или, как предельный случай, в состоянии покоя). Изменяя направление этих реакций на обратное, найдем, в силу закона равенства действия и противодействия, *динамические давления* (или, в частности, статические) на тела, с помощью которых осуществляются связи; точная оценка максимальных давлений необходима для установления и исследования условий, при которых данное устройство может выполнить свое назначение без опасности разрушения. В последнее время эта область исследований получила название *кинетостатики*. Кинетостатические исследования приобретают особый интерес в связи с распространением механизмов с большими скоростями.

Обратимся здесь к системе из N материальных точек P_i, подчиненных заданным связям без трения (двусторонним и односторонним, геометрическим и кинематическим) и находящихся под действием заданных активных сил F_i ($i = 1, 2, \ldots, N$). В аналитической статике (т. I, гл. XV, пп. 36—40) мы уже видели, как на

[1]) Ср. Levi-Civita, Sulla cinetostatica, *Atti e Mem. della. R. Acc. di sc., lett. ed a. in Padova*, т. 18, 1902, стр. 145—150.

основе параметрического решения общего условия равновесия

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i \leqslant 0, \tag{21}$$

к которому мы приходим посредством введения множителей Лагранжа, оказывается возможным вычислить реакции $\boldsymbol{R}_i$, возникающие в различных точках системы, и, более того, различить в каждой из этих реакций составляющие, приходящиеся на каждую связь. Эти реакции или их составляющие после изменения направления на обратное дают аналогичные статические давления.

Теперь, чтобы перейти к динамическому случаю, достаточно заметить, что вместо соотношений $\boldsymbol{R}_i = -\boldsymbol{F}_i$, действительных при равновесии, здесь будут справедливы соотношения

$$\boldsymbol{R}_i = -(\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

эти соотношения можно получить, применяя принцип Даламбера. Таким образом, мы видим, что к вычислению реакций и, следовательно, динамических давлений мы придем, подставляя всюду в только что упомянутых выкладках аналитической статики вместо активных сил $\boldsymbol{F}_i$ соответствующие потерянные силы $\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i$; другими словами, нам надо только разрешить путем введения множителей Лагранжа, вместо условия (21), общее соотношение динамики

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i) \cdot \delta P_i \leqslant 0.$$

Таким образом, применяя методы, аналогичные методам статики, можно определить не только динамические давления, действующие на различные точки P_i, но в каждой из них различить частичные давления, происходящие от отдельных связей. Более того, вследствие линейной природы задачи a priori очевидно, что всякое давление (полное или частичное) формально должно быть представлено в виде суммы двух слагаемых: одно из этих слагаемых, которое происходит прямо от активной силы $\boldsymbol{F}_i$, можно назвать статическим, другое слагаемое представляет собой собственно динамическое давление, зависящее от соответствующей силы инерции $-m_i \boldsymbol{a}_i$.

Не задерживаясь на этом, отметим одно существенное обстоятельство. Только что указанный способ для вычисления давлений предполагает знание движения системы; а мы хорошо знаем a priori, что определение этого движения зависит (как это уже отмечалось в пп. 1, 2 и еще лучше будет разъяснено в дальнейшем) от интегрирования дифференциальных уравнений и составляет как раз основную и более трудную задачу динамики. Все же указанная выше постановка задачи кинетостатики имеет интерес, несмотря на то, что для решения ее надо знать движение системы. Во многих конкретных случаях, интересных с технической точки зрения, движение системы заранее бывает задано, поскольку оно должно удовлетворять заранее поставленным целям. Это станет более ясным при разборе типичного примера из кинетостатики неизменяемых систем, который мы будем рассматривать в п. 7 гл. VII.

§ 5. Уравнение и интеграл живых сил

29. Теорема живых сил. Прежде чем выводить другие следствия из общего уравнения динамики, удобно установить здесь еще одну общую теорему о движении системы, формулировка которой не зависит от подразделения сил на внешние и внутренние или активные и реакции связей.

Обозначим поэтому через $\boldsymbol{F}_i$ *полную силу*, действующую на любую точку P_i $(i=1, 2, \ldots, N)$ движущейся системы, т. е. равнодействующую всех сил (внутренних и внешних, активных и реакций), действующих на эту точку. Мы знаем уже, что во время движения системы приращение, получаемое в любой элемент времени живой силой точки P_i, равно работе, совершенной силой $\boldsymbol{F}_i$ за тот же самый элементарный промежуток времени (т. I, гл. VIII, п. 9); положив

$$T_i=\frac{m_i v_i^2}{2}, \quad dL_i=\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{v}_i dt \qquad (i=1, 2, \ldots, N),$$

будем иметь в любой элемент времени в течение движения

$$dT_i=dL_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N).$$

Суммируя почленно эти N уравнений, получим

$$dT=dL, \tag{22}$$

где через T обозначена живая сила системы (предыдущая глава, п. 6) и через dL — полная элементарная работа всех сил системы за рассматриваемый элемент времени dt (там же, п. 2), т. е.

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2, \qquad dL=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{v}_i dt.$$

Мы получили таким образом теорему живых сил в дифференциальной форме: *во время движения материальной системы с какими угодно связями и под действием каких угодно сил приращение, которое получает живая сила системы за какой-нибудь элемент времени, равно полной работе, совершаемой за тот же самый элемент времени всеми силами, действующими на систему* (внешними и внутренними, активными и реакциями).

Теперь обратим внимание на следующее: в виде основной предпосылки наших механических взглядов все причины, влияющие на движение какой угодно материальной системы, схематически рассматриваются нами как некоторые силы, и, следовательно, всякая форма энергии, которая участвует в движении, рассматривается схематически в виде сообщаемой системе работы, совершаемой силами. Поэтому если, в частности, речь идет об элементе времени dt, то полная элементарная работа dL, так же как и в случае одной материальной точки (т. I, гл. VIII, п. 9), представится как полное приращение энергии, сообщаемое системе обстоятельствами, определяющими ее движение. Уравнение (22) представляет, следовательно, в типичной механической форме основной *физический принцип сохранения энергии*. Оно выражает, что вся энергия, сообщаемая в любой элемент времени системе теми весьма разнообразными обстоятельствами, которые каким бы то ни было образом влияют на ее движение, обнаруживается полностью в той же системе в форме приращения dT ее кинетической энергии.

30. Теорема живых сил, вследствие ее большой общности, находит в механике чрезвычайно разнообразные применения.

Необходимо, однако, отметить, что теорема живых сил в ее общей форме (22) не всегда может быть использована, поскольку она включает в себя выражение элементарной работы, выполняемой (вместе с другими силами) и неизвестными реакциями. Поэтому теорема эта имеет большое значение и оказывается более полезной в тех случаях, когда благодаря каким-нибудь предположениям о природе системы или о свойствах действующих сил удается упростить выражение элементарной работы само по себе и уточнить это выражение с механической точки зрения.

Чтобы дать два примера, в некотором роде типичных, рассмотрим сначала случай *твердого тела*. В этом предположении за любой элемент времени работа внутренних сил (предыдущая глава, п. 3) будет равна нулю, так что уравнение (22) приведется к виду

$$dT = dL^{(e)}, \tag{22'}$$

где $dL^{(e)}$ обозначает полную элементарную работу всех внешних сил, т. е. имеем: *при движении твердого тела с какими угодно связями и под действием каких угодно сил за любой элемент времени приращение живой силы твердого тела равно элементарной работе, одновременно выполняемой всеми внешними силами.*

Другой пример, с некоторой точки зрения более общий, мы имеем, когда речь идет о материальной системе со связями, независящими от времени, без трения и двусторонними. В силу первого предположения всякое из элементарных перемещений, которые испытывает система во время ее движения, является виртуальным перемещением (т. I, гл. VI, п. 13), так что благодаря второму предположению к каждому из этих элементарных перемещений можно применить ***принцип виртуальных работ*** (т. I, гл. XV, п. 2); принимая во внимание третье предположение, заключаем, что за любой элемент времени элементарная работа реакций будет тождественно равна нулю. Поэтому уравнение (22) принимает вид

$$dT = dL^{(a)}, \tag{22''}$$

где $dL^{(a)}$ обозначает элементарную работу всех активных сил, т. е. ***если система со связями, не зависящими от времени, двусторонними и без трения движется под действием каких-либо сил, то приращение, получаемое за любой элемент времени живой силой системы, равно элементарной работе, совершаемой за то же самое время всеми активными силами.***

Далее, если предполагается, что связи системы двусторонние, без трения и не зависят от времени и что, кроме того, они допускают бесконечно малые поступательные перемещения всей системы в целом в каком-нибудь направлении (п. 25), то будет иметь место теорема живых сил для движения относительно центра тяжести, т. е. будет существовать уравнение

$$dT^{(r)} = dL^{(r)},$$

где $dT^{(r)}$ есть приращение, получаемое в течение любого элемента времени живой силой системы в ее движении относительно центра тяжести, $dL^{(r)}$ — полная работа, выполняемая активными силами в течение того же элемента времени благодаря перемещениям *относительно* центра тяжести.

31. Консервативные силы. Потенциал. Для того чтобы подготовить другие выводы из теоремы живых сил, нужно сделать некоторые дальнейшие пояснения понятия о *консервативных силах*, введенного в статике (т. I, гл. XV, п. 28). Для системы из N материальных точек P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *консервативными* называются такие силы F_i, выражение для полной работы которых на каком угодно элементарном перемещении dP_i системы равно полному дифференциалу функции U от $3N$ декартовых координат ξ_i, η_i, ζ_i точек P_i; при этом функция U предполагается, как обычно, однозначной и правильной в рассматриваемом поле [1]).

Для избежания недоразумений отметим, что здесь, говоря о *каком угодно* элементарном перемещении, мы подразумеваем перемещения безусловно произвольные, и, следовательно, для системы

[1]) Иногда может случиться, что поле, в котором рассматриваются действующие силы, выходит за те пределы, в которых функция U остается однозначной и правильной. Для одной материальной точки мы рассмотрели соответствующий пример в т. I (гл. VII, п. 29, г.). В дальнейшем изложении этого тома мы не будем встречаться с такими вопросами, в которых может представиться это обстоятельство.

со связями даже такие, при которых не принимаются во внимание связи (т. е. ни виртуальные, ни возможные для системы).

Функция U, определяемая с точностью до аддитивной произвольной постоянной из равенства

$$dL = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot dP_i = dU, \tag{23}$$

называется *потенциалом* сил, которые в свою очередь являются *производными* от потенциала U.

Из равенства (23), которое в развернутой форме принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i\, d\xi_i + Y_i\, d\eta_i + Z_i\, d\zeta_i) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} d\eta_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} d\zeta_i\right),$$

приравнивая в обеих частях коэффициенты при составляющих (произвольных и не зависимых друг от друга) $d\xi_i$, $d\eta_i$, $d\zeta_i$ перемещений dP_i, получаем соотношения

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Если система, на которую действуют силы, является голономной, определяемой в лагранжевых независимых координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$ уравнениями

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

то из этих уравнений или, лучше, из эквивалентных им уравнений

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t), \\ \eta_i &= \eta_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t), \qquad (i = 1, 2, \ldots N) \\ \zeta_i &= \zeta_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \end{aligned}$$

можно видеть, что потенциал U, вообще говоря, зависит не только от q, но также и от t, поэтому *если связи системы не зависят от времени, то потенциал зависит исключительно от лагранжевых координат.*

Для последующего важно вспомнить, что как в том, так и в другом случае *производные от потенциала*, т. е. $\frac{\partial U}{\partial q_n}$, *дают составляющие действующих сил по лагранжевым координатам* q_h, *т. е. количества*

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Это вытекает непосредственно из самого определения консервативных сил, которое для виртуального перемещения дает тождество

$$\delta L = \delta U,$$

где δU обозначает полный дифференциал от потенциала, вычисляемый при постоянном значении t, если U зависит явно от t; приравнивая в обеих частях коэффициенты при отдельных δq_h (произвольных и независимых), мы получим для составляющих Q_h выражения

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Из тождества (23), характерного для консервативных сил, как и в случае одной точки, находящейся под действием таких сил (т. I, гл. VIII, п. 6), мы получим после интегрирования

$$L = U - U_0,$$

т. е. *как бы ни двигалась материальная система от одной своей конфигурации к другой, работа, совершаемая консервативными силами, равна разности значений соответствующего потенциала в начальной и конечной конфигурациях.*

32. Чтобы дать простой пример консервативной силы, рассмотрим действие силы тяжести на систему из N материальных точек P_i с массами m_i, отнесенную к осям, связанным с Землей. В этом случае, если за ось ζ выбирается направленная вниз вертикаль, для силы веса, действующей на любую точку P_i, мы будем иметь составляющие

$$X_i = 0, \; Y_i = 0, \; Z_i = m_i g \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

откуда видно, что потенциал определяется (с точностью до аддитивной произвольной постоянной) равенством

$$U = g \sum_{i=1}^{N} m_i \zeta_i,$$

или, еще проще, если ζ_0 есть высота центра тяжести и m — полная масса системы, равенством

$$U = mg\zeta_0.$$

Он совпадает, следовательно, с потенциалом силы тяжести, приложенной в центре тяжести, как если бы в нем была сосредоточена вся масса системы.

Другим, более общим примером консервативных сил являются ньютонианские силы взаимного притяжения между материальными точками или элементами массы.

Сосредоточим внимание на задаче $n+1$ тел, обращаясь к п. 22 гл. III. Если обозначим через Δ_{ij} расстояние между двумя любыми точками P_i, P_j $(i, j = 0, 1, 2, \ldots, n)$, то, как известно (т. I, гл. XI, п. 4), выражение

$$\frac{f m_i m_j}{\Delta_{ij}}$$

представляет собой потенциал как силы $m_i m_j \boldsymbol{A}_{ij}$ (если P_i рассматривается как притягиваемая точка), с которой P_j действует на P_i, так и силы (прямо противоположной) $m_i m_j \boldsymbol{A}_{ji}$ (если, наоборот, P_j рассматривается как притягиваемая точка), которую P_j испытывает со стороны P_i. Отсюда следует (ср. формулу (46) гл. III), что полное действие, испытываемое точкой P_i системы, является производным от потенциала

$$U_i = f m_i \sum_{j=0}^{n}{}^{(i)} \frac{m_j}{\Delta_{ij}}.$$

Рассмотрим теперь функцию (всех взаимных расстояний точек)

$$U = f \mathop{\mathbf{S}}_{0}^{n}{}_{hj} \frac{m_h m_j}{\Delta_{ij}},$$

где $\mathop{\mathbf{S}}_{0}^{n}{}_{hj}$ обозначает сумму, распространенную на все сочетания без повторений индексов h, j, которым приписываются все значения от 0 до n.

Функция U содержит все члены, входящие в функцию U_j, а также (при $n > 1$) многие другие, не зависящие от координат точки P_j. Поэтому можно, если угодно, рассматривать U вместо U_i как выражение потенциала силы $\boldsymbol{F}_i$, действующей на точку P_i. Так как функция U в отличие от U_i симметрично зависит от всех $n+1$ точек, то, составляя от нее полный дифференциал, будем иметь

$$dU = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot dP_i,$$

т. е. как раз равенство (23) для интересующего нас здесь случая.

Таким образом, взаимные ньютонианские притяжения скольких угодно тел $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ образуют консервативное силовое поле, потенциал которого определяется предыдущим выражением функции U.

33. Интеграл живых сил. После этого отступления вернемся к теореме живых сил (пп. 29, 30) и рассмотрим снова основной для механики случай материальной системы S со связями, не зависящими от времени, двусторонними и без трения. Если активные силы, действию которых она подвергается, являются производными от потенциала U, то теорема живых сил (22″) принимает вид

$$dT = dU, \tag{24}$$

совершенно аналогичный тому, который имел место для одной свободной материальной точки, находящейся под действием консервативной силы (т. I, гл. VIII, п. 11); после интегрирования получим конечное соотношение

$$T - U = E, \tag{25}$$

где E обозначает постоянную интегрирования. Это соотношение, связывающее в любой момент состояние движения системы с ее конфигурацией, как и в случае одной материальной точки, также носит название *интеграла живых сил*.

Уравнение (24) или эквивалентное ему (25) допускает энергетическое истолкование, данное в общем случае уравнению (22) в п. 29. Это истолкование, как и в случае одной материальной точки, можно выразить здесь в более специальной, особенно замечательной по своему внутреннему содержанию форме. Если количество $-U$, зависящее исключительно от конфигурации системы, рассматривается как форма энергии (потенциальной), которой обладает система в зависимости от своего положения, то уравнение (24) или эквивалентное ему уравнение (25) выражает, что при движении сумма $T - U$ кинетической и потенциальной энергии системы не изменяется. Следовательно, имеет место принцип сохранения энергии в наиболее узком смысле, поскольку материальная система рассматривается изолированной от всего остального мира и обладает только двумя основными формами механической энергии (кинетической и потенциальной энергией или энергией положения), которые в течение движения могут только преобразовываться одна в другую, причем исключается возможность возникновения новой или исчезновения наличной энергии. По этой причине соотношение (25) называется также *интегралом энергии*.

34. Внутренняя энергия. Уравнение (22) живых сил приводит к заключениям, аналогичным заключениям предыдущего пункта, но более полным и общим, если только часть действующих на материальную систему сил будет иметь потенциал. Обозначая через $-\Omega$ этот потенциал, можно написать уравнение (22) в этом случае в виде

$$dT + d\Omega = dL', \tag{26}$$

где dL' обозначает полную элементарную работу тех сил, которые действуют на систему вместе с консервативными.

Уравнение (26) становится наиболее интересным, когда силы, являющиеся производными от потенциала $-\Omega$, будут все внутренними. В этом предположении количество Ω, зависящее только от конфигурации системы, называется *внутренней энергией*; материальные системы, для которых, каковы бы ни были активные действующие силы, внутренние силы являются производными от потенциала, называются *консервативными системами*.

Типичными примерами консервативных систем являются *абсолютно упругие тела* и *идеальные газы* или сжимаемые жидкости, если отвлечься от вязкости и других диссипативных сил (гл. I, § 5). Как доказывается в механике деформируемых тел, внутренние силы, действующие в упругом теле при всякой деформации и в идеальном газе при всяком изменении объема, являются в их совокупности производными от потенциала.

Для идеальных жидкостей, т. е. для жидкостей, строго несжимаемых и без внутреннего трения, внутренняя энергия рассматривается как величина постоянная (в частности, если угодно, равная нулю), потому что молекулярные силы, обеспечивающие несжимаемость, имеют характер реакций, происходящих от связей, и, следовательно, при всяком бесконечно малом (виртуальном) перемещении, совместимом с несжимаемостью, совершают полную работу, равную нулю, а это означает, что речь идет о силах, являющихся производными от постоянного (или просто равного нулю) потенциала.

§ 6. Уравнения Лагранжа

35. Первая форма уравнений Лагранжа. Попытаемся теперь составить уравнения движения материальной системы со связями и предположим, что речь идет о голономной системе, состоящей из N точек P_i и имеющей l независимых связей (без трения)

$$f_k(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \ldots, \zeta_N | t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l), \tag{27}$$

где ξ_i, η_i, ζ_i обозначают координаты любой точки P_i в галилеевой системе координат $\Omega\xi\eta\zeta$. Отсюда следует, что число степеней свободы системы равно $3N - l$.

Вводя наряду с заданными активными силами $\boldsymbol{F}_i$ неизвестные реакции $\boldsymbol{R}_i$, составляющие которых обозначим через Ξ_i, H_i, Z_i, мы придем к N векторным уравнениям (8)

$$m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

или к эквивалентным им скалярным уравнениям

$$m_i\ddot{\xi}_i = X_i + \Xi_i, \quad m_i\ddot{\eta}_i = Y_i + \mathrm{H}_i, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = Z_i + \mathrm{Z}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Если присоединить эти последние уравнения к уравнениям (27), то получим только $3N + l$ уравнений, а неизвестных (координат точек системы и составляющих реакций) будет $6N$, так что для того, чтобы сделать задачу определенной, необходимо иметь еще $3N - l$ уравнений, т. е. ровно столько, каково число степеней свободы системы.

Можно было бы убедиться, что $3N - l$ недостающих уравнений даст нам принцип виртуальных работ, т. е. уравнение

$$\delta\Lambda = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta P_i = 0, \tag{28}$$

имеющее место при всех виртуальных перемещениях системы. Но мы быстрее придадим поставленной задаче определенную форму и в то же время получим то преимущество, что приведем ее к $3N+l$ неизвестным, если вместо уравнений (8) и (28) будем исходить из основного уравнения динамики (11)

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot\delta P_i = 0$$

и применять результаты, полученные в аналитической статике (т. I, гл. XV, § 7).

Начнем с замечания, что виртуальные перемещения δP_i системы определяются своими составляющими $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$ из l уравнений

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_k}{\partial\xi_i}\delta\xi_i+\frac{\partial f_k}{\partial\eta_i}\delta\eta_i+\frac{\partial f_k}{\partial\zeta_i}\delta\zeta_i\right)=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ l),$$

которые, конечно, независимы, поскольку таковыми являются по предположению уравнения связей (27), а потому якобиева матрица от функций f_k для любых значений ξ_i, η_i, ζ_i имеет ранг l. Чтобы не расходиться с обозначениями, применявшимися в аналитической статике, придадим этим l уравнениям следующий более сжатый вид:

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{a}_{ki}\cdot\delta P_i = 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ l), \tag{29}$$

где через $\boldsymbol{a}_{ki}$ обозначен вектор с составляющими

$$\frac{\partial f_k}{\partial\xi_i},\ \frac{\partial f_k}{\partial\eta_i},\ \frac{\partial f_k}{\partial\zeta_i} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ l; \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{30}$$

Теперь остается выразить, что потерянные силы $\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i$ должны быть такими, чтобы выполнялось в любой момент равенство (11) для всех виртуальных перемещений, определяемых из уравнений (29). Но это как раз и является задачей, разрешенной нами в аналитической статике, с той только разницей, что вместо сил $\boldsymbol{F}_i$, рассматривавшихся там, здесь входят потерянные силы и что, кроме того, здесь нет односторонних связей, допущенных там для общности. Принимая во внимание, что в настоящем случае число уравнений (29) (двусторонних) связей меньше чем $3N$ и что они независимы между собой, мы непосредственно можем приложить результат п. 33 гл. XV т. I (при $\mu_i=0$) и заключить, что должны иметь место равенства

$$m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_{k=1}^{l}\lambda_k\boldsymbol{a}_{ki} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{31}$$

где λ_k (множители Лагранжа) представляют собой вспомогательные неизвестные; здесь мы принимаем эти множители со знаком, противоположным тому, который был принят в статике.

Эти векторные уравнения (31) после проектирования на оси дадут, если принять во внимание составляющие (30) векторов $\boldsymbol{a}_{ki}$, $3N$ скалярных уравнений

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\xi}_i &= X_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial \xi_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial \xi_i} + \ldots + \lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \xi_i}, \\ m_i\ddot{\eta}_i &= Y_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial \eta_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial \eta_i} + \ldots + \lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \eta_i}, \\ m_i\ddot{\zeta}_i &= Z_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial \zeta_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial \zeta_i} + \ldots + \lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \zeta_i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad (31')$$

которые вместе с уравнениями (27) образуют систему из $3N+l$ уравнений со столькими же неизвестными ξ_i, η_i, ζ_i и λ_k. При помощи этих уравнений можно определить все возможные движения рассматриваемой голономной системы.

Уравнения (31') обычно называются *уравнениями Лагранжа* в первой форме. Они дают естественное обобщение уравнений движения одной точки, удерживаемой на гладкой поверхности (гл. II, п. 42), и замечательны с различных точек зрения. В частности, для отдельных множителей λ_k имеет место истолкование, аналогичное истолкованию, указанному в статике (т. I, гл. XV, п. 36).

Нужно, однако, заметить, что уравнения (31') представляют то неудобство, что вводят слишком большое число лишних неизвестных. Так как конфигурации голономной системы зависят от некоторого числа параметров, равного соответствующему числу степеней свободы (в нашем случае от $3N-l$ параметров), то естественно ожидать, что движение голономной системы возможно определить посредством системы дифференциальных уравнений, заключающей в себе ровно столько неизвестных, каково соответствующее число степеней свободы. Это мы и сделаем в ближайших пунктах.

36. Дифференциальные уравнения движения голономной системы в лагранжевых координатах. Вместо координат ξ_i, η_i, ζ_i предыдущих пунктов, число которых превосходит число степеней свободы, отнесем нашу голономную систему S к n каким-нибудь независимым лагранжевым координатам q_1, q_2, ..., q_n, где n, как мы знаем, означает число степеней свободы системы, и пусть

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n|t) = P_i(q|t) \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \qquad (32)$$

Дифференцируя уравнения (32) по времени, мы получим для скоростей $\boldsymbol{v}_i$ отдельных точек P_i следующие выражения:

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad (33)$$

тогда как для виртуальных перемещений системы получатся выражения

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{34}$$

где n лагранжевых составляющих δq виртуального перемещения произвольны.

Возьмем теперь снова общее уравнение динамики (11)

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i) \cdot \delta P_i = 0,$$

которое определяет движение системы, поскольку оно справедливо для всех виртуальных перемещений (34), и напишем его в виде

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i. \tag{35}$$

В этом уравнении отделены друг от друга члены кинетической природы и члены динамические в более узком смысле, происходящие от активных сил. Значение правой части нам хорошо известно, так как она представляет собой полную работу δL, совершаемую активными силами при любом виртуальном перемещении δP_i системы (гл. IV, п. 5 и п. 31 этой главы), поэтому мы имеем тождественно

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h, \tag{36}$$

где

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots n) \tag{37}$$

есть *составляющая активных сил по лагранжевой координате* q_h*).

Что же касается левой части равенства (35), то на основании соотношений (34) ее можно написать в виде

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h,$$

*) В русской литературе принято называть величины Q_h обобщенными силами. (*Прим. ред.*)

и достаточно изменить порядок суммирований и положить

$$\tau_h = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

чтобы тождественно иметь

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h. \tag{39}$$

На основании двух тождеств (36), (39) общее уравнение динамики (35) принимает вид

$$\sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h,$$

а так как это соотношение должно сохранять свое значение при любом выборе δq_h, то мы находим, что должны быть справедливы равенства

$$\tau_h = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{40}$$

Обратно, всякий раз, когда будут совместно удовлетворяться уравнения (40), будет справедливо и уравнение (35) при любом выборе δq_h, а следовательно, в силу тождеств (36), (39), и уравнение (11) для всех виртуальных перемещений (34). Таким образом мы заключаем, что для нашей голономной системы n уравнений (40) равносильны общему уравнению динамики, и поэтому они достаточны для определения движения.

Теперь легко проверить, что они образуют систему из n дифференциальных (независимых) уравнений второго порядка от n неизвестных функций q_h переменной t, приводимую к ***нормальному виду***, т. е. разрешимую относительно вторых производных. Действительно, заметим, что Q_h, как это вытекает из их выражений (37), наравне с $\boldsymbol{F}_i$, представляют собой известные функции от параметров, определяющих в любой момент конфигурацию системы, скоростей отдельных точек и, возможно, времени, т. е. функции от q, $\dot{q}$ и t. Что же касается выражений для τ_h, определяемых равенствами (38), то следует обратить внимание, что, в то время как векторы $\partial P_i/\partial q_h$ зависят исключительно от q (и, возможно, от t), ускорения $\boldsymbol{a}_i$, которые получаются последовательным дифференцированием равенств (33), представляют собой известные функции от q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ (и, возможно, t), линейные относительно лагранжевых ускорений $\ddot{q}$.

Если, далее, примем во внимание, что в выражениях для a_i члены, зависящие от $\ddot{q}$, имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \ddot{q}_k,$$

то заметим, что в любом из уравнений (40) коэффициент при $\ddot{q}_k$ равен

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \qquad (h,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Эта сумма скалярных произведений представляет собой, как мы это видели в п. 11 предыдущей главы, коэффициенты a_{hk} при $\dot{q}_h\dot{q}_k$ в выражении через лагранжевы координаты живой силы T, если связи не зависят от времени, или ее квадратичной части T_2, если связи зависят от времени. Там было доказано, что как в том, так и в другом случае определитель $\|a_{hk}\|$ не может тождественно равняться нулю. Отсюда именно и следует, что n дифференциальных уравнений второго порядка (40) всегда разрешимы относительно n лагранжевых ускорений $\ddot{q}$.

Следовательно, речь идет о системе дифференциальных уравнений, общий интеграл которых зависит от $2n$ произвольных постоянных. Каждый из ∞^{2n} частных интегралов дает в лагранжевых координатах закон (т. I, гл. VI, п. 3)

$$q_h = q_h(t)$$

какого-нибудь частного движения нашей голономной системы S при заданных силах. При данных условиях для системы S невозможны какие-нибудь другие движения помимо тех, которые представлены таким образом, так как уравнения (40), как это было отмечено с самого начала, *определяют*, наравне с общим уравнением, следствием которого они являются, все движения, возможные для системы.

Чтобы определить одно из этих движений, достаточно произвольно задать значения q^0, $\dot{q}^0$ величин q и $\dot{q}$ в определенный момент времени, например в момент $t=t_0$, что равносильно указанию начальной конфигурации системы и начальных скоростей $\boldsymbol{v}^0$ отдельных ее точек; декартовы координаты ξ^0, η^0, ζ^0 этой конфигурации получатся из уравнений (32) или, иначе, из эквивалентных им уравнений

$$\xi_i = \xi_i(q|t), \quad \eta_i = \eta_i(q|t), \quad \zeta_i = \zeta_i(q|t) \qquad (32')$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

если положить в них $t=t_0$, $q_h=q_h^0$, а $\boldsymbol{v}^0$ получится из уравнений (33), если положить в них $t=t_0$, $q_h=q_h^0$, $\dot{q}_k=\dot{q}_k^0$. Можно и прямо задать произвольные начальные значения ξ^0, η^0, ζ^0 и v_0 при следующих условиях: 1) величины ξ^0, η^0, ζ^0 представляют собою декартовы координаты одной из ∞^n возможных конфигураций для голономной системы в момент времени $t=t_0$, в силу чего уравнения (32'), если подставить в левые части их эти значения ξ^0, η^0, ζ^0, определят однозначно соответствующие значения q^0 лагранжевых координат; 2) величины v^0 соответствуют одному из ∞^n бесконечно малых возможных перемещений системы за произвольный элемент времени dt, начиная от момента $t=t_0$ и от только что определенной конфигурации $q=q^0$. Соответствующие лагранжевы начальные скорости $\dot{q}^0$ определятся из уравнений (33), в которые вместо v и q должны быть соответственно подставлены v^0 и q^0.

Из предыдущего ясно, что посредством уравнений (40) достигнута цель, указанная в конце предыдущего пункта, т. е. задача об определении движения голономной системы сведена к интегрированию системы дифференциальных уравнений (второго порядка) с *наименьшим возможным числом неизвестных* функций (число степеней свободы системы).

С помощью чрезвычайно простого преобразования и гениального механического истолкования, принадлежащих Лагранжу, можно представить уравнения (40) в очень сжатой и выразительной форме.

37. Вторая форма уравнений Лагранжа. Возьмем снова уравнения (40)

$$\tau_h = Q_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\tau_h = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

и живую силу системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot v_i,$$

которая, если ее рассматривать как сложную функцию от q, $\dot{q}$, t, выраженную через посредство функций

$$v_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{33}$$

и взять от нее частную производную по любому $\dot{q}_h$, дает

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h}; \tag{41}$$

если же мы возьмем от нее частную производную по любому q_h, то получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}=\sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h}.$$

Но из соотношений (33) следует, что

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h}=\frac{\partial P_i}{\partial q_h},$$

так что можно написать

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}=\sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h};$$

отсюда, беря полную производную по времени и замечая, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}=\frac{\partial}{\partial q_h}\frac{dP_i}{dt}=\frac{\partial v_i}{\partial q_h},$$

получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}=\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h}+\sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_h} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

после чего, вычитая из этих тождеств почленно соответствующие тождества (41) и принимая во внимание соотношения (38), придем к тождествам

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}=\tau_h \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (42)$$

Прежде чем воспользоваться этими тождествами для целей, которые мы имеем в виду, заметим, что формальные выводы, путем которых мы к ним пришли, фактически не зависят от предположения, что лагранжевы координаты q независимы, и остаются в силе даже тогда, когда число этих координат больше числа степеней свободы, как это имеет место, когда координаты должны удовлетворять уравнениям кинематических связей.

На основании тождеств (42) мы можем придать уравнениям (40) явный вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}=Q_h \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n); \qquad (43)$$

уравнения (43) и представляют собой *вторую форму уравнений Лагранжа*. Заметим, что когда в механике говорят об „уравнениях Лагранжа", то обычно имеют в виду уравнения (43). Прибавим еще, что в дальнейшем иногда будет удобнее называть левые части уравнений (43), тождественные выражениям τ_h, „лагранжевыми биномами" (относящимися к системе с живой силой T)*).

---

*) „Лагранжевы биномы", взятые с обратным знаком, представляют обобщенные силы инерции. *(Прим. ред.)*

Все, что в предыдущем пункте было сказано об уравнениях (40), остается, естественно, в силе и для этих уравнений Лагранжа, которые представляют собой не что иное, как те же уравнения (40), только написанные в ином виде. Они дают полную постановку задачи о движении голономной системы, а с аналитической точки зрения образуют систему дифференциальных уравнений второго порядка от n неизвестных функций $q_h(t)$, приводимую к нормальному виду.

Может быть, не бесполезно доказать здесь снова прямым путем это последнее обстоятельство, т. е. разрешимость n уравнений (43) относительно n лагранжевых ускорений $\ddot{q}$. С этой целью заметим, что даже при более общем предположении, что связи зависят от времени, составляющие Q_h действующих сил и живая сила T являются функциями исключительно от q, $\dot{q}$ и от t, так что $\ddot{q}$ входят только в члены

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}.$$

С другой стороны, операция $\frac{d}{dt}$, поскольку она прилагается к функциям от q, $\dot{q}$ и t, явно может быть представлена в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\sum_{k=1}^{n}\ddot{q}_k\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k};$$

поэтому в любом из уравнений (43) вторые производные $\ddot{q}$ войдут только в члены, линейные относительно этих производных

$$\sum_{k=1}^{n}\ddot{q}_k\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}.$$

Вспомним теперь (гл. IV, п. 11), что если связи зависят от времени, то можно положить

$$T=T_0+T_1+T_2,$$

где T_0 не зависит от $\dot{q}$, T_1 однородна и линейна относительно $\dot{q}$ и

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{hk=1}^{n}a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k; \tag{44}$$

если же связи не зависят от t, то живая сила сведется к своей квадратичной части (44). Таким образом, мы видим, что в любом случае

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}=a_{hk}, \tag{45}$$

а так как определитель $\|a_{hk}\|$ не может исчезать тождественно (гл. IV, п. 11), то заключаем, как и в предыдущем пункте, что уравнения Лагранжа разрешимы относительно n ускорений $\ddot{q}$.

38. В силу того, что изложено выше, уравнения (43) представляют собой не что иное, как преобразованную форму уравнений (40). Однако, если это и верно с аналитической стороны, особая ценность уравнений Лагранжа с теоретической точки зрения заключается в том, что в окончательном синтезе они разделяют механические элементы, определяющие движение. Именно, все, что зависит от активных сил, объединяется в лагранжевых компонентах (обобщенных силах) Q_h, а все, относящееся к материальной структуре системы, синтезируется в одной величине T, т. е. в живой силе.

Отсюда следует, что две материальные системы совершенно различной материальной структуры с точки зрения аналитического представления движения динамически эквивалентны, т. е. при подходящих силах имеют одни и те же уравнения движения, если только при надлежащем выборе лагранжевых координат они допускают одно и то же выражение для живой силы. Очень простой пример такой динамической эквивалентности материальных систем, физически различных между собой, мы будем иметь (как это будет видно в п. 49), рассматривая, с одной стороны, одну свободную материальную точку в пространстве (отнесенную к декартовым координатам), а с другой стороны, материальный диск, свободно движущийся в своей плоскости (если за его лагранжевы координаты примем декартовы координаты какой-нибудь неизменно связанной с ним точки, а третий параметр выберем пропорциональным углу, определяющему его ориентировку в плоскости относительно неподвижных осей).

39. Теорема и интеграл живых сил. Так как уравнения Лагранжа вполне определяют движение голономной системы, то всякое свойство движения должно являться следствием из этих уравнений. В виде примера полезно проверить, что, когда связи не зависят от времени, уравнения (43) будут содержать в себе теорему живых сил, которая, как уже известно, справедлива для всякой системы с такими связями (п. 30).

С этой целью, обозначая через $dq_h (h = 1, 2, \ldots, n)$ лагранжевы составляющие элементарного перемещения, которое голономная система совершает при своем движении в любой элемент времени dt, умножим каждое уравнение (43) на соответствующий дифференциал dq_h и сложим их почленно. Таким образом, получим уравнение

$$\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right) dq_h = \sum_{h=1}^{n} Q_h dq_h. \tag{46}$$

Вспоминая тождество (36) и принимая во внимание, что при связях, не зависящих от времени, всякое действительное элементарное перемещение является также и виртуальным, мы видим, что выражение в правой части дает элементарную работу dL, выполняемую активными силами на рассматриваемом перемещении dq_h системы.

Что же касается левой части уравнения (46), то заметим, что, при заданной независимости связей от времени, живая сила T представляет собой квадратичную форму от $\dot{q}_h$ с коэффициентами, не зависящими от t. Ввиду этого прежде всего имеем по теореме Эйлера

$$2T = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}$$

и, следовательно, дифференцируя по времени, получим

$$2\frac{dT}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} + \sum_{h=1}^{n} \ddot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h},$$

а с другой стороны, так как T явно зависит только от q и $\dot{q}$, имеем

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial T}{\partial q_h} + \sum_{h=1}^{n} \ddot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}.$$

Тогда, вычитая по частям это уравнение из предыдущего, получим соотношение

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right)\dot{q}_h,$$

которое по умножении на dt выразит, что левая часть уравнения (46) является элементарным приращением dT, получаемым живой силой за элемент времени dt.

Таким образом, уравнение (46) есть не что иное, как уравнение

$$dT = dL, \qquad (47)$$

выражающее *теорему живых сил.*

Далее, если прямо приложенные силы F_i являются производными от потенциала U, то в лагранжевых координатах имеем

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

так как в силу независимости связей от времени потенциал U зависит только от q (п. 31), то имеем

$$dL = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_h} dq_h = dU.$$

Уравнение (47) принимает теперь вид

$$dT = dU$$

и дает после интегрирования *интеграл живых сил* или *энергии.*

40. Функция Лагранжа. Отбросим теперь предположение, что связи не зависят от времени, но будем попрежнему считать, что активные силы F_i являются производными от потенциала U. В лагранжевых координатах все еще будем иметь

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h}; \tag{48}$$

при этом во избежание недоразумений необходимо иметь в виду, что если связи явно зависят от времени, то потенциал U, выраженный в лагранжевых координатах, будет также зависеть, вообще говоря, помимо q, еще и от t.

Уравнения Лагранжа, принимая во внимание равенства (48), можно в этом случае написать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_h} = 0;$$

если заметим, что в силу независимости U от $\dot q$ имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} = \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot q_h},$$

то, полагая

$$T + U = \mathfrak{L}(q, \dot q \mid t), \tag{49}$$

можно придать уравнениям Лагранжа более простой вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{50}$$

В этих уравнениях функция $\mathfrak{L}$, так называемая *функция Лагранжа, или кинетический потенциал,* определена равенством (49), так что по отношению к аргументам $\dot q$ она представляет собой целую рациональную функцию второй степени.

41. Общие лагранжевы системы. С аналитической точки зрения форма (50) уравнений Лагранжа наводит на мысль рассматривать в виде естественного обобщения системы дифференциальных уравнений типа (50) в предположении, что $\mathfrak{L}$ есть *какая угодно* функция от аргументов q, $\dot q$ и t. Эти системы обычно называются *общими лагранжевыми системами.*

Речь идет, очевидно, все еще о системе второго порядка относительно неизвестных функций $q_i(t)$; легко указать условия того, чтобы такая система была *нормальной* (т. е. разрешимой относительно n вторых производных $\ddot q$). Действительно, посредством рассуждения, аналогичного развитому в п. 37 для уравнений Лагранжа, мы увидим, что в любом уравнении (50) лагранжевы ускорения $\ddot{q}$ входят только линейно, именно в форме

$$\sum_{k=1}^{n} \ddot{q}_k \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k},$$

откуда следует, что необходимое и достаточное условие для указанной разрешимости системы (50) заключается в том, чтобы симметричный определитель

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right\|,$$

так называемый гессиан функции Лагранжа по аргументам $\dot{q}$, не был тождественно равен нулю. В динамическом случае этот гессиан на основании формул (45), (49), естественно, сведется к дискриминанту $\| a_{hk} \|$ полной живой силы T или ее квадратичной части T_2, в зависимости от того, зависят или нет связи от времени.

В виде примера заметим, что система (50) определенно не будет нормальной, если $\mathfrak{L}$ по отношению к $\dot{q}$ есть однородная функция первой степени. Действительно, в этом случае по теореме Эйлера будем иметь тождественно

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \mathfrak{L}$$

и, следовательно, если возьмем производную по любому $\dot{q}_h$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

так как эти n линейных уравнений сохраняют свое значение при каких угодно значениях $\dot{q}$ и, следовательно, также и при значениях, которые не все равны нулю, то заключаем, что должен исчезать определитель из коэффициентов, т. е. гессиан функции $\mathfrak{L}$. Этот результат можно еще более уточнить, если предположить, что функция $\mathfrak{L}$, кроме того, что однородна и первой степени относительно $\dot{q}$, еще и не зависит от t; в этом случае легко видеть, что уравнения (50) не независимы, а связаны тождественным соотношением

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \mathfrak{L}_h = 0,$$

где для краткости через $\mathfrak{L}_h$ обозначен бином, который появляется в левой части h-го из уравнений (50). Действительно, в силу предположения, что $\mathfrak{L}$ не содержит явно t, имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right\}; \tag{51}$$

а так как по предположению все $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}$ однородны относительно $\dot{q}$ и соответственно первой и нулевой степени, то по теореме Эйлера имеем

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial q_k} \dot{q}_h = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k}, \quad \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_h = 0,$$

и достаточно подставить выражения (51) в правую часть соотношения

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \mathfrak{L}_h = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} - \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h},$$

чтобы убедиться, что мы имеем здесь выражение, тождественно равное нулю.

42. Кинетические моменты (обобщенные количества движения). Интегралы моментов. Кинетическими моментами или обобщенными количествами движения называются частные производные

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}$$

от лагранжевой функции по скоростям $\dot{q}_h$. Название „кинетические моменты“ было введено в употребление в Англии, где *количество движения* называют *моментом*; с другой стороны, если за лагранжевы параметры принимаются декартовы координаты x_i, y_i, z_i точек системы, то, очевидно, имеем

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i.$$

Наконец, для некоторых из систем координат какая-либо из производных $\partial \mathfrak{L}/\partial \dot{q}_i$ может быть действительно моментом количества движения в нашем смысле слова. Так, например, для материальной точки с массой m, отнесенной к цилиндрическим координатам r, θ, z, живая сила имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2),$$

так что

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

дает как раз момент количества движения относительно оси z.

Предположим теперь, что в какой-нибудь лагранжевой системе в общем смысле или, в частности, в динамической системе функция $\mathfrak{L}$ не зависит от одной из переменных q, например от q_i. В этом случае уравнение с индексом i даст непосредственно *первый интеграл*

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}. \tag{52}$$

Интегралы этого типа называются в силу только что сказанного *первыми интегралами моментов*[1]).

Прибавим еще, что те координаты q, которые не входят в функцию Лагранжа, как раз и дают место этим интегралам; английские авторы называют эти координаты *игнорируемыми* или *циклическими*. В дальнейшем (п. 45) мы узнаем причину названия „игнорируемые"; здесь же для оправдания другого названия — „циклические" — заметим, что в случае одной материальной точки, отнесенной к цилиндрическим координатам, из указанного выше выражения живой силы следует, что функция Лагранжа $\mathfrak{L} = T + U$ не будет зависеть от параметра θ только тогда, когда поле действующих сил представляет круговую (*циклическую*) симметрию относительно оси z.

43. Интеграл энергии. Другой тип первого интеграла имеет место для тех лагранжевых систем (50), для которых функция Лагранжа не зависит от времени.

Для получения этого интеграла удобно установить сначала тождество, действительное для всех лагранжевых систем, которое и само по себе оказывается полезным в некоторых случаях. Для этого начнем с замечания, что если возьмем производную по t от $\mathfrak{L}(q, \dot{q} \mid t)$, то получим

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right) + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t};$$

с другой стороны, умножая каждое из уравнений (50) на соответствующую составляющую скорости $\dot{q}_h$ и складывая, получим

$$\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} \right) \dot{q}_h = 0.$$

---

[1]) Соотношения $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} = c_i$ можно называть с таким же правом первыми интегралами количеств движения. (*Прим. ред.*)

Если теперь из этого уравнения вычтем предыдущее, то придем к уравнению

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\dot{q}_h \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} + \ddot{q}_h \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\right) - \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = 0,$$

которому, очевидно, можно придать вид

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h - \mathfrak{L}\right) + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = 0;$$

это и есть общее тождество, о котором было сказано в начале этого пункта; если положить для краткости

$$H = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h - \mathfrak{L}, \tag{53}$$

то можно написать

$$\frac{dH}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = 0.$$

Предполагая, что функция $\mathfrak{L}$ не зависит от времени, мы выведем отсюда, что для лагранжевой системы имеет место первый интеграл

$$H = \text{const.} \tag{54}$$

Заметим, что в динамическом случае при связях, не зависящих от времени, и при действующих силах, являющихся производными от потенциала U, полученный таким образом интеграл есть не что иное, как интеграл живых сил. Действительно, в этом случае по определению имеем

$$\mathfrak{L} = T + U,$$

где U зависит только от q, а T есть квадратичная форма относительно $\dot{q}$ с коэффициентами, не зависящими от времени, так что по теореме Эйлера будет иметь место тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h = 2T;$$

отсюда на основании формулы (53) имеем

$$H = 2T - (T + U) = T - U,$$

т. е. мы видим, что H есть как раз *полная энергия* системы.

Поэтому первый интеграл (54), даже и в случае общей лагранжевой системы, обычно называют *интегралом* (обобщенным) энергии.

44. Гиростатические члены. В динамике встречаются случаи, в которых при голономных связях, зависящих от времени, и при наличии благодаря этому для живой силы общего выражения (гл. IV, п. 11)

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

живая сила *оказывается не зависящей от времени.* Такой же будет и функция Лагранжа $\mathfrak{L}$, если система консервативна, так что будет существовать интеграл энергии (54), который, как это видно из того же преобразования предыдущего пункта, здесь принимает вид

$$H = 2T_2 + T_1 - (T + U) = T_2 - T_0 - U = \text{const.} \qquad (54')$$

Таким образом, в результате вычислений мы видим, что из трех слагаемых, из которых состоит T, линейное слагаемое относительно $\dot{q}$, т. е. T_1, не входит в интеграл энергии, но зато оно явно входит в функцию Лагранжа $\mathfrak{L} = T - U$ и поэтому влияет на уравнения Лагранжа.

Особенно простой случай, в котором имеют место только что указанные обстоятельства, мы будем иметь, если отнесем свободную материальную точку, находящуюся под действием консервативной силы, к системе осей $Oxyz$, равномерно вращающейся вокруг оси z, которая остается неподвижной. Если ω есть угловая скорость этих вращающихся осей и ось z предполагается ориентированной в направлении ω, то абсолютная скорость точки определится геометрической суммой относительной скорости с составляющими $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и переносной скорости с составляющими $-\omega y$, ωx, 0 (т. I, гл. IV, пп. 4, 6), так что живая сила

$$T = \frac{1}{2} m \{(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2\}$$

не будет зависеть от времени, причем

$$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad T_1 = m\omega (x\dot{y} - y\dot{x}), \quad T_0 = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Предполагая, что потенциал U действующей силы, когда он выражается через x, y, z, не зависит от времени t, мы прежде всего найдем, что существует первый интеграл вида (54). Далее, так как T_0 можно здесь истолковать как потенциал центробежной силы, происходящей от вращения осей, то интеграл (54) можно отождествить с интегралом живых сил, который мы имели бы, если бы оси координат были неподвижны, а к прямо приложенной силе была прибавлена центробежная сила. Это есть так называемый *интеграл живых сил в относительном движении* или интеграл Якоби[1]).

[1]) К. Якоби (Karl Gustav Jacob Jacobi) родился в Потсдаме в 1804 г., умер в Берлине в 1851 г. Был профессором университета в Кёнигсберге. Вместе с Абелем он делит славу создания теории обращения эллиптических интегралов путем введения в анализ замечательных однозначных трансцендентных функций (функций ϑ Якоби), носящих его имя, систематическую

Далее, если напишем в явной форме уравнения Лагранжа, то получим

$$m(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$m(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 x) = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$m\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Эти уравнения, естественно, совпадают с уравнениями, которые можно получить прямым путем из основного уравнения $m\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{F}$, если подставить в него вместо ускорения $\boldsymbol{a}_a$ его выражение, получаемое на основании теоремы Кориолиса (т. I, гл. IV, п. 4, б).

Таким образом, действительно, как и говорилось в общем случае, совокупность T_1 членов из T, линейных по отношению к составляющим скорости (относительной) точки (момент количества движения относительно оси вращения), не входит в интеграл живых сил, но влияет на уравнения Лагранжа посредством сложной центробежной силы, т. е. формально, посредством членов с $\dot{x}$, $\dot{y}$. Члены этой линейной функции скоростей T_1, которые входят благодаря тому, что движение точки относится не к неподвижным осям, а к вращающимся, называются *гиростатическими членами* лагранжевой функции.

При распространении на случай общей лагранжевой системы гиростатическими называются те члены функции $\mathfrak{L}$, линейные относительно $\dot{q}$, которые влияют на уравнения движения системы, но не входят в обобщенный интеграл энергии. Из сказанного вначале следует, что гиростатическими членами живой силы T, наверное, будут *члены, линейные относительно* $\dot{q}$ во всех тех динамических задачах, в которых как T, так и потенциал U не зависят от времени.

Наиболее распространенный тип таких задач будет указан в п. 46, другие же простые и механически наглядные примеры встретятся в динамике твердого тела (гл. IX, § 4).

45. Игнорирование координат. Если в функцию $\mathfrak{L}$ не входят m каких-нибудь координат q_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) *(циклические координаты)*, то соответствующая система уравнений Лагранжа допускает

теорию которых он впервые дал. Не менее фундаментальными являются и результаты, полученные им в области уравнений с частными производными, и его методы интегрирования уравнений небесной механики. Главные из этих методов изложены в его превосходных „Лекциях по динамике" (К. Г. Якоби, Лекции по динамике, М., 1936), опубликованных после его смерти (стараниями Клебша). Наконец, по всеобщему признанию, все его математические произведения, собранные в восьми томах (Берлин, 1881—1890), считаются классическими.

m первых интегралов моментов (интегралов импульсов) (п. 42)

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} = \mathrm{const} = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{55}$$

Если предположить, что рассматриваемая система уравнений Лагранжа (50) нормальна, то m уравнений системы (55) будут разрешимы относительно m производных $\dot{q}$, так как определитель, составленный из вторых производных функции $\mathfrak{L}$

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right\|,$$

отличен от нуля (п. 41); поэтому отличным от нуля будет по крайней мере один из миноров порядка m, получающихся из m первых строк этого определителя. Следовательно, m уравнениями (55) можно прямо заменить столько же уравнений, выбранных надлежащим образом из лагранжевой системы (50).

Предположим, в частности, что речь идет о динамической системе, так что имеем $\mathfrak{L} = T + U$. В этом предположении, как мы уже знаем (п. 41), гессиан Δ функции $\mathfrak{L}$ сводится к дискриминанту $\|a_{hk}\|$ квадратичной части T_2 живой силы T или полной живой силы T, смотря по тому, зависят или не зависят связи от времени. Так как в обоих случаях речь идет об определенной положительной форме, то дискриминант во всяком случае будет отличным от нуля и положительным, как и все его главные миноры; вместе с другими аналогичными главными минорами найдется минор m-го порядка, образованный пересечением m первых строк и m первых столбцов, также отличный от нуля. Уравнения (55) будут, таким образом, разрешимы относительно m производных $\dot{q}_i$ от m циклических координат $q_i (i = 1, 2, \ldots, m)$, и потому их можно взять вместо m первых уравнений Лагранжа.

Остальные $n - m$ уравнений, которые по предположению уже не содержат q_i, можно сделать независимыми также и от $\dot{q}_i$, $\ddot{q}_i$, подставляя вместо этих производных их выражения через q_h, $\dot{q}_h$, $\ddot{q}_h (h > m)$ и c_i, которые получатся из уравнений (55). Таким образом мы придем к системе дифференциальных уравнений второго порядка, заключающей в себе только $n - m$ неизвестных $q_h (h = m + 1, \ldots, n)$. Докажем теперь одно замечательное свойство, которое, конечно, нельзя было предвидеть a priori, а именно, что эта новая система все еще сохраняет лагранжеву форму, но уже, естественно, не по отношению к первоначальной функции $\mathfrak{L}$, а по отношению к *приведенной лагранжевой функции*

$$\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L} - \sum_{i=1}^{m} c_i \dot{q}_i; \tag{56}$$

здесь, конечно, предполагается, что в функцию $\mathfrak{L}$ вместо $\dot{q}_i$ подставлены их выражения через q_h, $\dot{q}_h$, c_i, полученные из системы (55).

Справедливость этого проверяется непосредственно, так как, обозначая через x какой-нибудь один из аргументов q_h или $\dot{q}_h$ при $h > m$, мы имеем по определению функции $\mathfrak{L}^*$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x} - \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x}$$

или же, на основании системы (55),

$$\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}.$$

То обстоятельство, что определение переменных q_h при $h > m$ можно свести к интегрированию некоторой лагранжевой системы, в которой уже не осталось никакого следа от m координат $q_1, \ldots, q_m$, оправдывает название этого метода *методом игнорирования координат*, которое обычно дается предыдущему приведению. Название „игнорирование" применяется здесь потому, что при определении координат q_h при $h > m$ можно не знать (игнорировать) остальные координаты, входившие вначале при действительном описании задачи. При этом заметим, что в большинстве конкретных задач интегрируемость в квадратурах очень часто является следствием наличия игнорируемых координат.

46. Гиростатические члены, вводимые в динамическом случае методом игнорирования координат. Возвращаясь снова к динамическому случаю с консервативными действующими силами, добавим предположение, что *связи не зависят от времени;* вследствие этого живая сила T будет квадратичной формой относительно $\dot{q}$ с коэффициентами, зависящими только от q,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,\, k=1}^{n} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k.$$

Легко видеть, что в этом случае исключение циклических координат $q_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ введет в приведенную функцию Лагранжа $\mathfrak{L}^*$ некоторое число линейных относительно $\dot{q}_h (h = m+1, \ldots, n)$ членов, которые имеют гиростатический характер.

Для доказательства заметим прежде всего, что при указанных выше предположениях, так как $\mathfrak{L} = T + U$ и U не зависит от $\dot{q}$, первые интегралы (55) будут иметь вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (55')$$

Эти m интегралов дадут столько же линейных неоднородных относительно $\dot{q}$ уравнений с *коэффициентами, зависящими только от* $q_h (h = m+1, \ldots, n)$; решая эти уравнения относительно $\dot{q}_i$,

получим
$$\dot{q}_i = \gamma_i + \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{55''}$$
где γ_i — известные функции от одних только q_h (и от постоянных c_i), а λ_i обозначают m линейных относительно $\dot{q}_h$ форм с коэффициентами, зависящими только от q_h (но не от c_i).

Приведенная функция Лагранжа на основании формулы (56) определится равенством
$$\mathfrak{L}^* = T + U - \sum_{i=1}^{m} c_i \dot{q}_i, \tag{56'}$$
где вместо $\dot{q}_i$ нужно подставить как в T, так и в сумму их выражения через $\dot{q}_h$. Все упомянутые выше гиростатические члены получатся только от этой суммы (и при произвольных значениях c_i будут неприводимыми). Это объясняется тем замечательным обстоятельством (которое, однако, нельзя было предвидеть a priori), что T по выполнении подстановки не будет содержать линейных членов с $\dot{q}_h$, а будет заключать в себе только члены второй и нулевой степеней относительно $\dot{q}_h$. Это можно проверить, представив уравнения (55″) в явной форме и выполнив на самом деле подстановку в T, но мы предпочтем идти иным путем, с меньшими выкладками. Отделим в T члены, квадратичные относительно $\dot{q}_i$ и $\dot{q}_h$ и билинейные относительно $\dot{q}_i$, $\dot{q}_h$, полагая
$$T = T' + B + T'',$$
где
$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad B = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=m+1}^{n} a_{ih} \dot{q}_i \dot{q}_h,$$
$$T'' = \frac{1}{2} \sum_{h,k=m+1}^{n} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k.$$

Равенства (55′) можно написать в виде
$$\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} = c_i - \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{55'''}$$
где $\frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i}$ суть линейные формы только по отношению к $\dot{q}_h$; вследствие этого, выполняя в равенстве
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} + 2 \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \right) + T''$$
первое частичное исключение $\dot{q}_i$, получим
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \left(c_i + \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \right) + T''. \tag{57}$$

Так как T'' уже есть квадратичная форма относительно $\dot{q}_h$, то остается только показать, что после выполнения подстановки до конца выражение под знаком суммы не будет содержать линейных членов, или, другими словами, что оно остается неизменным при изменении знака у всех $\dot{q}_h$.

Для доказательства полагаем $\bar{\dot{q}}_h = -\dot{q}_h$ и соответственно $\bar{\dot{q}}_i = \gamma_i - \lambda_i$, обозначая таким образом через $\bar{\dot{q}}_i$ те величины, в которые обращаются $\dot{q}_i$ на основании формул (55''') после изменения знака у всех $\dot{q}_h$. Так как $\frac{\partial B}{\partial \bar{\dot{q}}_i}$ являются линейными формами относительно $\dot{q}_h$, то имеем

$$\frac{\partial B}{\partial \bar{\dot{q}}_i} = -\frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i},$$

так что вместе с соотношениями (55''') будут иметь место еще и равенства

$$\frac{\partial T'}{\partial \bar{\dot{q}}_i} = c_i + \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (55^{\mathrm{IV}})$$

И так как T' есть квадратичная форма относительно $\dot{q}_i$, то вследствие симметричности соответствующей билинейной формы (полярной) справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{\dot{q}}_i \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \frac{\partial T'}{\bar{\dot{q}}_i}$$

или же на основании формул (55''') и (55$^{\mathrm{IV}}$)

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{\dot{q}}_i \left(c_i - \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \left(c_i + \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i}\right);$$

это тождество как раз и показывает, что сумма в равенстве (57), а следовательно, и сама живая сила T, остается неизменной при изменении знака у всех $\dot{q}_h$, т. е. что T не содержит линейных членов.

Отсюда следует, что в приведенной лагранжевой функции (56′) [1] линейные члены относительно $\dot{q}_h$, происходящие от суммы и поэтому появляющиеся на основании формул (55″) в сумме

$$-\sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i,$$

не могут сократиться; а так как $\mathfrak{L}^*$ не зависит от времени, то заключаем, что речь идет о таком же числе гиростатических членов.

Заметим еще, что то, что было изложено, представляет собой, быть может, наиболее замечательный пример лагранжевых функций, соответствующих действительным динамическим задачам и содержащих в себе гиростатические члены.

§ 7. Приложения и примеры

47. Кинетическая интерпретация биномов Лагранжа. Прежде чем иллюстрировать уравнения Лагранжа некоторыми элементарными приложениями, мы покажем на простейшем примере одной материальной точки P интересную кинематическую интерпретацию лагранжевых биномов, входящих в левые части этих уравнений.

Отнесем точку P к каким угодно лагранжевым параметрам q_1, q_2, q_3 (*криволинейные координаты* в пространстве), предполагая для простоты, что время не входит в единственное геометрическое уравнение

$$P=P(q_1,\ q_2,\ q_3), \tag{58}$$

определяющее положение точки в зависимости от координат q; при переходе к координатной форме получим три скалярных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(q_1,\ q_2,\ q_3),\\ y&=y(q_1,\ q_2,\ q_3),\\ z&=z(q_1,\ q_2,\ q_3).\end{aligned}\right\} \tag{58'}$$

Если в уравнении (58) заставить изменяться только одну из координат q, например q_1, приписывая вполне определенные значения q_2^0, q_3^0 остальным двум, то точка P опишет кривую, определяемую в лагранжевых координатах двумя уравнениями: $q_2=q_2^0$, $q_3=q_3^0$, для которой q_1 будет геометрическим параметром. Она называется *координатной линией* q_1; ясно, что при изменении q_2^0, q_3^0 получится система ∞^2 (или *конгруэнция*) линий q_1, так что через всякую точку любой области пространства, в которой уравнения (58') разрешимы однозначно относительно q, пройдет одна и только одна из этих кривых. То же самое можно сказать и о линиях q_2 и q_3.

По известному свойству вектора, являющегося производной от переменной точки (т. I, гл. I, п. 66), производная $\dfrac{\partial P}{\partial q_h}$, если остальным двум q, отличным от q_h, приписываются определенные значения, представит собой вектор, касательный к соответствующей линии q_h, который будет единичным только тогда, когда q_h будет длиной s дуги рассматриваемой линии. Во всяком случае, обозначая через t_h касательный единичный вектор, направленный в сторону возрастания q_h, будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial q_h}=\left|\frac{\partial P}{\partial q_h}\right| t_h \qquad (h=1,\ 2,\ 3). \tag{59}$$

Возьмем теперь снова тождества (42) п. 37 и представим себе, что в них вместо τ_h подставлены их выражения (38) из п. 36. В нашем случае одной точки P получатся следующие три соотношения:

$$\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial P}{\partial q_h}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h} \qquad (h=1,\ 2,\ 3).$$

Принимая во внимание соотношения (59), мы получим отсюда уравнения

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}_h=\frac{1}{\left|\frac{\partial P}{\partial q_h}\right|}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}\right) \qquad (h=1,\ 2,\ 3), \quad (60)$$

устанавливающие простое соотношение между биномом, стоящим в левой части любого, отдельно взятого уравнения Лагранжа, и составляющей ускорения по соответствующей обобщенной координате q; в частности, мы будем иметь тождество между тем и другим, если координата q есть как раз длина дуги рассматриваемой координатной линии.

48. Применим только что полученные формулы (60) к случаю, когда за лагранжевы координаты точки берутся ее полярные (сферические) координаты: ρ (радиус-вектор), φ (долгота) и θ (полярный угол). Здесь координатными линиями ρ являются лучи, выходящие из полюса, линиями φ — *параллели* (т. е. окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к оси z, и имеющие центры на этой оси), линиями θ — меридианы (т. е. полуокружности с центром в полюсе, имеющие диаметр на оси z). В совокупности они составят триортогональную систему (т. е. кривые трех различных систем, проходящие через любую точку пространства, будут попарно взаимно ортогональны).

В этом случае уравнения (58′) принимают, как известно, вид

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta; \qquad (61)$$

поэтому для живой силы получим выражение

$$2T=\dot\rho^2+\rho^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta).$$

Отсюда следует, что левые части уравнений Лагранжа, относящиеся соответственно к координатам ρ, φ, θ, будут иметь вид

$$\ddot\rho-\rho(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta),$$
$$\rho\sin\theta\,[2\dot\varphi(\dot\rho\sin\theta+\rho\dot\theta\cos\theta)+\rho\ddot\varphi\sin\theta],$$
$$2\rho\dot\rho\dot\theta+\rho^2(\ddot\theta-\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta).$$

Так как на основании уравнений (61) имеем

$$\left|\frac{\partial P}{\partial\rho}\right|=1,\qquad \left|\frac{\partial P}{\partial\varphi}\right|=\rho\sin\theta,\qquad \left|\frac{\partial P}{\partial\theta}\right|=\rho,$$

то, применяя формулу (60), заключаем, что составляющие ускорения по линиям ρ, φ, θ имеют следующие выражения:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta),$$
$$a_\varphi = 2\dot{\varphi}(\dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta) + \rho\ddot{\varphi}\sin\theta,$$
$$a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta).$$

49. Пример динамической эквивалентности. Рассмотрим твердый материальный диск какой угодно формы и структуры, который может свободно двигаться в своей плоскости. Обозначим через G его центр тяжести, через ξ_0, η_0 — координаты точки G относительно осей $\Omega\xi\eta$, неподвижных относительно плоскости, в которой происходит движение, и, наконец, через φ — угол, составляемый с осью ξ какой-нибудь ориентированной прямой, неизменно связанной с диском. Следовательно, речь идет о голономной системе со связями, не зависящими от времени, имеющей три степени свободы, за лагранжевы координаты которой можно принять три параметра: ξ_0, η_0 и θ.

Для того чтобы написать соответствующие уравнения Лагранжа, необходимо прежде всего найти выражение живой силы T в функции от ξ_0, η_0, θ, к которому можно придти, пользуясь определением живой силы или применяя теорему Кёнига (гл. IV, п. 8). В этом последнем случае достаточно вспомнить, что живая сила поступательного движения будет $m\frac{\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2}{2}$, живая сила вращательного движения вокруг G будет $\frac{A\dot{\theta}^2}{2}$ (гл. IV, п. 10), где m обозначает массу диска и A — его момент инерции относительно перпендикуляра к диску в центре тяжести G или, что все равно, полярный момент инерции относительно G. Вводя вместо A соответствующий радиус инерции δ, получим

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \delta^2\dot{\theta}^2);$$

если за третий лагранжев параметр вместо θ примем $\zeta_0 = \delta\theta$, то это выражение живой силы диска приведется к виду

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \dot{\zeta}_0^2). \tag{62}$$

Оно тождественно с выражением живой силы одной материальной точки с массой m и координатами ξ_0, η_0, ζ_0, свободно движущейся в пространстве, а в этом и заключается, в смысле, разъясненном в п. 38, динамическая эквивалентность диска и свободной материальной точки.

Левые части уравнений Лагранжа, вычисленные, исходя из выражения (62) для живой силы, относительно лагранжевых координат ξ_0, η_0, ζ_0, приводятся к ньютоновой форме $m\ddot{\xi}_0$, $m\ddot{\eta}_0$, $m\ddot{\zeta}_0$, тогда как правые части, составляющие активной силы по координатам ξ_0, η_0, ζ_0, зависят, естественно, на основании соотношений (37) от активных сил; и так как относительно последних не делается никаких дальнейших предположений, то ничего нельзя прибавить к тому, что уже было сказано в общем случае в пп. 37—40. Таким образом, если речь идет о консервативных силах, при наличии которых всегда имеется функция Лагранжа $L=T+U$, не зависящая от времени, то будет существовать и интеграл живых сил. Кроме того, так как живая сила T в этом случае явно не содержит ни одного параметра Лагранжа, а только производные от них, то будем иметь столько первых интегралов, сколько среди аргументов ξ_0, η_0, ζ_0 будет таких, от которых не зависит функция U (п. 42).

Важный тип задач динамики диска встречается в авиации в тех случаях, когда, желая объединить законы движения самолета в вертикальной плоскости, приходится схематически уподоблять его диску с вертикальной плоскостью, в которой движется его центр тяжести; при этом, естественно, из действующих сил в основном учитываются только сила тяжести и сопротивление воздуха, оцениваемое надлежащим образом по отношению к действительному профилю самолета.

50. Тяжелая точка, удерживаемая на поверхности гладкого цилиндра с вертикальными образующими. Пользуясь системой осей, связанных с Землей, примем направленную вниз вертикаль за ось ζ и представим в виде

$$\xi=\xi(s), \quad \eta=\eta(s)$$

параметрические уравнения нормального сечения цилиндра, где за параметр принята длина дуги s этого сечения. Положение материальной точки P, удерживаемой цилиндром, определяется, очевидно, соответствующими значениями s и ζ, которые поэтому можно принять за лагранжевы координаты точки. А так как по определению параметра s имеем

$$d\xi^2+d\eta^2=ds^2,$$

то живая сила точки P с массой, равной единице, при указанных условиях определится равенством

$$T=\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}(\dot{s}^2+\dot{\zeta}^2). \tag{63}$$

С другой стороны, если точка P подвергается действию только силы тяжести, то для активной силы существует потенциал

$$U=g\zeta, \tag{64}$$

относящийся к точке, масса которой равна единице. Теперь, предполагая, что цилиндр является гладким, мы можем прямо применить уравнения Лагранжа, которые на основании соотношений (63) и (64) будут иметь вид

$$\ddot{s}=0, \quad \ddot{\zeta}=g,$$

т. е. будут тождественны с уравнениями движения свободно падающего тяжелого тела (отнесенного к прямоугольным осям, лежащим в вертикальной плоскости, в которой находится начальная скорость, причем одна из осей совпадает с направленной вниз вертикалью). Поэтому мы заключаем, что если тяжелая точка вынуждена двигаться по гладкому цилиндру с вертикальными образующими и с каким угодно сечением, то ее траектория будет такой кривой, которая после развертывания цилиндра на плоскость обратится в дугу параболы (с возможным вырождением в прямую), имеющую осью образующую цилиндра и обращенную выпуклостью вниз.

Наконец, даже не составляя на самом деле уравнений Лагранжа, можно придти к тому же заключению, замечая, что по отношению к координатам s, ζ живая сила (63) и потенциал (64) нашей точки тождественны с живой силой и потенциалом свободно падающего тяжелого тела, отнесенного, в вертикальной плоскости, содержащей начальную скорость, к осям s и ζ, вторая из которых совпадает с вертикалью, направленной вниз. Мы имеем здесь, таким образом, второй пример динамической эквивалентности (п. 38).

51. Микросейсмограф с двумя горизонтальными составляющими или сферический маятник с подвижным центром подвеса. Сейсмографы, как известно, представляют собой инструменты, предназначенные для автоматической регистрации землетрясений. Они дают непосредственно диаграмму регистрирующей точки, скрепленной каким-либо образом с основанием прибора, неизменно связанным с землей. Сейсмографы бывают большей частью двух типов, соответственно называемых *сейсмографами с горизонтальными составляющими и сейсмографами с вертикальными составляющими*[1]).

Общая теория приборов первого типа может быть построена, если рассмотреть в качестве схемы сферический маятник, точка подвеса O которого может двигаться в зависимости от колебаний земной коры при землетрясениях.

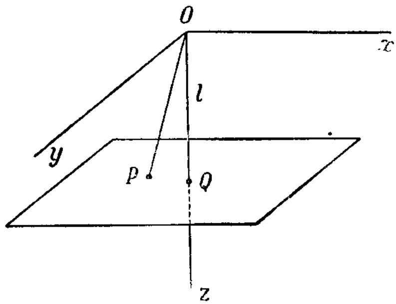
Заметим, кстати, что мы пришли здесь к такому примеру связей, зависящих от времени, который не носит искусственного характера и не является чисто теоретическим. Мы предполагаем здесь уточнить аналитическую постановку задачи о движении такого схематического прибора.

Обозначим через $\Omega\xi\eta\zeta$ оси координат, которые назовем геоидными, вследствие того, что они неизменно связаны с геоидом (или

[1] Б. Голицын, Vorlesungen über seismometrie, Leipzig, Teubner 1914. Ср., в частности, гл. IV, V и VIII.

также с конфигурацией Земли, которую она имела бы при отсутствии колебаний земной коры), и, отвлекаясь от движения Земли, примем их за механическую систему отсчета.

Рассмотрим, далее, маятник длиною l и с массой P, центр сферического подвеса которого пусть будет закреплен в некоторой точке O, связанной с Землей; обозначим через $Oxyz$ оси координат, неизменно связанные с некоторым куском земной коры (в окрестности точки O) и имеющие при сейсмическом покое ось z направленной по вертикали вниз (фиг. 20).



Фиг. 20.

Точка подвеса O, принимая участие во всяком местном сейсмическом движении, определяет колебательное движение массы маятника, и сейсмограф будет регистрировать колебания точки P относительно земных осей $Oxyz$ или, лучше сказать, колебания ее проекции на плоскость $z = l$. Сейсмографическая задача состоит в том, чтобы получить из этих данных неизвестное колебание точки O относительно геоидных осей $\Omega\xi\eta\zeta$.

При землетрясениях скорость $\dot{O}$ точки O является неизвестной векторной функцией времени, составляющие которой по земным осям мы обозначим через u, v, w, в силу чего u и v только *приблизительно* могут быть названы *горизонтальными составляющими* и w — *вертикальной* составляющей сейсмической скорости точки O, так как, строго говоря, эти составляющие должны были бы относиться к геоидным осям. Обозначим через ω угловую скорость, которую во время землетрясения имеет система земных осей $Oxyz$ относительно воображаемой геоидной системы осей, и через p, q, r — соответствующие составляющие по осям $Oxyz$.

Любая точка P, неизменно связанная с этими земными осями, имела бы относительно геоидных осей (переносную) скорость

$$\boldsymbol{v}_\tau = \dot{O} + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP},$$

а (относительное) движение массы P маятника по отношению к осям $Oxyz$ дается диаграммой сейсмографа, так как движение точки P можно заменить движением ее проекции на плоскость $z = l$, если ограничиться малыми колебаниями в смысле п. 52 гл. II, что вполне допустимо для данной задачи. Другими словами, можно принять координату z всегда равной l, так что, обозначая через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ единичные векторы осей x, y, z, будем иметь

$$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + l\boldsymbol{k},$$

причем можно сказать, что при принятом приближении x, y являются лагранжевыми координатами движущейся точки относительно земных осей.

Отсюда следует, что скорость (относительная) точки P по отношению к осям $Oxyz$ выражается в виде

$$\boldsymbol{v}_r = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j},$$

а скорость (абсолютная) относительно геоидных осей определяется равенством

$$\dot{P} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\tau = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{O} + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}.$$

Обозначая через Q положение равновесия точки P в условиях сейсмического покоя (т. е. точку пересечения оси z с плоскостью $z = l$), можем написать тождество:

$$\boldsymbol{\omega} \times (\overrightarrow{OP}) = \boldsymbol{\omega} \times (\overrightarrow{OQ}) + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{QP}.$$

Если допустим, что ωl имеет тот же порядок, что и скорость проекции точки P, то слагаемым $\omega \times \overrightarrow{QP}$ в правой части, модуль которого будет порядка $\frac{\omega l \cdot QP}{l}$, можно пренебречь, так как дробь $\frac{QP}{l}$ можно рассматривать как малую первого порядка. Отсюда заключаем, что

$$\dot{P} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{O} + l\omega \times \boldsymbol{k} = \\ = (\dot{x} + u + lq)\,\boldsymbol{i} + (\dot{y} + v - lp)\,\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}.$$

Тогда, если для краткости положим

$$u_0 = u + lq, \qquad v_0 = v - lp, \tag{65}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2 + w^2), \tag{66}$$

где T_0 обозначает живую силу точки Q, масса которой равна единице, то для живой силы T точки P с массой, тоже равной единице, мы найдем выражение

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + u_0\dot{x} + v_0\dot{y} + T_0. \tag{67}$$

Теперь, чтобы написать уравнения Лагранжа, нам остается только рассмотреть активные силы, которые сводятся здесь к силе тяжести, имеющей потенциал

$$U = g\zeta,$$

или, если обозначим через γ третью координату точки O относительно геоидных осей и через γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы оси ζ относительно земных осей,

$$U = g(\gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z),$$

где z вычисляется из уравнения сферы с центром в O и радиусом l. Чтобы перейти от этого точного выражения к достаточному для нашей цели приближенному, заметим, что в дифференциальные уравнения входят первые производные от потенциала, поэтому мы можем пренебречь в выражении для U только членами порядка выше второго. Можно положить, следовательно,

$$z=l\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{l^2}\right);$$

с другой стороны, принимая отклонение прямой OP от вертикали за малую величину, т. е. рассматривая величины γ_1 и γ_2 как малые первого порядка, мы увидим, что третий направляющий косинус $\gamma_3=\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}$ будет отличаться от единицы только членами второго порядка; поэтому при только что указанном порядке приближения можно написать

$$U=g\left(\gamma+\gamma_1 x+\gamma_2 y+l-\frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{l}\right).$$

Отсюда и из выражения (67) для T получаем уравнения движения Лагранжа в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_0+\ddot{x}&=g\left(\gamma_1-\frac{x}{l}\right),\\ \dot{v}_0+\ddot{y}&=g\left(\gamma_2-\frac{y}{l}\right), \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

где u_0, v_0, γ_1, γ_2 суть неизвестные заранее функции от t, а x и y и, следовательно, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ нужно рассматривать как известные, так как они могут быть получены из инструментальных диаграмм.

Вспомним теперь, что общая задача сейсмологии состоит в определении движения земных осей относительно геоидных, т. е. в определении шести характеристик: u, v, w, p, q, r. Эти характеристики удобно разбить на две группы: u, v, p, q, с одной стороны, и w, r — с другой. Последние две величины даются показанием сейсмографа с вертикальными составляющими, и достаточно вспомнить формулы Пуассона

$$\dot{\gamma}_1=\gamma_2 r-\gamma_3 q,\quad \dot{\gamma}_2=\gamma_3 p-\gamma_1 r$$

и принять во внимание, что при нашем порядке приближения γ_3 равно единице, а произведениями $\gamma_2 r$, $\gamma_1 r$ можно пренебречь, как величинами второго порядка, чтобы видеть, что приближенно можно положить

$$\dot{\gamma}_1=-q,\qquad \dot{\gamma}_2=p. \tag{69}$$

Отсюда мы заключаем, что определение величин γ_1, γ_2 равносильно определению p и q; поэтому маятник с двумя горизонтальными составляющими дает два соотношения между инструментальными данными и неизвестными характеристиками u_0, v_0, p и q.

При помощи двух маятников с различной длиной, но достаточно близких друг от друга для того, чтобы $\dot{u}_0$, $\dot{v}_0$, γ_1, γ_2 можно было рассматривать как совпадающие, получатся четыре уравнения между этими четырьмя неизвестными.

Наконец, нужно отметить, что опыт привел к подтверждению того, что в наиболее часто встречающихся случаях, т. е. когда речь идет о сейсмических возмущениях, вызываемых отдаленными землетрясениями (микроколебания, происходящие от удаленных источников возмущений), можно прямо пренебречь вращением земных осей относительно осей геоидных, так что движение осей $Oxyz$ можно рассматривать как чисто поступательное. В этом случае в силу равенств (65) u_0, v_0 будут равны горизонтальным составляющим u, v скорости сейсмического колебания. Уравнения же (69), вследствие того что вначале (т. е. в условиях покоя) прямая OP направлена вертикально, дают $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, в силу чего уравнения (68) приводятся к следующим:

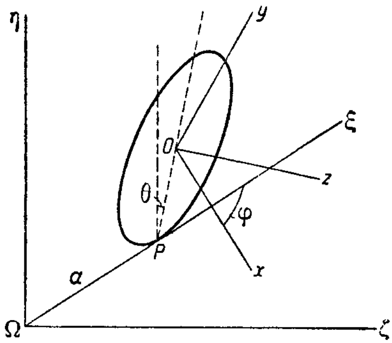
$$\dot{u} = -\left(\ddot{x} + \frac{g}{l} x\right),$$
$$\dot{v} = -\left(\ddot{y} + \frac{g}{l} y\right)$$

и непосредственно дают составляющие горизонтального ускорения.

Чтобы сделать выводы из диаграммы соответствующих горизонтальных перемещений, сейсмологи прибегают к разнообразным приемам, на которых мы здесь не можем останавливаться.

52. Тяжелый диск, катящийся вдоль заданного прямолинейного пути. Этот пример заслуживает особого внимания потому, что если в общем случае условие чистого качения налагает, как мы знаем (т. I, гл. IV, п. 11), неголономную связь, то в этом частном случае это условие переходит просто в дополнительную голономную связь.

Пусть твердый однородный диск с радиусом a и массой m вынужден катиться без трения вдоль заданной неподвижной прямой. Чтобы определить положение диска в любой момент, отнесем его, следуя общему приему, к двум системам осей: к неподвижным осям $\Omega\xi\eta\zeta$ (фиг. 21), из которых ось ξ совпадает с заданным прямолинейным путем, и к осям $Oxyz$, неизменно связанным с диском, начало которых совпадает с центром диска, а ось z перпендикулярна к его плоскости. Ось ξ будет *линией узлов* подвижных осей относительно неподвижных, так что третий угол Эйлера ψ будет тождественно равен нулю. Ясно, что положение диска в любой момент будет однозначно определено, если будут указаны: первая координата α точки P, в которой ось ξ касается диска, угол наклона θ его плоскости к плоскости $\xi\eta$ (первый угол Эйлера) и, наконец, угол φ (второй угол Эйлера, отсчитываемый в правом направлении), на который повернется подвижная ось x вокруг оси z, отправляясь от ориентированного направления линии узлов.



Фиг. 21.

Из условия чистого качения следует, что в любой момент дуга, описанная какой-нибудь точкой окружности диска (в частности, точкой, которая вначале была в соприкосновении с осью ξ), равна расстоянию точки касания в рассматриваемый момент от точки касания в начальный момент. Если обозначим через α_0 и φ_0 значения α и φ в начале движения и примем во внимание, что при качении диска по оси ξ в положительную сторону ось x вращается вокруг оси z в левом направлении, то найдем соотношение

$$\alpha - \alpha_0 = -a(\varphi - \varphi_0). \tag{70}$$

Это равенство подтверждает высказанное в самом начале этого пункта положение, что в данном частном случае условие чистого качения приводит к конечному соотношению между параметрами α и φ, т. е. к голономной связи.

Благодаря этой связи число степеней свободы сводится к двум. За параметры Лагранжа мы примем два угла: θ и φ, замечая, что из уравнения (70) следует

$$\dot{\alpha} = -a\dot{\varphi}. \tag{71}$$

Теперь, чтобы написать лагранжевы уравнения движения диска, необходимо прежде всего вычислить живую силу T, к которой мы легко придем, применяя формулу (17) гл. IV (п. 10) и принимая за (подвижной) центр приведения в любой момент t ту материальную точку диска, которая находится в соприкосновении с осью ξ и скорость которой в этот момент в силу отсутствия скольжения равна нулю. Если обозначим временно через $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ подвижную систему осей, связанных с диском, ось $\bar{z}$ которой параллельна оси z диска, а ось $\bar{x}$ в момент t совпадает с осью ξ, и через A, B, C — соответствующие моменты инерции диска, то, применяя теорему Гюйгенса и вспоминая, что (центральные) моменты инерции диска относительно оси z и какого-нибудь диаметра равны $\frac{ma^2}{2}$, $\frac{ma^2}{4}$ (т. I, гл. X, пп. 34, 27), будем иметь

$$A = \frac{5}{4} ma^2, \quad B = \frac{1}{4} ma^2, \quad C = \frac{3}{2} ma^2. \tag{72}$$

Что же касается произведений инерции, то имеем

$$A' = B' = C' = 0, \tag{73}$$

и потому оси $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ параллельны трем главным центральным осям инерции диска, а новый центр приведения принадлежит одной из этих центральных осей[1]). Следует заметить, что формулы (72), (73), как не зависящие от времени, остаются в силе уже не только в рассматриваемый момент t, но и в течение всего движения.

Поэтому на основании уже упоминавшейся формулы гл. IV и принимая во внимание, что в любой момент исчезают составляющие u, v, w скорости соответствующего центра приведения, мы будем иметь

$$2T = \frac{1}{4} ma^2 (5p^2 + q^2 + 6r^2),$$

и все сведется к вычислению составляющих p, q, r угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ диска относительно осей $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, первая из которых совпадает с линией узлов, а третья параллельна оси z диска. Обозначая теперь соответственно через $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ единичные векторы линии узлов, подвижной оси z и неподвижной оси ζ, мы будем иметь (т. I, гл. III, п. 34)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{N} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} + \dot{\psi}\boldsymbol{\varkappa},$$

так что при угле ψ, здесь тождественно равном нулю, мы получим

$$p = \dot{\theta}, \quad q = 0, \quad r = \dot{\varphi}$$

---

[1]) Здесь применяется следующее замечание, часто оказывающееся полезным в приложениях. *Всякая система осей, параллельных главным центральным осям инерции твердого тела и имеющих начало на одной из этих центральных осей, состоит также из главных осей инерции.* Действительно, если $Gxyz$ есть система главных осей инерции твердого тела относительно его центра тяжести G, и мы возьмем за новые оси три прямые $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, параллельные осям x, y, z в точке $O(0, a, 0)$, то произведения инерции относительно новых осей определятся равенствами

$$\bar{A}' = \sum_i m_i \bar{y}_i \bar{z}_i = \sum m_i (y_i - a) z_i,$$

$$\bar{B}' = \sum_i m_i \bar{z}_i \bar{x}_i = \sum m_i z_i x_i,$$

$$\bar{C}' = \sum_i m_i \bar{x}_i \bar{y}_i = \sum_i m_i x_i (y_i - a),$$

и, следовательно, вместе с центральными произведениями инерции и аналогичными статическими моментами $\sum\limits_i m_i x_i$, $\sum\limits_i m_i z_i$ будут равны нулю.

и, следовательно,

$$2T = \frac{1}{4} ma^2 (5\dot{\theta}^2 + 6\dot{\varphi}^2).$$

Все это сохраняет свое значение при каких угодно силах, действующих на диск; поэтому всякий раз, когда речь будет идти о консервативных силах, достаточно выразить их потенциал через θ и φ, чтобы затем написать уравнения Лагранжа.

Рассмотрим частный случай этой задачи, предполагая, что заданный путь горизонтален и что диск подвергается действию исключительно силы тяжести. Приняв, что всегда возможно, неподвижную плоскость ξ, η за горизонтальную и нисходящую вертикаль — за ось ζ, мы будем иметь для потенциала при высоте центра тяжести (предполагаемого выше плоскости $\xi\eta$), равной $-a \sin\theta$, выражение

$$U = -mag \sin\theta,$$

так что уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{5}{4} a\ddot{\theta} = -g\cos\theta, \quad \ddot{\varphi} = 0. \tag{74}$$

Второе из этих уравнений показывает, что угол собственного вращения диска φ изменяется равномерно, а первое, если положить $\theta = \theta_1 - \pi/2$, преобразуется в следующее:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{\frac{5}{4}a} \sin\theta_1,$$

т. е. тождественно с уравнением колебаний простого маятника длиной $l = \frac{5}{4}a$. Очевидное частное решение системы (74) (*статическое решение*, о котором мы будем говорить в § 4 гл. VI) мы будем иметь, полагая $\dot{\varphi} = \text{const} = r_0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ (и, следовательно, $\theta_1 = \pi$), т. е. воображая, что диск катится с произвольной постоянной угловой скоростью, оставаясь вертикальным.

В статике (т. I, гл. XIII, п. 23) было отмечено, что положение равновесия маятника (с твердым стержнем), соответствующее значению π угла θ_1, оказывается существенно неустойчивым. Этому обстоятельству здесь соответствует тот факт, что качение диска вдоль прямолинейного пути тоже будет неустойчивым. Этот результат, который будет лучше освещен при общем рассмотрении в § 5 и 6 гл. VI и § 2 гл. IX, поясняет, хотя и в очень грубом приближении, что̀ произойдет с велосипедистом, когда одно из колес велосипеда попадет в колею трамвайного рельса.

53. Динамическое осуществление связей и сервомоторных сил. Удаляясь несколько от прямых приложений уравнений Лагранжа, займемся здесь в заключение одним видом связей, которые при постановке соответствующих динамических задач будут рассматриваться с точки зрения, отличной от общепринятой.

Если задана материальная система S из N точек P_i ($i=1, 2, \ldots, N$) с двусторонними связями (даже и неголономными), то можно предположить, что на нее наложены другие связи, осуществляемые посредством автоматических приспособлений (например, электромагнитных), которые являются источником некоторых сил Φ_i, приложенных к точкам P_i системы и совершающих не равную нулю работу при всяких виртуальных перемещениях δP_i, совместимых со связями системы. Эти силы Φ_i называются *сервомоторными*, а приспособления, осуществляющие их, *сервомоторами*. Осуществляемые таким образом связи можно отличать от обычных связей, называя их *динамическими*.

Чтобы дать простейший пример, рассмотрим систему, состоящую из двух материальных точек P, P_1, движущихся без трения по прямой Ox, и предположим, что, в то время как точка P подвергается действию какой-нибудь активной силы, составляющая которой по оси x есть X, при помощи подходящего автоматического устройства осуществляется воздействие на точку P_1 некоторой силы Φ, вынуждающей эту точку следовать за P при ее движении на *неизменном расстоянии*. Сервомоторная сила Φ, осуществляющая эту динамическую связь, не удовлетворяет всем условиям, характеризующим идеальные связи, так как работа этой силы не равна нулю при всяком бесконечно малом перемещении, совместимом со связями. Действительно, здесь единственной связью является динамическая связь, вынуждающая точку P_1 сохранять неизменным ее расстояние от точки P, а так как перемещение δx точки P, равное перемещению точки P_1, остается произвольным, то работа $\Phi\delta x$ сервомоторной силы отлична от нуля, поскольку, вообще говоря, не исчезают ни тот, ни другой сомножители. Отсюда следует, что сервомоторная сила Φ при постановке задачи о движении должна рассматриваться как прямо приложенная к системе, а не как реактивная сила, осуществляющая связь без трения неизменяемой системы двух точек: PP_1.

Аналогичные обстоятельства имеют место и для любой системы S, находящейся под действием двусторонних связей, не только кинематических, но также и динамических. Сервомоторные силы Φ_i сами по себе, как предназначенные для осуществления связей, принадлежат к классу реакций связей, в постановке же задачи о движении они должны быть причислены к прямо приложенным силам (аналогично тому, как это делается в случае пассивных сопротивлений и трения). Таким образом, мы должны рассматривать систему S как подчиненную только обычным связям (геометрическим и кинематическим) и движущуюся под действием всех активных сил F_i и сервомоторных сил Φ_i. Следовательно, общее уравнение динамики на основании уравнения (12) п. 21 должно здесь иметь вид

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i + \Phi_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i = 0; \tag{12'}$$

оно должно иметь место при всех виртуальных перемещениях δP_i, совместимых с кинематическими связями.

Силы Φ_i, наравне с любыми другими реакциями связей, вообще являются неизвестными; известна только природа связей, которые они накладывают на систему (в предыдущем примере неизменность расстояния PP_1). Но, естественно, нельзя утверждать, что этих сил Φ_i будет ровно столько, сколько точек в системе, и что таким образом появляются $3N$ неизвестных составляющих. Может случиться, что эти $3N$ неизвестных приводятся к меньшему числу в силу того ли, что сервомоторные силы действуют только на некоторые точки системы, или же в силу способа их действия на соответствующие точки (например, параллельно плоскости или прямой и т. п.).

Предположим, для определенности, что материальная система S, если отвлечься от динамических связей, является голономной с n степенями свободы и что, с другой стороны, сервомоторные силы, действующие на нее, выражаются известными функциями от ν параметров σ, которые следует рассматривать при всяком движении системы как функции от времени t, вид которых заранее неизвестен. В этом предположении соотношение (12), где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ являются лагранжевыми координатами системы S, равносильно n дифференциальным уравнениям Лагранжа, заключающим, помимо q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$, еще параметров σ, представляющих собой тоже неизвестные функции времени. Поэтому, если динамические действия Φ_i регулируются таким образом, что в любой момент между параметрами σ существуют точно ν независимых соотношений, то движение системы будет определенным. Очевидно, то же будет иметь место и в указанном вначале примере, так как в нем при наличии единственной вспомогательной неизвестной Φ имеем $\nu = 1$, а с другой стороны, динамическая связь вполне характеризуется только одним уравнением (именно тем, которое выражает неизменность расстояния PP_1).

В частности, следует отметить тот случай, когда сервомоторные силы совершают работу, равную нулю при всех тех виртуальных перемещениях, допускаемых обычными связями, при которых изменяются только $n-\nu$ параметров Лагранжа, например $q_{\nu+1}, \ldots, q_n$; это можно также выразить, говоря, что лагранжевы составляющие всех сервомоторных сил по этим $n-\nu$ параметрам равны нулю. В этом предположении последние $n-\nu$ лагранжевых уравнений движения системы не будут зависеть от Φ, и достаточно присоединить к ним ν уравнений динамических связей, чтобы получить систему, определяющую движение.

Это обстоятельство оказывается также осуществленным в нашем примере, потому что, если мы наложим на нашу систему только обычные связи, т. е. если будем рассматривать две точки, свободно движущиеся по прямой, то сервомоторная сила Φ будет совершать работу, равную нулю, когда перемещается только точка P; поэтому будет справедливо уравнение (Лагранжа)

$$m\ddot{x} = X, \tag{75}$$

где m и x обозначают массу и абсциссу точки P, X — соответствующую составляющую силы, приложенной к P, а положение точки P_1 в любой момент определяется (относительно положения точки P) динамической связью.

Чтобы иллюстрировать, насколько существенно связи, осуществляемые динамически, отличаются от обычных (геометрических и кинематических) связей, полезно убедиться на этом схематическом примере, что закон движения в случае динамической связи будет отличаться от того закона, который мы имели бы, если бы на P действовала та же активная сила, а неизменяемость системы точек PP_1 обеспечивалась бы посредством твердого стержня. Действительно, при этом последнем предположении связи допускали бы для системы совокупное поступательное перемещение по прямой, так что имела бы место теорема о движении центра тяжести (п. 22), и уравнение движения вместо (75) имело бы вид

$$(m + m_1)\ddot{x}_0 = X,$$

где m_1 обозначает массу точки P_1, а x_0 — абсциссу центра тяжести точек P и P_1 [1]).

§ 8. Уравнения движения неголономных систем

54. Дифференциальные уравнения движения неголономных систем (т. I, гл. VI, § 2) также можно привести к общей типичной форме, которая заслуживает того, чтобы на ней остановиться, хотя она и далека от структурной простоты уравнений Лагранжа, имеющих место для голономных систем, и вывод ее значительно более сложен.

Предпошлем здесь некоторые вспомогательные рассуждения. Чтобы охарактеризовать самым общим образом систему S с двусторонними (возможно, также и неголономными) связями, отнесем ее сначала к некоторому определенному числу n лагранжевых координат q_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$, выбранных таким образом, чтобы были

[1]) Более подробное исследование, принадлежащее Бегену (Béghin), можно найти в четвертом издании т. II уже несколько раз цитированного трактата Аппеля (P. Appell, Traité de mécanique rationnelle, IV изд., т. II (1924), стр. 395—400).

учтены все голономные связи системы или только часть их, в силу чего будем иметь (уравнения (32))

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n | t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

После этого выразим остальные связи (которые, если исключить случай голономной системы, будут или все чисто кинематическими (неголономными), или частью голономными и частью кинематическими (неголономными), накладывая на координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ некоторое число s условий в виде линейно независимых уравнений вида (т. 1, гл. VI, п. 10, 17)

$$\sum_{h=1}^{n} b_{jh} dq_h + b_{j0} dt = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{76}$$

или же в конечной форме

$$\sum_{h=1}^{n} b_{jh} \dot{q}_h + b_{j0} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{76'}$$

где коэффициенты b_{jh} являются функциями от q и t, за исключением случая, когда эти s связей не зависят явно от времени; в последнем случае коэффициенты b_{jh} при $h > 0$ зависят только от q, а b_{j0} тождественно равны нулю [2]. Необходимо отметить, что если материальная система S является неголономной, то система уравнений Пфаффа (76) не может быть вполне интегрируемой, т. е. уравнения (76) не могут получиться посредством полного дифференцирования из s конечных независимых соотношений между q и t.

Мы можем всегда разрешить s линейных независимых уравнений (76′) относительно s лагранжевых скоростей $\dot{q}_h$ или, для большей симметрии, обратиться к параметрическому представлению, выражая все лагранжевы скорости $\dot{q}$, удовлетворяющие уравнениям (76′), в виде линейных функций (вообще говоря, неоднородных) от некоторых $\nu = n - s$ произвольных параметров $e_1, \ldots, e_\nu$. Тем самым мы придадим уравнениям, выражающим кинематические связи, следующий вид:

$$\dot{q}_h = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \eta_{h\alpha} e_\alpha + \eta_{h0} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{77}$$

где при связях, зависящих от времени, коэффициенты η будут определенными функциями от q и t, в случае же связей, не зависящих от времени, величины $\eta_{h\alpha}$ при $\alpha > 0$ будут функциями только от q, а η_{h0} будут тождественно равны нулю.

Произвольные параметры e, введенные таким образом, мы будем называть *кинематическими характеристиками* системы в координатах q для данного момента и соответствующей ему конфигурации.

Это название оправдывается тем соображением, что если задаются момент времени t_0 и конфигурация с координатами q^0, то формулы (77), в которых надо положить $t=t_0$, $q_h=q_h^0$, дадут соответственно ∞^ν возможных выборов значений параметров e_α, все r значений, совместимых со связями лагранжевых скоростей $\dot{q}_h$, или, в более сжатой форме, всевозможные *состояния движения*, которые, в этот момент и в этой конфигурации, система фактически может принять, в согласии со своими связями.

Естественно, что все предыдущее сохраняет свое значение также и в частном случае, когда *все* связи системы будут голономными, не исключая и того случая, когда эти связи выражаются дифференциальными уравнениями Пфаффа (76), которые должны поэтому представлять собой интегрируемую систему. Но в этом предположении кинематические характеристики можно выбрать некоторым частным образом, который необходимо разъяснить. Так как связи, наложенные на лагранжевы координаты q (если число координат превышает число степеней свободы), являются голономными, то конфигурацию системы в любой момент можно определить, выражая q в функциях от других ν независимых лагранжевых параметров r_α $(\alpha=1, 2, \ldots, \nu)$ в виде

$$q_h=q_h(r_1, r_2, \ldots, r_\nu|t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n);$$

чтобы определить состояния движения, возможные для системы начиная с какого-нибудь момента времени t и с любой начальной конфигурации, возможной в этот момент, достаточно взять производные по времени от предыдущих уравнений, в результате чего получим равенства

$$\dot{q}_h=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha}\dot{r}_\alpha+\frac{\partial q_h}{\partial t} \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \qquad (77')$$

которые и представляют собой уравнения (77), относящиеся к рассматриваемому здесь случаю. Таким образом, мы имеем здесь

$$\eta_{h\alpha}=\frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha}, \quad \eta_{h0}=\frac{\partial q_h}{\partial t} \quad (h=1, 2, \ldots, n;\ \alpha=1, 2, \ldots, \nu),$$

а кинематические характеристики выражаются лагранжевыми скоростями $\dot{r}_\alpha$.

Вернемся теперь к общему случаю, т. е. к уравнениям (77). Имея в виду следствия, которые мы из них получим, рассмотрим здесь наряду с состояниями движения, возможными для системы, также и ее виртуальные перемещения, лагранжевы составляющие которых δq определяются, как мы знаем, из уравнений, получающихся из уравнений (76) путем отбрасывания в них (если связи зависят от времени) членов $b_{j0}dt$ (т. I, гл. VI, п. 17), т. е. из уравнений

$$\sum_{h=1}^{n} b_{jh}\delta q_h = 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Отсюда следует, что общие параметрические выражения δq_h будут получаться из правых частей уравнений (77) путем отбрасывания в них, если они не равны нулю, величин η_{h0} и подстановки вместо кинематических характеристик e_α стольких же бесконечно малых произвольных параметров $\delta\varepsilon_\alpha$. Таким образом, лагранжевы составляющие всех виртуальных перемещений системы, начиная с некоторого момента и любой конфигурации, будут определяться равенствами

$$\delta q_h = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \eta_{h\alpha}\delta\varepsilon_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\delta\varepsilon_\alpha \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{78}$$

соответственно возможным выборам ν бесконечно малых произвольных параметров $\delta\varepsilon_\alpha$.

Из уравнений (78) можно было бы тотчас же получить геометрическое выражение наиболее общего виртуального перемещения нашей материальной системы. Для этого нужно было бы подставить в равенства

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\delta q_h \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

которые непосредственно следуют из уравнений (32), вместо δq_h их выражения через q и $\delta\varepsilon_\alpha$ (и, возможно, через t) по формулам (78). В дальнейшем мы не будем, однако, иметь случая применить те формулы, к которым мы пришли бы таким путем.

55. Уравнения маджи. Предположим теперь, что система S подчинена идеальным связям и находится под действием заданной системы сил F_i; составим уравнения движения системы.

Как и в случае голономных систем (п. 32), мы и здесь будем исходить из общего уравнения динамики; так как это уравнение удовлетворяется для всех виртуальных перемещений системы, то оно и здесь будет определять движение. Отделяя кинетические члены (содержащие ускорения) от динамических (содержащих силы), напишем его еще в виде уравнения (35) п. 36

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^{N} F_i \delta P_i.$$

После этого, вводя и в этом случае составляющие

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{37}$$

активных сил по лагранжевым координатам q_h (здесь уже не независимым, а подчиненным кинематическим связям (76)) и полагая

$$\tau_h = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

мы сможем придать уравнению (35), как и в п. 36, вид

$$\sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h. \tag{79}$$

Но в то время как в случае голономной системы (с n степенями свободы) все δq_h были произвольными (и независимыми), здесь они связаны между собой так, что могут принимать только значения, удовлетворяющие равенствам (78), сообразно с выбором ν произвольных $\delta\varepsilon_\alpha$. Таким образом, подставляя вместо δq_h их выражения (78) и принимая во внимание произвольность $\delta\varepsilon_\alpha$, мы заключаем, что общее уравнение (35) равносильно системе ν уравнений

$$\sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} \tau_h = \sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} Q_h \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{80}$$

Эти уравнения, совершенно аналогичные уравнениям (40) для голономных систем (п. 36), представляют собой уравнения движения нашей системы S. Их можно обычным путем преобразовать и дальше, если воспользоваться приемом, с помощью которого мы пришли к уравнениям Лагранжа (п. 36—37).

Прежде всего полную виртуальную работу прямо приложенных сил

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h,$$

если принять во внимание уравнения (78), можно написать в форме

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \delta\varepsilon_\alpha \sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} Q_h,$$

откуда мы видим, что правые части уравнений (80) представляют собой коэффициенты при различных $\delta\varepsilon_\alpha$ в выражении виртуальной работы δL.

Полагая

$$\Phi_\alpha = \sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} Q_h \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu) \qquad (81)$$

и вспоминая, что если вводится живая сила T системы, выраженная через q, $\dot{q}$, то существуют (независимо от того факта, что все $\dot{q}$ будут здесь подчинены кинематическим связям (76)) тождества (42) (п. 37)

$$\tau_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

уравнениям (80) можно придать вид

$$\sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right) = \Phi_\alpha \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu). \qquad (82)$$

Это и будут уравнения Маджи [3]. Они вместе с уравнениями (77) с аналитической точки зрения дают в дифференциальной форме полную постановку задачи о движении для системы S с двусторонними идеальными (в том числе и неголономными) связями. Действительно, если представим себе, что в уравнения (82) вместо величин $\dot{q}$ подставлены их выражения (77) через q, e и t и выполнено дифференцирование по t, то будет очевидно, что после выполнения всех преобразований в уравнениях останутся, помимо q, e, t, только ν производных $\dot{e}$ от e, которые войдут в них линейно. Замечания, совершенно аналогичные тем, которые были сделаны в п. 36, приводят к выводу, что полученные таким образом из системы (82) ν уравнений разрешимы относительно этих ν производных $\dot{e}$, так что мы заключаем, что уравнения (77) и (82) вместе составляют дифференциальную систему уравнений первого порядка, приводимую к нормальному виду относительно $n+\nu$ неизвестных функций времени q и e. Если конфигурация и состояние движения материальной системы в начальный момент заданы, т. е. указаны произвольные численные начальные значения q (позиционных координат) и e (кинетических характеристик), то движение неголономной системы будет однозначно определено.

56. Так как уравнения (77) и (82) в их совокупности вполне определяют движение системы, то мы заранее можем быть уверены, что в случае связей, не зависящих от времени, эти уравнения должны содержать в себе уравнение живых сил

$$dT = dL.$$

Однако, принимая во внимание важность результата, не бесполезно показать прямым путем, как это соотношение формально получается из уравнений Маджи (82).

Для этой цели заметим прежде всего, что когда все связи (голономные и неголономные) не зависят от времени, то живая сила T принимает вид

$$T=\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k,$$

где a_{hk} суть функции только от q, правые же части уравнений (77) не будут содержать членов η_{h0}, а величины $\eta_{h\alpha}$ при $\alpha>0$ не будут зависеть от t; так что, в частности, для любого действительного перемещения системы будет иметь место выражение (тождественное выражению любого виртуального перемещения, за исключением лишь подстановки $e_\alpha dt$, вместо $\delta\varepsilon_\alpha$)

$$dq_h=\dot{q}_h dt=dt\sum_{\alpha=1}^{\nu}\eta_{h\alpha}e_\alpha \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (83)$$

Умножая каждое из уравнений (82) на соответствующее $e_\alpha dt$ и складывая почленно, мы получим, принимая во внимание соотношения (78), уравнение

$$\sum_{h=1}^{r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}\right)dq_h=dt\sum_{\alpha=1}^{\nu}\Phi_\alpha e_\alpha,$$

в котором левая часть тождественна с приращением dT живой силы за элемент времени dt (п. 39), а правая часть дает элементарную работу dL, совершаемую активными силами за этот же самый элемент времени, если принять во внимание, что в силу независимости связей от времени равенства (83) оказываются справедливыми для действительных бесконечно малых перемещений.

57. Замечания об уравнениях кинематических связей. Уравнениям (82) можно придать более выразительный вид, разбивая в каждом из них левую часть на два слагаемых, из которых одно характеризует *неголономность* связей (оно тождественно исчезает при исключительно голономных связях), а другое, если отнести систему к голономным характеристикам, сведется к соответствующим лагранжевым биномам.

Чтобы сделать возможным такое преобразование уравнений (82), мы предпошлем несколько замечаний о кинематических связях системы, которые мы будем предполагать заданными в параметрической форме (77). Изменения лагранжевых координат q за элемент времени dt (начиная от любого момента и любой конфигурации), совместимые с этими связями, выразятся равенствами (77′)

$$dq_h=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\eta_{h\alpha}d\varepsilon_\alpha+\eta_{h0}dt \qquad (h=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

где через $d\varepsilon_\alpha$ обозначены бесконечно малые произвольные количества $e_\alpha dt$. Как мы уже знаем, если связи не зависят от времени, то количества $\eta_{h\alpha}$ при $\alpha > 0$ будут функциями только от q, а все η_{h0} тождественно обратятся в нуль; наоборот, если связи зависят от времени, все $\eta_{h\alpha}$ вместе с η_{h0} будут функциями от q и t.

В этом последнем предположении, для однообразия обозначений, удобно переменную t обозначить через q_0, а изменение времени dt — через $d\varepsilon_0$, поэтому к уравнениям (77') мы присоединим $(n+1)$-е уравнение

$$dq_0 = d\varepsilon_0$$

или, что одно и то же, будем рассматривать уравнения (77') сохраняющими значение также и при индексе $h=0$, при условии, что все $\eta_{0\alpha}$ будут тождественно равны нулю, за исключением $\eta_{00}=1$. Таким образом, вместо уравнений (77') мы будем иметь уравнения

$$dq_h = \sum_{\alpha=0}^{\nu} \eta_{h\alpha} d\varepsilon_\alpha \quad (h = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n); \tag{77''}$$

при этом важно иметь в виду, что если мы выполняем вычисления для связей, не зависящих от времени, то индекс h нужно изменять от 1 до n, а не от 0 до n, и индекс α — от 1 до ν, а не от 0 до ν.

Выберем теперь две произвольные системы: $d'\varepsilon_\alpha$, $d''\varepsilon_\alpha$ ($\alpha = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \nu$) бесконечно малых количеств. Обозначив через d' и d'' соответствующие операции варьирования, будем иметь на основании уравнений (77'')

$$d''d'q_h = \sum_{\alpha=0} \sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial \eta_{h\alpha}}{\partial q_\gamma} d'\varepsilon_\alpha d''q_\gamma + \sum_{\alpha=0}^{\nu} \eta_{h\alpha} d''d'\varepsilon_\alpha$$

или же, принимая во внимание те же равенства (77''),

$$d''d'q_h = \sum_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}}^{\nu} \sum_{\gamma=0}^{n} \eta_{\gamma\beta} \frac{\partial \eta_{h\alpha}}{\partial q_\gamma} d'\varepsilon_\alpha d''\varepsilon_\beta + \sum_{\alpha=0}^{\nu} \eta_{h\alpha} d''d'\varepsilon_\alpha.$$

Отсюда, меняя порядок варьирования d' и d'' и принимая во внимание, что для независимых переменных ε_α имеем

$$d'd''\varepsilon_\alpha = d''d'\varepsilon \quad (\alpha = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \nu),$$

получим при $h=0$, естественно, тождество, а при $h = 1,\ 2, \ldots,\ n$ будем иметь n уравнений:

$$d''d'q_h - d'd''q_h = \sum_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}}^{\nu} \eta_{h|\alpha\beta} d'\varepsilon_\alpha d''\varepsilon_\beta \qquad (h = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{84}$$

где положено

$$\eta_{h|\alpha\beta} = \sum_{\gamma=0}^{n} \left(\eta_{\gamma\beta} \frac{\partial \eta_{h\alpha}}{\partial q_\gamma} - \eta_{\gamma\alpha} \frac{\partial \eta_{h\beta}}{\partial q_\gamma} \right) \tag{85}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \nu).$$

Эти функции $\eta_{h|\alpha\beta}$ от $q_0, q_1, \ldots, q_n$, в силу их определения, удовлетворяют тождествам

$$\eta_{h|\alpha\beta} + \eta_{h|\beta\alpha} = 0,$$

т. е. при всяком индексе h составляют кососимметричную систему (относительно индексов α и β); знакопеременные билинейные формы (84) представляют собой так называемые *билинейные ковариантны* пфаффианов, стоящих в правых частях уравнений (77″) при $h = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что название *ковариантов* они получили благодаря тому обстоятельству, что при всякой замене независимых переменных преобразованные выражения этих форм будут точно совпадать с теми билинейными знакопеременными формами, которые получились бы, если бы определяющие первоначальные формы уравнения (84) были приложены к преобразованным выражениям исходных пфаффианов[1]).

Эти коварианты, в силу их знакопеременного характера относительно двух рядов переменных, $d'\varepsilon_\alpha$, $d''\varepsilon_\alpha$, будут исчезать всякий раз, когда будут совпадать вариации d', d'', и они будут обращаться в нуль тождественно, т. е. *при всяком выборе* d' и d'', если связи окажутся исключительно голономными (т. е., по существу, если уравнения Пфаффа (77″) получаются путем полного дифференцирования стольких же конечных уравнений между переменными). Действительно, в этом случае все q_h являются функциями от ν лагранжевых независимых параметров r_α, а кроме того, возможно, и времени, которое здесь, в согласии с тем, как это было сделано раньше, мы обозначим через r_0. Принимая за кинематические характеристики $\dot r_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu)$, мы должны будем рассматривать вместо уравнений (77″) при $h = 1, 2, \ldots, n$ равенства

$$dq_h = \sum_{\alpha=0}^{\nu} \frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha} dr_\alpha \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1]) См., например, T. Levi-Civita, Lezioni di calcolo differenziale assoluto (raccolte da E. Persico), Roma, Stock, 1925, стр. 30, 184; или же Goursat, Leçons sur le problème de Pfaff, Paris, Hermann, 1922, гл. I. Интересно отметить, что принятое в тексте предположение, что $d'd''\varepsilon_\alpha = d''d'\varepsilon_\alpha$, не является существенным для установления инвариантного характера билинейной знакопеременной формы в правой части (84). Энгель (Engel) доказал, что это свойство будет иметь место, если даже не делать никаких частных предположений относительно системы вторых дифференциалов. Ср. *Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, дополнительный том V (1914), стр. 16.

Поэтому будем иметь

$$\eta_{h\alpha}=\frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha},$$

и достаточно прямо вычислить любой билинейный ковариант $d''d'q_h - d'd''q_h$, чтобы убедиться, что он тождественно равен нулю.

Возвращаясь к общему случаю, когда связи не все голономны, рассмотрим тот случай, когда из двух операций дифференцирования d', d'' одна соответствует любому действительному перемещению материальной системы, а другая — любому виртуальному перемещению.

Положим

$$\begin{aligned} &d'\varepsilon_0=dt, \quad d'\varepsilon_\alpha=e_\alpha dt \\ &d''\varepsilon_0=0, \quad d''\varepsilon_\alpha=\delta\varepsilon_\alpha \end{aligned} \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, \nu).$$

Обозначая через χ_h $(h=1, 2, \ldots, n)$ соответствующие билинейные коварианты при этом выборе d', d'', получим

$$\chi_h=\delta dq_h-d\delta q_h=dt\sum_{\beta=1}^{\nu}\left(\eta_{h|0\beta}+\sum_{\alpha=1}^{\nu}\eta_{h|\alpha\beta}e_\alpha\right)\delta\varepsilon_\beta$$

или также (при перестановке двух индексов α, β)

$$\chi_h=dt\sum_{\alpha=1}^{\nu}\varphi_{h\alpha}\delta\varepsilon_\alpha \qquad (h=1, 2, \ldots, \nu), \tag{86}$$

где для краткости положено

$$\varphi_{h\alpha}=\eta_{h|0\alpha}+\sum_{\beta=1}^{\nu}\eta_{h|\beta\alpha}e_\beta \qquad (h=1, 2, \ldots, n; \ \alpha=1, 2, \ldots, \nu). \tag{87}$$

58. Члены неголономности. После этих предпосылок вернемся снова к уравнениям (82) движения системы, связи которой не все голономны (п. 55); вспоминая, что на основании уравнений (78) п. 54 имеем

$$\eta_{h\alpha}=\frac{\partial \dot q_h}{\partial e_\alpha} \qquad (h=1, 2, \ldots, n; \ \alpha=1, 2, \ldots, \nu),$$

можно написать эти уравнения в форме

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot q_h}{\partial e_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}\right)=\Phi_\alpha \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, \nu). \tag{82'}$$

Как было сказано в начале предыдущего пункта, речь идет о том, чтобы показать, что мы можем разбить в каждом из этих уравнений левую часть на два слагаемых, одно из которых можно назвать *неголономным*, а другое — *голономным*, в том смысле, что когда все связи являются голономными, первое слагаемое тождественно исчезает, а второе для голономных характеристик приводится к соответствующему лагранжеву биному.

Напомним, что в уравнениях (82′) живая сила T рассматривается как функция от $q, \dot{q}$ и, возможно, от t. Если на основании уравнений (77) мы представим себе живую силу выраженной через q, e и, возможно, также через t, и обозначим ее через T^*, то будем иметь

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_h}=\frac{\partial T}{\partial q_h}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_h},\quad \frac{\partial T^*}{\partial e_\alpha}=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}$$

$$(h=1,\ 2,\dots,\ n;\ \alpha=1,\ 2,\dots,\ \nu);$$

отсюда, составляя линейные комбинации первых из этих равенств и дифференцируя полным образом по t вторые, получим, очевидно, тождества

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\frac{\partial T}{\partial q_h}=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\frac{\partial T^*}{\partial q_h}-\sum_{\substack{h=1\\ j=1}}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_h}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha},$$

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial e_\alpha}-\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}.$$

Вычитая первое тождество из второго, найдем

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}\right)=\mathrm{A}_\alpha+\Omega_\alpha\quad(\alpha=1,\ 2,\dots,\ \nu),\tag{88}$$

где положено

$$\mathrm{A}_\alpha=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial e_\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\right\}\tag{89}$$

$$(\alpha=1,\ 2,\dots,\ \nu)$$

$$\Omega_\alpha=\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial e_\alpha}-\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\frac{\partial T^*}{\partial q_h}.\tag{90}$$

На основании тождеств (88) уравнения (82′) могут быть написаны в виде

$$\mathrm{A}_\alpha+\Omega_\alpha=\Phi_\alpha\quad(\alpha=1,\ 2,\dots,\ \nu);\tag{91}$$

теперь можно показать, что A_α представляют собой члены неголономности, а Ω_α — члены голономности.

С этой целью умножим обе части (89) на $dt\delta\varepsilon_\alpha$ и просуммируем от $\alpha=1$ до $\alpha=\gamma$. Таким образом, получим тождество

$$dt\sum_{\alpha=1}^{\nu}\mathrm{A}_\alpha\delta\varepsilon_\alpha=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\left\{dt\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_j}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial e_\alpha}\delta\varepsilon_\alpha-d\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\delta\varepsilon_\alpha\right\}.$$

Принимая во внимание уравнения (78) п. 54

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha} \delta\varepsilon_\alpha = \delta q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

можно написать последнее тождество в виде

$$dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} \mathrm{A}_\alpha \delta\varepsilon_\alpha = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \left\{ dt \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_j} \delta q_j - d\delta q_h \right\}$$

или, замечая, что $\dot{q}_h dt = dq_h$, и обозначая, как в предыдущем пункте, через χ_h билинейный ковариант $\delta dq_h - d\delta q_h$, в виде

$$dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} \mathrm{A}_\alpha \delta\varepsilon_\alpha = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \chi_h. \tag{92}$$

Так как в случае исключительно голономных связей билинейные коварианты χ_h тождественно исчезают (предыдущий пункт), мы заключаем, что при таком предположении из этого тождества следует

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \mathrm{A}_\alpha \delta\varepsilon_\alpha = 0$$

при любом выборе $\delta\varepsilon_\alpha$; а это как раз равносильно тождественному исчезанию отдельных членов A_α, характер неголономности которых таким образом обнаружен.

Теперь, прежде чем перейти к членам Ω_α, укажем попутно на крайне сжатую форму, которая в общем случае, т. е. когда не все связи голономны, получается для членов неголономности A_α из соотношения (92). Достаточно вместо χ_h подставить их выражения (86) и приравнять в обеих частях коэффициенты при произвольных величинах $\delta\varepsilon_\alpha$, чтобы получить равенства

$$\mathrm{A}_\alpha = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \varphi_{h\alpha}, \tag{93}$$

где $\varphi_{h\alpha}$ определяются равенствами (87).

Переходя затем к членам Ω_α, определяемым равенствами (90), вспомним, что если связи окажутся все голономными и если $r_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu)$ представляют собой ν независимых лагранжевых координат, позволяющих выразить первоначальные координаты q, число которых превышает число степеней свободы, то будем иметь (п. 54)

$$\eta_{h0} = \frac{\partial q_h}{\partial t}, \quad \eta_{h\alpha} = \frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha}, \quad e_\alpha = \dot{r}_\alpha, \quad \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha} = \frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha};$$

таким образом, на основании формул (90), в этом случае, т. е. в случае, когда T^* обозначает живую силу, выраженную через r, $\dot{r}$ и, возможно, через t, получим

$$\Omega_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{r}_\alpha} - \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial q_h}\frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha},$$

т. е. как раз

$$\Omega_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{r}_\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial r_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Заметим, что впервые выделил в уравнениях неголономных систем члены неголономности Вольтерра[1] *), который применял для этой цели способ, существенно отличный от способа, характеризующегося систематическим применением пфаффианов и их билинейных ковариантов[2]).

Вольтерра же принадлежит одно важное замечание относительно интегрирования неголономных систем, которым мы займемся в следующем пункте.

59. Гиростатический характер членов неголономности. Системы с независимыми характеристиками по Вольтерра. Предположим, что связи, среди которых обязательно есть неголономные, не зависят от времени. В этом предположении γ_{h0} будут тождественно равны нулю, и, следовательно, в силу соотношений (85) будут равны нулю и все $\eta_{h|0\alpha}$, так что формулы (87) примут вид

$$\varphi_{h\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \eta_{h|\beta\alpha} e_\beta \qquad (h = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$

[1]) Volterra, Atti dell'Acc. di Torino, т. XXXIII, 1897, стр. 451—475, 542—558.

*) Несколько раньше члены неголономности выделил С. А. Чаплыгин [4]. Сергей Алексеевич Чаплыгин родился 5 апреля 1869 г. в г. Раненбурге Рязанской губ., умер в 1942 г. После окончания Московского университета в 1890 г. был оставлен Н. Е. Жуковским при университете; защитил магистерскую диссертацию в 1898 г. и докторскую в 1903 г. Первые работы Чаплыгина были посвящены динамике твердого тела и, в частности, неголономным системам. В дальнейшем С. А. Чаплыгин много работал в области аэродинамики и вместе с Н. Е. Жуковским создал всю аэродинамику плоско-параллельного движения, а также заложил основы пространственной аэродинамики. В своей работе „О газовых струях" (сообщено Московскому математическому обществу в 1896 г.) С. А. Чаплыгин заложил основы современной газовой динамики. С. А. Чаплыгин был профессором Московского университета, руководил научно-исследовательским институтом ЦАГИ, а в 1929 г. был избран действительным членом Академии наук СССР. *(Прим. ред.)*

[2]) По этому вопросу надо также указать более новые исследования Г. Гамеля. См., в частности, G. Hamel, Uber nicht holonome Systeme. *Math. Annalen*, т. 92, 1924, стр. 31—41.

С другой стороны, в этом случае виртуальные перемещения не будут отличаться от действительных (за исключением разве лишь того обстоятельства, не имеющего здесь значения, что в первых время остается неизменным, а во вторых и оно также испытывает приращение dt); поэтому, вспоминая что при $d' = d''$ билинейные ковариантыы исчезают, мы выводим из равенств (86) тождества

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \varphi_{h\alpha} e_\alpha = 0. \tag{94}$$

Если теперь, как это делалось в п. 56 для уравнений (82), образуем и для уравнений (91) дифференциал живых сил

$$dL = dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} \Phi_\alpha e_\alpha = dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} (\mathrm{A}_\alpha + \Omega_\alpha) e_\alpha$$

и примем во внимание, что в силу соотношений (93) имеем тождественно

$$dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} \mathrm{A}_\alpha e_\alpha = dt \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \sum_{\alpha=1}^{\nu} \varphi_{h\alpha} e_\alpha,$$

то увидим на основании тождеств (94), что члены A_α ничего не прибавляют к этой интегрируемой комбинации. Другими словами, *члены* A_α, *происходящие исключительно от неголономных связей, имеют гироскопический характер* в смысле, разъясненном в п. 44. Это и есть упомянутое выше замечание Вольтерра.

Прибавим еще, что Вольтерра назвал *системами с независимыми характеристиками* такие системы, для которых левые части $\mathrm{A}_\alpha + \Omega_\alpha$ уравнений движения содержат явно только кинематические характеристики e (т. е. не зависят от q).

В этом случае определение так называемого *спонтанного движения* системы, т. е. движения при отсутствии активных сил, которое определяется уравнениями

$$\mathrm{A}_\alpha + \Omega_\alpha = 0,$$

может быть разбито на две отдельные операции: определение характеристик e на основе предыдущей системы и последующее определение q на основе параметрических уравнений связей (77).

Следует заметить, что для систем со связями, не зависящими от времени, члены голономности Ω_α можно всегда сделать не зависящими от q посредством подходящего выбора характеристик e_α, какова бы ни была природа связей (77). Действительно, заметим, что при допущенном предположении T^* после вычисления будет определенной положительной квадратичной формой относительно e_α с коэффициентами, которые, естественно, в общем случае будут зависеть от q. Далее, как известно, можно всегда бесконечным числом способов вместо e_α подставить столько же их линейных комбинаций e'_α с коэффициентами, зависящими от q, и притом так, чтобы привести T^* к канонической форме

$$T^* = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\nu} e'^2_\alpha;$$

после этого на основании формул (90) будем иметь

$$\Omega_\alpha = \dot{e}'_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$

60. Уравнения Аппеля. Обращаясь снова к уравнениям движения системы с неголономными связями (82)

$$\sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right) = \Phi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

покажем, что их левые части, как это было и в случае уравнений Лагранжа, все можно выразить посредством одной единственной функции[1]), которая, однако, будет значительно менее простой, чем живая сила T. Эта функция составляется из ускорений $\boldsymbol{a}_i$ точек P_i так же, как живая сила составляется из скоростей $\boldsymbol{v}_i$. Речь идет о функции (называемой также *энергией ускорений системы*)

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i,$$

которую нужно рассматривать выраженной (помимо времени, если связи зависят от него) в зависимости от лагранжевых координат q, кинематических характеристик e и их производных $\dot{e}$.

Чтобы выяснить, каким образом левые части уравнений (82) могут быть выражены посредством функции S, будем исходить от выражений скоростей отдельных точек P_i (33)

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

и, рассматривая в них $\dot{q}_h$ выраженными посредством q, e, t при помощи (77), продифференцируем их еще раз по t. Таким образом, получим

$$\boldsymbol{a}_i = \sum_{h=1}^{n} \ddot{q}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

---

[1]) Appell, *Comptes Rendus*, т. 129, 1899; *Crelle*, т. 121 (1900); *Journal de math.*, 5-я серия, т. VI, 1900.

где опущенные члены не зависят от $\ddot{q}$ или, точнее, как это следует из формул (77), зависят только от q, e, t. Поэтому, если возьмем частную производную от ускорения a_i по любому $\dot{e}_\alpha$, то эти опущенные члены совсем не появятся в результате, и мы получим

$$\frac{\partial a_i}{\partial \dot{e}_\alpha}=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \ddot{q}_h}{\partial \dot{e}_\alpha}\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N,\ \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu). \tag{95}$$

Повторяя, начиная с соотношений (77), выводы, которые привели нас от уравнений (33) к уравнениям (95), получим

$$\frac{\partial \ddot{q}_h}{\partial \dot{e}_\alpha}=\eta_{h\alpha} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ r;\quad \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu),$$

так что уравнениям (95) мы можем придать вид

$$\frac{\partial a_i}{\partial \dot{e}_\alpha}=\sum_{h=1}^{n}\eta_{h\alpha}\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad \begin{matrix}(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\\ \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu).\end{matrix} \tag{95'}$$

Вспоминая теперь первоначальное выражение (38) лагранжевых биномов

$$\tau_h=\sum_{i=1}^{N} m_i a_i\cdot\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

можно левые части уравнений (82) написать в виде

$$\sum_{h=1}^{n}\eta_{h\alpha}\sum_{i=1}^{N} m_i a_i\cdot\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu),$$

или же

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i\cdot\sum_{h=1}^{n}\eta_{h\alpha}\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu),$$

или, наконец, принимая во внимание уравнения (95'),

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i\cdot\frac{\partial a_i}{\partial \dot{e}_\alpha} \qquad (\alpha=1,\ 2\ \ldots,\ \nu).$$

Мы видим таким образом, что получили частные производные от S по $\dot{e}_\alpha$; уравнения (82) можно написать теперь в крайне сжатой форме, принадлежащей Аппеллю,

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{e}_\alpha}=\Phi_\alpha \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu).$$

§ 9. Геометрические дополнения: траектории дифференциальной системы второго порядка; спонтанные движения голономной системы и геодезические линии

61. Траектории. В виде дополнения к развитой в предыдущих параграфах теории дифференциальных уравнений движения какой угодно материальной системы (голономной или неголономной) добавим некоторые замечания о геометрическом представлении движения, т. е., с аналитической точки зрения, о различных обстоятельствах, которые могут представиться, когда из уравнений общего интеграла исключается время.

В простейшем случае одной материальной точки мы называли *траекториями* кривые, которые в физическом пространстве описывает движущаяся точка при различных движениях, определяемых динамическим уравнением $ma = F$, соответствующим рассматриваемому случаю. Речь идет о том семействе кривых, уравнения которых получатся после исключения независимого переменного t из уравнений общего решения дифференциального уравнения $ma = F$

$$x = x(t|c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6),\quad y = y(t|c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6),$$
$$z = z(t|c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6),$$

где c обозначают шесть произвольных постоянных интегрирования. В общем случае после исключения t в уравнениях траектории остаются все эти шесть произвольных постоянных. Но при частных предположениях может случиться, что исключение t повлечет за собой исчезновение какой-нибудь из постоянных. Так, например, если сила F есть ньютонианское притяжение, исходящее из некоторого неподвижного центра O, то все траектории будут коническими сечениями, имеющими фокус в точке O (гл. III, § 2); эти кривые зависят только от пяти существенных постоянных (две для определения плоскости орбиты, проходящей через O, одна для ориентации фокальной оси в этой плоскости и остальные две — параметр и эксцентриситет). Если сила равна нулю, то траектории сведутся к ∞^4 прямых (геодезические линии физического пространства).

Все эти рассуждения можно обобщить на движения, определяемые общей нормальной системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{q}_h = \varphi_h(q\,|\,\dot{q}\,|\,t) \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{96}$$

в частности лагранжевой системой (50) с гессианом Δ, отличным от нуля.

Для этой цели удобно интерпретировать n лагранжевых параметров q как обобщенные координаты точек абстрактного пространства n измерений Γ_n (*пространство конфигураций*). *Траекториями* системы в этом пространстве называются те кривые, уравнения которых получаются путем исключения t из уравнений $q_h = q_h(t|c)$, представляющих общее решение системы (96). Можно, если угодно, эти последние уравнения рассматривать как параметрические уравнения семейства траекторий, истолковывая t как вспомогательный параметр, и сосредоточить внимание исключительно на последовательности точек в изображающем пространстве Γ_n.

Какой бы из этих способов представления траекторий ни иметь в виду, оказывается выгодным задачу изучения траекторий поставить в дифференциальной форме; таким способом мы достигнем уточнения числа существенных постоянных, от которых зависят траектории, применяя для этого, как увидим, обычные теоремы существования интегралов систем дифференциальных уравнений.

Чтобы сделать более очевидной аналогию с элементарными случаями, приведенными выше, условимся истолковывать обобщенные координаты q в пространстве Γ_n как прямоугольные декартовы координаты; заметим, что при этом направление, исходящее из какой-нибудь точки, характеризуется отношениями дифференциалов dq от q, и любую кривую в пространстве Γ_n можно определить, выражая $n-1$ координат произвольной ее точки как функции от n-й координаты.

Для наших целей удобно заменить в данной системе дифференциальных уравнений (96) время t одной из координат q, рассматривая ее как независимую переменную, а t (наравне с $n-1$ остальными q) как функцию от нее. Это, конечно, можно сделать, так как при этом будут исключены только те возможные решения системы (96), которые соответствуют покою, т. е. в которых *все* q остаются постоянными. Исключая этот случай и изменяя, если необходимо, индексы, мы можем всегда предположить, что координата q_n не будет постоянной, т. е. что производная $\dot{q}_n$ не будет тождественно равна нулю. Обращаясь к интервалу времени, в котором всегда $\dot{q}_n \neq 0$, условимся вместо t принять за независимую переменную q_n; обозначая штрихами производные по этой новой независимой переменной, будем иметь

$$t' = \frac{dt}{dq_n}, \tag{97}$$

и, следовательно,

$$\dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt} = \frac{1}{t'}, \quad \ddot{q}_n = -\frac{t''}{t'^3}; \tag{98}$$

$$\dot{q}_h = \frac{1}{t'} q_h', \quad \ddot{q}_h = \frac{1}{t'^2} q_h'' - \frac{t''}{t'^3} q_h' \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{99}$$

Возьмем теперь снова нашу нормальную систему (96)

$$\ddot{q}_h = \varphi_h(q \mid \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n \mid t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

и исключим в правых частях $\dot{q}$ посредством (98), (99) таким образом, чтобы придать им вид

$$\varphi_h\left(q \,\middle|\, \frac{1}{t'} q_1', \ldots, \frac{1}{t'} q_{n-1}', \ldots, \frac{1}{t'} \,\middle|\, t\right);$$

в силу этого правые части будут функциями, кроме q, от аргументов $q_1', \ldots, q'_{n-1}$, t и t'. Считая теперь, что φ_h имеют указанное выражение, мы можем придать последнему из уравнений (96) следующий вид:

$$t'' = -t'^3\varphi_n, \tag{96'}$$

если принять во внимание второе из равенств (98). Остальные уравнения (96) на основании второй группы равенств (99) и только что написанного уравнения примут вид

$$q''_h = t'^2(\varphi_h - q'_h\varphi_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{96''}$$

Система (96'), (96''), как мы видим, представляет собой все еще нормальную систему второго порядка относительно n неизвестных функций $t, q_1, \ldots, q_{n-1}$ независимого переменного q_n. Поэтому на основании обычной теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений можно утверждать, что для системы (96'), (96'') существует решение и притом единственное, для которого в соответствии с заданным значением $q^0{}_n$ независимой переменной остальные $n-1$ переменных q и соответствующие им производные q' вместе с t и t' принимают наперед заданные произвольные значения. Условие того, что кривая в пространстве Γ_n проходит через заданную точку P_0 в заданном направлении, выражается тем обстоятельством, что при указанном значении q_n^0 координаты q_n остальные $(n-1)$ координат q и их производные q' принимают заданные значения. Отсюда можно заключить, что через каждую точку пространства Γ_n в каждом из возможных направлений проходит *по крайней мере* одна траектория. Так как точек в пространстве Γ_n будет ∞^n и из каждой из них выходит ∞^{n-1} направлений, а на каждой кривой существует ∞^1 точек и в каждой из них, за вычетом лишь исключительных (особых точек), однозначно определяется направление касательной, то можно поэтому сказать, что *траектории дифференциальной системы второго порядка* (96) *с n неизвестными функциями образуют множество, состоящее по крайней мере из ∞^{2n-2} элементов.*

Но даже указав значения, которые при $q_n = q_n^0$ должны принять $2n-2$ функций q_h и q_h' $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$, можно еще произвольно выбирать начальные значения t и t', так что в общей сложности для системы дифференциальных уравнений (96'), (96'') или для эквивалентной ей системы (96) имеются ∞^2 решений, траектории которых в Γ_n выходят из одной и той же точки P_0 в одном и том же направлении; и a priori нельзя решить, соответствуют ли этим ∞^2 решениям действительно столько же различных траекторий, или же эти траектории приводятся к ∞^1, или даже только к одной траектории. Наконец, справедливо также, что в общем решении координаты $q_1, \ldots, q_{n-1}$ представятся при более широких предположениях зависящими существенным образом от переменной

q_n, от геометрических постоянных, соответствующих точке P_0 и заданных направлений через нее, а не только от t_0 и t_0'. Не исключена также возможность и того, что в частных случаях одна из этих постоянных t_0, t_0' или обе вместе могут отсутствовать в указанных выше выражениях координат $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$.

Таким образом, в то время как здесь можно утверждать, что, вообще говоря, система (96) будет иметь ∞^{2n} траекторий, в ближайших пунктах мы покажем на двух особенно наглядных примерах, что число траекторий может быть сведено к ∞^{2n-1} или даже к ∞^{2n-2}.

62. Дифференциальные системы с ∞^{2n-1} траекториями. Предположим, что уравнения системы (96) не содержат явно t. В этом случае эта переменная не появится также и в правых частях уравнений эквивалентной системы (96′), (96″), а с другой стороны, там появится t', и левую часть уравнения (96′) можно написать в виде $\frac{dt'}{dq_n}$. Мы видим, таким образом, что в этом случае систему (96′), (96″) можно рассматривать как нормальную систему с n неизвестными функциями t', $q_1, \ldots, q_{n-1}$ от q_n, разрешенную относительно первой производной от t' и относительно вторых производных от остальных $n-1$ неизвестных функций. Отсюда мы заключаем, что общее решение, в частности, выражения $q_1, \ldots, q_{n-1}$ через q_n, т. е. уравнения траекторий, зависят (самое большее) от $2n-1$ произвольных постоянных.

63. Спонтанные движения. Геодезические линии. Рассмотрим, наконец, спонтанные движения, т. е. движения при отсутствии сил, голономной системы с n степенями свободы и со связями, не зависящими от времени; живая сила такой системы представляется, как обычно, равенством

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\l=1}}^{n} a_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l.$$

Траектории (динамические) в пространстве Γ_n таких спонтанных движений называются геодезическими линиями, к которым мы вернемся в § 4, гл. XI. Здесь же мы предполагаем доказать, что траекторий в этом случае будет ∞^{2n-2}.

Заметим прежде всего, что при отсутствии сил уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} a_{jh}\dot{q}_j-\sum_{\substack{j=1\\l=1}}^{n}\frac{\partial a_{jl}}{\partial q_h}\dot{q}_j\dot{q}_l=0 \qquad (h=1,\ 2, \ldots, n),$$

и если выполнить дифференцирование и ввести так называемые *символы Кристоффеля* [1]) *первого рода*

$$\begin{bmatrix} jl \\ h \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jh}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{hl}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_h}\right) \quad (j,\ h,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,n),$$

то можно написать

$$\sum_{j=1}^{n} a_{hj}\ddot{q}_j - \sum_{\substack{j=1\\l=1}}^{n} \begin{bmatrix} jl \\ h \end{bmatrix} \dot{q}_j q_l = 0 \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Для того чтобы привести систему к нормальному виду, мы должны разрешить предыдущие уравнения относительно $\ddot{q}$, для чего умножим обе части каждого из h уравнений на величину $a^{(hi)}$, взаимную с a_{hi} (алгебраическое дополнение, деленное на определитель) и сложим полученные уравнения. Таким образом, вводя при этом символы Кристоффеля второго рода

$$\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} = \sum_{h=1}^{n} a^{(hi)} \begin{bmatrix} jl \\ h \end{bmatrix},$$

мы получим дифференциальные уравнения спонтанных движений в разрешенной форме

$$\ddot{q}_i = -\sum_{\substack{j=1\\l=1}}^{n} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} \dot{q}_j \dot{q}_l \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{100}$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (96), мы видим, что φ_i обладают в этом случае двумя особенностями: не содержат явно времени t и являются однородными функциями второй степени относительно $\dot{q}$. Если теперь, пользуясь способом п. 61, мы примем за новую независимую переменную q_n вместо t, то получим, принимая во внимание уравнения первого порядка (98), (99) и имея в виду отмеченную однородность φ_i, тождества

$$\varphi_i\left(q \,\Big|\, \frac{1}{t'} q_1',\ \ldots,\ \frac{1}{t'} q_{n-1}',\ \ \frac{1}{t'}\right) = \frac{1}{t'^2}\varphi_i \quad (q \mid q_1',\ \ldots,\ q_{n-1}', 1),$$

[1]) Эльвин Бруно Кристоффель родился в Монжуа (на Рейне) в 1829 г., умер в Страсбурге в 1900 г. Был профессором в Политехнической школе в Цюрихе, в Берлинской промышленной академии и в Страсбургском университете. Прямой ученик Дирихле, а в широком смысле — и Римана, он дал ряд замечательных исследований в области алгебраических и абелевых функций, инвариантов, уравнений с частными производными и дифференциальной геометрии.

где в правой части величина $\frac{1}{t'^2}$ умножается на функцию, не зависящую от t'. Если для простоты обозначим эту функцию через ψ_i, то $n-1$ уравнений (96″) в этом случае примут вид

$$q_i'' = \psi_i - q_i'\psi_n \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

и составят нормальную систему второго порядка относительно $n-1$ неизвестных функций $q_1, \ldots, q_{n-1}$ от q_n, которая сама по себе (т. е. без того, чтобы была необходимость присоединить к ней уравнение (96′)) достаточна для определения траекторий системы (100) или геодезических линий. Поэтому мы заключаем, что эти траектории зависят от $2n-2$ постоянных, т. е. как раз от наименьшего возможного числа их.

Заметим, наконец (не давая этому доказательства), что отмеченное выше свойство является характеристическим для консервативных случаев спонтанного движения, поскольку во всех других случаях консервативных сил или сил, зависящих только от положения (лишь бы они были отличны от нуля), траектории будут действительно зависеть от $2n-1$ произвольных постоянных, если связи, само собой разумеется, не зависят от времени [1]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что если три точки движутся из состояния покоя под действием только внутренних сил, то касательные к траекториям в одновременных положениях трех точек в любой момент сходятся в одной точке или параллельны.

Достаточно принять во внимание, что количества движения трех точек, если считать их приложенными к этим точкам, образуют в любой момент уравновешенную систему векторов.

2. Посредством рассуждений, аналогичных рассуждениям п. 15, показать, что человек, стоящий на горизонтальном полу, может повертываться вокруг вертикали, даже если пол абсолютно гладкий, совершая подходящие движения рукой.

3. Предположим, что однородная цепочка, полная длина которой l, перекинута через малый блок C, не имеющий трения. Одна часть цепочки переменной длины $CA = q$ висит свободно, а другая, тоже висящая вертикально, имеет постоянную длину $CP = c$; остальная часть цепочки $l - c - q$ покоится в собранном виде на горизонтальной неподвижной подставке, причем ее следует уподобить одной материальной точке P.

Допустим, что единственная действующая сила есть вес, и рассмотрим промежуток времени, в течение которого конец A цепи опускается вертикально. Что произойдет, например, в том случае, если в начальный момент имеем $q > c$ и система предоставлена самой себе в состоянии покоя.

Обозначим через ν плотность (линейную) цепочки, через $v = \dot{q}$ — скорость разматывания, которая является в то же время скоростью точки A, и, нако-

---

[1]) Ср. P. Painlevé, Sur les mouvements et les trajectoires des systèmes. *Bull. de la Soc. math. de France*, т. XXII, 1894.

нец, через T — натяжение в точке P цепочки, возникающее благодаря связи вертикальной части PC цепочки с лежащей частью.

Для того чтобы написать уравнение движения задачи, введем вертикальную реакцию R, действию которой подвергается цепочка в C со стороны блока, и применим теорему о количестве движения в проекциях на вертикаль, отдельно для обеих частей цепочки CA и PC. Исключая R, найдем

$$\nu(q+c)\dot{v}=g\nu(q-c)-T.$$

Так как $v=\dot{q}$, то это уравнение будет служить для определения движения, но оно недостаточно для определения T. Для этой цели достаточно еще один раз применить теорему о количестве движения к материальному элементу цепочки, покидающему опору за элемент времени dt, следующий за любым моментом t, и располагающемуся затем вертикально. При данном значении q длина такого элемента будет как раз dq, а его масса νdq. С другой стороны, в начале элемента времени он имеет скорость, равную нулю, а в конце — скорость v, так что приращение проекции количества движения на вертикаль, направленную вверх, будет равно $\nu v dq$, а отношение этого приращения к dt будет νv^2. Это отношение надо приравнять сумме аналогичных проекций (на вертикаль, направленную вверх) внешних сил, действующих на элемент цепочки, которых в действительности будет четыре: вес, реакция опоры и два натяжения на концах элемента, о котором идет речь. Из этих натяжений то, которое происходит от связи с вертикальным куском, будет само вертикальным, направленным вверх и равным T; другое будет горизонтальным и поэтому не даст составляющей, направленной вверх. Что же касается веса и реакции, то эти силы обе бесконечно малы, и, следовательно, ими можно пренебречь, поэтому остается

$$\nu v^2=T.$$

Если примем во внимание, что

$$\dot{v}=\frac{dv}{dq}\dot{q}=v\frac{dv}{dq},$$

то будем иметь уравнение, связывающее скорость v падения цепи с параметром q,

$$(q+c)v\frac{dv}{dq}+v^2=g(q-c).$$

Это уравнение непосредственно интегрируется после того, как умножим обе его части на $2(q+c)$. Интеграл имеет вид

$$(q+c)^2v^2=2g\left(\frac{1}{3}q^3-c^2q\right)+\text{const}.$$

Если движение начинается из состояния покоя, причем A находится на уровне немного более низком уровня точки $P\,(q_0=c)$, то постоянная будет равна $\frac{4qc^3}{3}$. При этом предположении, если $l=12c$, то скорость, которую будет иметь конец A в тот момент, когда вся цепочка придет в движение, будет равна 22/39 скорости свободного падения.

4. Тяжелая однородная цепочка AP длины l подвешена в A таким образом, что, свешиваясь вертикально, другим концом P слегка касается неподвижной горизонтальной плоскости. В заданный момент $(t=0)$ верхний конец ее отпускается, в силу чего цепочка падает, складываясь в P. Продолжительность падения, очевидно, есть $\sqrt{\frac{2l}{g}}$. Рассуждая аналогично тому, как в предыдущем упражнении, и применяя теорему о количестве движения к элементам цепочки, которые один за другим будут укладываться на опоре, показать, что реакция плоскости в любой момент $t<\sqrt{\frac{2l}{g}}$ будет равна утроенному весу той части цепочки, которая уже находится на плоскости в этот момент.

5. Материальная система, деформируемая как угодно, выходит из состояния покоя, подвергаясь только действию внутренних консервативных сил. Показать, что она может при случае принять снова первоначальную конфигурацию, в отличном от начального положении, но никогда с отличной от него ориентацией. Ср. Painlevé, Comptes Rendus, т. 139, 1904, стр. 1170—1174.

6. Установившееся движение нити. Предполагается, что гибкая и нерастяжимая нить пробегает вдоль самой себя с постоянной скоростью v таким образом, что ее конфигурация остается неизменной. Указать условия, при которых такое движение осуществляется.

Для этого достаточно применить принцип Даламбера, подставляя в естественные уравнения равновесия (т. I, гл. XIV, п. 34) вместо единичной силы F потерянную силу $F-\nu a$ (ν — линейная плотность нити).

Вывести отсюда, что натяжение, которое испытывает нить, в предполагаемом установившемся движении будет равно статическому натяжению, уменьшенному на $\frac{\nu v^2}{r}$ (r — радиус кривизны конфигурации нити в любой ее точке).

7. Дана материальная система со связями, не зависящими от времени. Две какие угодно системы активных сил Σ_1, Σ_2 определяют для нее, начиная от состояния покоя, такие перемещения, что работа, совершаемая силами системы Σ_1 на перемещениях, соответствующих Σ_2, равна работе, совершаемой силами системы Σ_2 на перемещениях, соответствующих Σ_1. Ср. Morera, *Rend. Lincei*, серия V, т. II, 1893_2, стр. 245—246.

8. Для материальной системы, находящейся под действием каких-нибудь сил, Клаузиус[1]) называл *вириалом* системы сил относительно какой-нибудь точки O функцию

$$V=\sum_{i=1}^{N} F_i\overrightarrow{OP_i},$$

где F_i обозначает, как обычно, полную силу, действующую на любую точку P_i системы.

Предполагается, в частности, что речь идет о силах внутреннего происхождения, зависящих только от взаимных расстояний между точками. В этом случае, если через Δ_{ij} обозначим расстояние между любыми двумя точками

[1]) Рудольф Клаузиус (Rudolf Clausius) родился в Кеслине (Померавия) в 1822 г., умер в Бонне в 1888 г., был профессором физики в университетах Цюриха, Вюрцбурга и Бонна. Классическими являются его исследования по теории тепла и по термодинамике в ее наиболее общей постановке, собранные в двух томах. Всеобщее внимание ученых в свое время привлекла также одна его формула, относящаяся к элементарным законам электродинамики.

P_i, P_j, то составляющая по $P_i P_j$ силы, которую испытывает P_i со стороны P_j, будет вида $\varphi(\Delta_{ij})$; та же сила в векторной форме представится в виде

$$\frac{\varphi(\Delta_{ij})}{\Delta_{ij}} \overrightarrow{P_i P_j}.$$

Естественно, что P_j будет испытывать со стороны P_i действие прямо противоположной силы.

Показать далее, что вириал внутренних сил этого типа будет независимым от O и равным

$$-\frac{1}{2} \boldsymbol{S} \Delta_{ij} \varphi(\Delta_{ij}),$$

где символ $\boldsymbol{S}$ обозначает сумму, распространенную на простые попарные сочетания из индексов $1, 2, \ldots, N$.

9. Для какой-нибудь движущейся точки P относительно произвольной неподвижной точки O имеет место тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OP}^2 = \overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}^2,$$

где $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{a}$ обозначают скорость и ускорение точки.

Отсюда, для какой угодно системы материальных точек P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, находящихся под действием сил $\boldsymbol{F}_i$, вывести тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP}_i^2 = V + 2T,$$

где V обозначает вириал системы относительно точки O (предыдущее упражнение) и T — живую силу.

На основании этой формулы доказать, что если движение системы является периодическим, то среднее значение живой силы T в течение одного периода равно аналогичному среднему значению вириала.

Это замечание принадлежит Клаузиусу, который нашел интересные применения его к механической теории тепла.

10. Из тождества предыдущего упражнения вывести, что если силы $\boldsymbol{F}_i$ являются производными от потенциала U, представляющего собой однородную функцию второй степени от координат x_i, y_i, z_i точек P_i системы, то полярный момент инерции

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP}_i^2$$

будет квадратичной функцией времени (теорема Якоби).

11. Доказать посредством рассуждений, аналогичных рассуждениям п. 37, что для голономной системы с какими угодно связями имеем

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h.$$

Отсюда, принимая во внимание тождества

$$\frac{d}{dt} \delta P_i = \delta \boldsymbol{v}_i, \quad \boldsymbol{a} \cdot \delta P_i = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{v}_i \cdot \delta P_i) - \boldsymbol{v}_i \cdot \delta \boldsymbol{v}_i,$$

вывести соотношение

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \delta P_i = \frac{d}{dt} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h - \delta T$$

и непосредственно подтвердить, что правая часть приводится к

$$\sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h,$$

где, как обычно, τ_h обозначают лагранжевы биномы.

Приравнивая это выражение виртуальной работе $\sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h$, мы, естественно, найдем уравнения Лагранжа во второй форме. Этот способ вывода дан Бельтрами[1]). Ср. Beltrami, Opere, т. IV, стр. 537.

12. Если для голономной системы живая сила T имеет постоянные коэффициенты, то

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{\overset{0}{q}}_h \overset{1}{p}_h = \sum_{h=1}^{n} \dot{\overset{1}{q}}_h \overset{0}{p}_h,$$

где $\dot{q}^0, p^0$ обозначают лагранжевы скорости и соответствующие количества движения в любой момент t_0 и $\dot{q}^1$, p^1 — аналогичные элементы в другой момент t_1.

Если в момент t_0 обращаются в нуль все скорости, за исключением $\dot{\overset{0}{q}}_i$, и все моменты, за исключением $\overset{0}{p}_k$, то в течение всего движения мы будем иметь

$$\frac{p_i}{\dot{q}_k} = \mathrm{const}.$$

13. Каким условиям должна удовлетворять функция Лагранжа $\mathfrak{L}$ положений P_i и скоростей $\boldsymbol{v}_i$ материальных точек, чтобы она не зависела от декартовой системы координат или, что одно и то же, чтобы она зависела только от взаимных положений и относительных скоростей различных точек системы?

---

[1]) Евгений Бельтрами (Eugenio Beltrami) родился в Кремоне в 1835 г., умер в Риме в 1900 г. После того как вынужден был прервать в 1856 г. обучение в университете, начатое им в Павии, он поступил на службу (на железную дорогу), на которой прослужил шесть лет, т. е. до того момента, когда обнаружилось его значение, как математика, благодаря его первым работам по дифференциальной геометрии. Получил звание профессора алгебры и аналитической геометрии в университете в Болонье. Затем перешел к чтению более сложных лекций в университетах Пизы, Павии и Рима. С 1876 г. до смерти преподавал математическую физику. Был президентом Академии наук (Accademia dei Lincei) и сенатором. Его работы, собранные в четырех томах in folio, показывают плодотворную разносторонность его таланта и с точки зрения формы представляют образец научной прозы. Основную важность представляют его исследования о ньютоновском потенциале и его дифференциальные параметры; знаменитым является его Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea, где он дает конкретное осуществление геометрии Лобачевского на обыкновенной поверхности вращения (псевдосфере).

Чтобы найти такие условия, достаточно выразить, что $\mathfrak{L}$ остается неизменной при всяком преобразовании декартовых координат или, что одно и то же, при всяком перемещении системы точек P_i и векторов v_i как неизменяемой системы; можно ограничиться рассмотрением любого бесконечно малого перемещения системы как неизменяемого твердого тела, так как всякое конечное перемещение можно разложить на такие перемещения.

Далее, если dO и $d\omega$ суть характеристические векторы бесконечно малого перемещения системы точек P_i и векторов v_i как твердого тела, то для отдельных точек P_i будем иметь (т. I, гл. III, п. 24)

$$dP_i = dO + d\omega \times \overrightarrow{OP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

что касается векторов v_i, то достаточно заметить, что предполагаемое бесконечно малое перемещение можно рассматривать как переносное движение, чтобы заключить (т. I, гл. IV, п. 10), что

$$dv_i = d\omega \times v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

после чего, обозначая через x_i, y_i, z_i координаты точки P_i, через $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ — составляющие вектора v_i и принимая во внимание произвольность векторов dO и $d\omega$, мы увидим, что желаемые условия выразятся равенствами

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \left\{ y_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y_i} + \dot{y}_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}_i} - \dot{z}_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}_i} \right\} = 0$$

и аналогичными им, которые выводятся из них посредством круговой перестановки букв x, y, z.

14. В предположении, что функция Лагранжа $\mathfrak{L}$ системы из N материальных точек P_i, отнесенных к декартовым осям, удовлетворяет условиям, указанным в предыдущем упражнении, доказать, что $3N$ лагранжевых уравнений движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_i} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

допускают первые интегралы

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}_i} = \text{const}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \left(y_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}_i} - z_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}_i} \right) = \text{const}$$

и остальные четыре, получающиеся из них путем круговой перестановки букв x, y, z.

Этот результат обобщает обычные интегралы количеств движения и интегралы моментов, которые существуют для $\mathfrak{L} = T - U$, где U зависит только от конфигурации системы.

15. Маятник переменной длины. Из замечаний гл. I, п. 34 непосредственно следует, что живая сила маятника, длина которого l изменяется с временем по какому-либо закону, определяется равенством

$$T = \frac{1}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + \dot{l}^2),$$

если для простоты масса маятника принимается равной I. Для потенциала (единичного) имеем здесь $U = gl\cos\theta$.

Движение определяется уравнением

$$\frac{d}{dt}(l^2\dot{\theta}) + gl\sin\theta = 0,$$

к которому можно было бы придти также и на основании теоремы о результирующем моменте количеств движения относительно нормали к плоскости колебаний в центре подвеса.

Рассмотреть, в частности, случай, когда длина l нити есть линейная функция времени, причем речь идет только о малых колебаниях. В этом случае, выбирая подходящим образом начало отсчета времен, можно положить $l = ut$ и подставить θ вместо $\sin\theta$. Если, наконец, за неизвестную функцию принять $y = l\theta$ вместо θ и за независимое переменное $x = \frac{gl}{u^2}$ вместо t, то в конце концов придем к уравнению

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Из этого уравнения, в частности, можно получить, что для маятника, длина которого изменяется очень медленно, продолжительность одного простого колебания (промежуток времени между двумя последовательными прохождениями через вертикаль) приблизительно равна аналогичной продолжительности для некоторого математического маятника, постоянная длина которого является средней от длин, принадлежащих рассматриваемому маятнику за рассматриваемый промежуток времени. (См., например, Lecornu, Dynamique appliquée, II изд., Paris, 1925 г., п. 164.)

16. Концы A, B твердого стержня длиной l скользят без трения в вертикальной плоскости соответственно по двум направляющим Ox, Oy, первая из которых горизонтальна, а вторая вертикальна и направлена вверх. Такая система, очевидно, имеет только одну степень свободы. За ее лагранжеву координату можно принять угол (острый) $\theta = \widehat{OAB}$.

Обозначая через λ расстояние центра тяжести стержня G от конца A, доказать, что живая сила системы определяется равенством

$$T = \frac{1}{2}(I + mr^2)\dot{\theta}^2,$$

где m — полная масса, I — полярный момент инерции (постоянный) стержня относительно G и

$$r = \sqrt{(l-\lambda)^2\cos^2\theta + \lambda^2\sin^2\theta}$$

есть переменное расстояние G от O.

Если стержень находится под действием только своего веса, то потенциал будет иметь значение

$$U = -mgl\sin\theta.$$

Показать, в частности, что в случае однородного стержня дифференциальное уравнение относительно $\theta(t)$, определяющее его движение, будет тождественно с дифференциальным уравнением качаний математического маятника длиной $\frac{2l}{3}$.

17. Кусок гибкой и нерастяжимой нити длиной l скользит без трения внутри трубки (т. е., схематически, вдоль некоторой заданной кривой, как в упражнении 6). Такую материальную систему, очевидно, можно рассматривать как голономную с одной степенью свободы, принимая, например, за обобщенную координату q криволинейную абсциссу положения, занимаемого внутри трубки одним из концов нити.

Если нить предполагается однородной и если ее линейную плотность обозначить через ν, то живая сила определится равенством $T = \frac{\nu l v^2}{2}$, где скорость скольжения v надо выразить через q и $\dot{q}$; в случае, когда нить находится под действием только консервативных сил с потенциалом $U(q)$, закон движения непосредственно получится из интеграла живых сил $T - U = \text{const}$.

Если эти силы сводятся к весу и z_0 обозначает высоту по вертикали центра тяжести нити (которая зависит от заданной кривой и от положения, занимаемого на ней куском нити, и будет вполне определенной функцией от q), то предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{1}{2} v^2 - gz_0 = \text{const}.$$

В виде приложения рассмотрим U-образную трубку с двумя прямолинейными, вертикальными, направленными вниз ветвями, соединенными в двух точках на одной и той же высоте посредством криволинейного куска длиной λ. Условимся ограничивать наши выводы промежутком времени, в течение которого нить, скользя под действием тяжести внутри трубы, имела бы первый конец A в одной из двух вертикальных ветвей, а второй конец A' — в другой. Обозначая в любой момент q, q' высоты по вертикали концов A, A', отсчитываемые, как положительные, вниз и от уровня, на котором начинается криволинейный кусок соединяющей трубы, мы будем иметь $q' = l - \lambda - q$; если для определенности предположим, что конец A движется вниз, то будем иметь $v = \dot{q}$. С другой стороны, имеем тождество

$$l\nu z_0 = q\nu \frac{q}{2} + q'\nu \frac{q'}{2} + \mu,$$

где μ — величина постоянная (доля той части нити, которая находится в соединительной трубке); таким образом мы заключаем, что движение определяется уравнением

$$v^2 - \frac{g}{l} \{q^2 + (l - \lambda - q)^2\} = \text{const}.$$

Рассмотреть, в частности, случай, когда соединительная часть трубки очень мала по сравнению с l ($\lambda = 0$); так как вначале q приблизительно равно q', то опускание начнется со стороны A с ничтожной скоростью ($v_0 = 0$); доказать, что когда A' достигает самой высокой точки своей вертикальной ветви ($q' = 0$), то скорость, приобретенная концом A, будет равна половине той скорости, которую он имел бы на той же высоте при свободном падении.

18. Гибкая и нерастяжимая нить, полная длина которой l, намотана на катушку. Один конец A нити закрепляется, и катушку пускают свободно падать вдоль вертикали так, что нить будет разматываться. Предполагая, что под действием подходящих приборов без трения ось катушки падает вертикально, оставаясь горизонтальной и параллельной самой себе, изучить движение.

При допущенных предположениях система имеет только одну степень свободы и за обобщенную координату q можно принять длину куска нити, размотавшегося до некоторого произвольного момента t. Обозначим через ν линейную плотность нити, через r — радиус катушки, через m — ее массу без нити, через μ — ее момент инерции относительно оси. Принимая во внимание, что центр тяжести катушки падает со скоростью $\dot{q}$, вращаясь вокруг ее оси с угловой скоростью, которая, если пренебречь толщиной нити, будет равна $\dot{q}/r$, мы найдем для живой силы T и потенциала U веса, пренебрегая во всех случаях толщиной нити, выражения

$$T = \frac{1}{2}(m + [l - q]\nu)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}(\mu + [l - q]\nu r^2)\frac{\dot{q}^2}{r^2},$$

$$U = g(m + [l - q]\nu)q + \frac{\nu g}{2} q^2 + \text{const}.$$

Показать, что если пренебречь массой нити, то катушка опускается так как будто она скатывается по вертикальной плоскости.

19. Показать, что любая однородная треугольная пластинка, масса которой m, эквивалентна в смысле, разъясненном в п. 38, системе из трех точек, помещенных посредине сторон, неизменно связанных между собой и имеющих каждая массу $m/3$.

20. Две массы m_1, m_2, движущиеся в вертикальной плоскости, связаны очень тонкой нитью постоянной длины l, которая продета через неподвижное колечко O. Рассмотреть движение системы в предположении, что нить остается натянутой и действуют только веса этих масс.

Речь идет, очевидно, о голономной системе с тремя степенями свободы, так как положение системы можно определить тремя координатами: углами θ_1, θ_2 между направлениями нитей и вертикалью через точку O, направленною вниз, и радиусом-вектором ρ массы m_1 относительно O; аналогичный радиус-вектор массы m_2 будет $l-\rho$. Показать, что живая сила и потенциал определяются равенствами

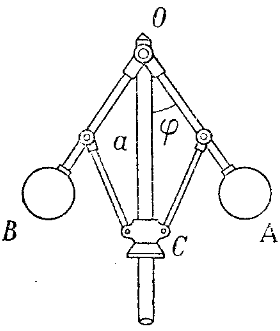
$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{\rho}^2+[l-\rho]^2\dot{\theta}_2^2),$$

$$U=g(m_1\rho\cos\theta_1+m_2[l-\rho]\cos\theta_2);$$

написать уравнения движения и т. д.

21. Масса m, движущаяся без трения по горизонтальной плоскости, привязана к нити длины l; нить проходит через небольшое отверстие в плоскости и несет на другом конце массу m_1. Изучить движение под действием силы тяжести, принимая во внимание, что система (при натянутой нити) имеет две степени свободы и что имеют место интеграл живой силы и интеграл площадей для горизонтальной плоскости.

22. Схематическая теория центробежного регулятора Уатта[1]). Речь идет о приборе R, предназначенном для уничтожения возможных возмущений равномерного вращательного движения.



Фиг. 23.

Пусть a есть ось, которую мы будем предполагать вертикальной и неизменно связанной с вращающейся системой S. Вращение системы S требуется поддерживать приблизительно равномерным. Регулятор R состоит прежде всего из двух равных стержней OA и OB (фиг. 23), связанных шарниром в неподвижной точке O оси a таким образом, что они могут вращаться в одной и той же плоскости, проходящей через эту ось. Стержни несут на концах две равные массы m и связаны тоже шарнирно посредством меньших и равных между собой стержней с муфтой C, скользящей вдоль a. Таким образом обеспечивается то, что в любой момент оба стержня OA и OB образуют с a один и тот же угол φ. Если вращение системы S происходит от паровой машины, то регулятор управляет впуском пара в распределительную коробку, пропуская его туда тем меньше, чем больше возрастает угол φ.

Можно точно определить зависимость между изменением угла φ и возможной неправильностью движения. Прежде всего заметим, что системы S и R в целом составляют материальную систему с двумя степенями свободы,

---

[1]) Джемс Уатт родился в Гриноке (Шотландия) в 1736 г., умер около Бирмингема в 1819 г., известен благодаря усовершенствованиям, внесенным в паровую машину.

так как за обобщенные координаты можно принять угол θ, определяющий положение плоскости регулятора R (и тем самым системы S) относительно неподвижной системы отсчета, и угол φ, определяющий конфигурацию регулятора R в этой плоскости.

Живая сила всей системы S, R будет типа

$$T = I\dot{\theta}^2 + J\dot{\varphi}^2,$$

где I и J суть функции угла φ. Чтобы иметь дело с простейшим случаем, представим себе, что в системе R масса стержней ничтожна по сравнению с m. В этом предположении, обозначая через C момент инерции системы S относительно a, очевидно, будем иметь

$$I = C + 2ml^2 \sin^2\varphi, \quad J = 2ml^2.$$

Что же касается активных сил Q_θ, Q_φ, то мы ограничимся предположением, что входят только вес и момент относительно оси вращения (если пренебречь возможным сопротивлением), совпадающий, как легко проверить, с Q_θ. Все, что относится к весу, допускает потенциал U, который определяется, по крайней мере до аддитивной постоянной, произведением полного веса всей системы S, R на высоту ее центра тяжести; но так как центр тяжести S остается неподвижным, то с точностью по крайней мере до несущественной постоянной можно отождествить U с потенциалом двух масс A и B, т. е. положить

$$U = 2mgl\cos\varphi.$$

На основании этих предпосылок получаются уравнения движения системы

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) = Q_\theta, \quad \frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}) - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\frac{\partial I}{\partial\varphi} = \frac{\partial U}{\partial\varphi}.$$

Эти уравнения приобретают особый интерес при изучении малых колебаний системы около установившегося состояния движения ($\dot{\theta} = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$). Мы встретимся с этими уравнениями в упражнении 8 следующей главы.

23. Дана голономная система. Показать, что если каждая точка P_i этой системы находится под действием силы вязкого сопротивления $-\lambda\boldsymbol{v}_i$, где λ — положительная постоянная и $\boldsymbol{v}_i$ — скорость точки P_i, то лагранжевым составляющим таких сил можно придать вид

$$Q_h = -\lambda\frac{\partial T}{\partial\dot{q}h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где T обозначает живую силу системы.

Достаточно отправиться от формулы (37) и принять во внимание указанные выражения для $\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_h}$ в п. 37.

24. На основании предыдущего упражнения уравнениями Лагранжа, определяющими движение голономной системы, находящейся под действием вязкого сопротивления, будут

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказать, что посредством замены независимого переменного $dt_1 = e^{-\lambda t}dt$ предыдущие уравнения приводятся к уравнениям спонтанного движения системы [1]).

---

[1]) См. Levi-Civita, Sul moto di un sistema di punti materiali soggetti a resistenze proporzionale alle rispettive velocità. *Atti Ist. Veneto*; т. LIV, 1896, стр. 1004—1008.

Глава VI

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ

1. Исследование динамической устойчивости, изложенное для одной точки в гл. II, § 6, и последующее изучение малых колебаний около положения устойчивого равновесия можно распространить, пользуясь уравнениями Лагранжа, на случай какой угодно голономной системы.

Это обобщение представляет особый интерес не только с теоретической стороны, но также и с точки зрения физических и технических приложений. Имея в виду главным образом эти приложения, мы и будем рассматривать в этой главе вопросы, связанные с устойчивостью и колебаниями.

В физических и технических проблемах встречаются и другие виды естественных движений, а также некоторые виды движения тех же самых голономных систем, которые, хотя и выражаются уравнениями более общими, чем уравнения Лагранжа, но могут быть сопоставлены с состояниями равновесия голономной системы благодаря тому, что уравнения допускают соответствующие частные решения (статические или меростатические решения). Мы распространим наше исследование и на эти решения. Наконец, мы введем, наряду со строгим определением понятия устойчивости, приближенное понятие, соответствующее устойчивости в течение конечного, но достаточно длительного промежутка времени, или *линейной* устойчивости *), исследованием которой мы и будем часто ограничиваться в силу непреодолимых математических трудностей, возникающих при анализе устойчивости в строгом смысле.

Это последнее направление исследований практических вопросов носит название теории малых колебаний.

Отметим, наконец, что в механизмах, используемых в технике и в лабораториях, встречаются пассивные сопротивления, содействующие устойчивости; но при исследовании устойчивости в этом случае потребуются рассуждения несколько иного характера, чем для консервативных систем. Рассмотрению этого вопроса посвящен § 7. Здесь же мы ограничимся указанием на новый замеча-

*) Как будет видно из дальнейшего, взгляды автора на линейную устойчивость или устойчивость по первому приближению не совпадают с общепринятыми. *(Прим. ред.)*

тельный критерий Э. Треффтца[1]) для характеристики устойчивости движения, в полной мере отвечающий требованиям техники.

§ 1. Динамическое понятие устойчивости равновесия для голономных систем. Теорема Дирихле

2. Вернемся к рассмотрению любой материальной голономной системы S, имеющей произвольное число степеней свободы n, и отнесем ее к любым n независимым лагранжевым координатам q.

Как мы уже знаем, всякое движение системы определяется соответствующими уравнениями,

$$q_h = q_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

производные от которых

$$\dot{q}_h = \dot{q}_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

в любой момент дают соответствующие лагранжевы скорости.

Чтобы придать нашим рассуждениям наиболее удобную и наглядную форму, условимся прибегать к гиперпространственному геометрическому представлению, рассматривая $2n$ параметров q и $\dot{q}$ как декартовы прямоугольные координаты в пространстве A_{2n} $2n$ измерений. Так как всякая точка этого пространства представляет состояние движения нашей системы, то A_{2n} можно назвать *пространством состояний движения*.

В пространстве A_{2n} движение (1) или, лучше сказать, непрерывная последовательность составляющих его состояний движения будет представлено кривой с параметрическими уравнениями (1), (2).

Введем здесь следующий удобный для дальнейшего способ выражения: будем называть „отклонением" двух точек $q', \dot{q}'$ и $q'', \dot{q}''$ пространства A_{2n} или двух соответствующих состояний движения максимум абсолютных величин

$$|q'_h - q''_h|, \quad |\dot{q}'_h - \dot{q}''_h| \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

от $2n$ разностей одноименных координат.

Далее, известно, что в A_{2n} *гиперсферой с центром в* q^0, $\dot{q}^0$ *и радиусом* $r\,(>0)$ называется гиперповерхность (или многообразие $2n-1$ измерений), определяемая уравнением

$$\sum_{h=1}^{n} \left([q_h - q_h^0]^2 + [\dot{q}_h - \dot{q}_h^0]^2\right) = r^2.$$

[1]) E. Trefftz, Zu den Grundlagen der Schwingungstheorie, *Math. Ann.*, т. 95, 1925, стр. 307—312.

Речь идет о *замкнутой* поверхности, делящей пространство A_{2n} на две области: область *внешних* и область *внутренних* точек. Точка пространства будет внешней или внутренней, смотря по тому, будет ли левая часть уравнения этой поверхности при подстановке в нее вместо q_h, $\dot{q}_h$ координат рассматриваемой точки больше или меньше r^2, или, как условимся говорить, смотря по тому, будет ли расстояние точки $(q, \dot{q})$ от точки $(q^0, \dot{q}^0)$ больше или меньше r.

Очевидно, что отклонение точек внутренней области от центра не может превосходить r (иначе левая часть уравнения превосходила бы r^2), отклонение точек внешней области от центра будет, конечно, больше чем $r/\sqrt{2n}$ (иначе левая часть была бы меньше r^2).

3. Для дальнейшего будет полезно, наряду с предыдущими геометрическими предпосылками, напомнить здесь некоторые понятия из анализа.

Предположим, что в пространстве A_{2n} задана функция точки H, т. е. функция от $2n$ аргументов q, $\dot{q}$, однозначная, конечная и непрерывная вместе с ее $2n$ частными производными первого порядка, по крайней мере в некоторой связной области $2n$ измерений, которой мы будем ограничиваться в наших рассуждениях.

Говорят, что функция H имеет *действительный* (или изолированный) минимум в некоторой точке M, если для любой точки P, достаточно близкой к M, но отличной от нее, удовлетворяется неравенство

$$H_P - H_M > 0,$$

где H_P и H_M суть значения функции H в точках P и M.

Иными словами, в случае минимума существует такая окрестность $2n$ измерений точки M, что во всякой ее точке P, отличной от M, имеет место предыдущее *неравенство*. Для краткости эту окрестность точки M мы будем называть „окрестностью, в которой чувствуется минимум".

Если мы теперь будем рассматривать гиперсферу с центром в точке M и радиусом η, достаточно малым для того, чтобы все ее точки Q (т. е. все точки Q, имеющие от M расстояние η) принадлежали к только что определенной окрестности точки M, то разность $H_Q - H_M$ при изменении положения точки Q на гиперсфере будет иметь вследствие непрерывности функции H некоторый минимум μ и этот минимум (так как во всех точках Q чувствуется минимум) будет обязательно больше нуля.

Аналогичные замечания, если изменен только смысл неравенства, будут справедливы и в случае *действительного максимума*.

4. Устойчивость состояния равновесия. Предположим теперь, что голономная система S имеет связи, не зависящие от времени, и находится под действием консервативных сил, потенциал которых обозначим через U. Этот потенциал, в силу только что допущенных предположений, будет зависеть исключительно от q; в рассматриваемом поле мы будем предполагать его, как обычно, однозначным, непрерывным и правильным вместе с его первыми и вторыми производными.

Мы уже знаем, что если функция $U(q)$ при частных значениях q^0 координат q, т. е. при заданной конфигурации C^0 системы, допускает стационарное значение (в частности, максимум или минимум), так что исчезают лагранжевы составляющие Q_h действующих сил, то C^0 будет для системы конфигурацией равновесия (т. I, гл. XV, п. 28).

Мы имеем здесь возможность полностью исследовать устойчивость этого состояния равновесия, пользуясь, вместо статического критерия, указанного в только что упоминавшемся п. 28, более общим и более точным определением динамического характера, совершенно аналогичным определению, которое мы приняли в частном случае одной свободной материальной точки (гл. II, п. 35).

Обобщая обычным образом данное в гл. II, п. 35 определение устойчивости, мы будем называть конфигурацию равновесия C^0 *устойчивой*, если при достаточно малом *возмущении* равновесия (т. е. при начальной конфигурации, достаточно близкой к C^0, и достаточно малой живой силе T^0) будет иметь место движение, при котором система остается сколь угодно близкой к C^0, и в то же время сохраняет сколь угодно малую живую силу, т. е. одновременные скорости всех отдельных точек системы остаются как угодно малыми.

Если, наоборот, как бы близка к C^0 ни была начальная конфигурация и как бы ни была мала вначале живая сила, всегда можно сообщить системе такое движение, в котором отклонение системы от конфигурации равновесия C^0, или даже только живая сила, в конце концов превзойдет некоторую постоянную (положительную), *не зависящую от начальных условий* величину, то конфигурация равновесия C^0 называется *неустойчивой*.

Этим критериям устойчивости и неустойчивости можно дать более простую, но менее точную форму, прибегая к геометрическому представлению п. 2. С этой целью заметим, что в пространстве A_{2n} состояний движения состояние равновесия в положении C^0 представляется точкой M с координатами $q_h = q_h^0$, $\dot{q}_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$, и всякое состояние движения, близкое к этому состоянию равновесия, представится точкой, имеющей очень малое отклонение от M, и обратно.

Если обозначим через P точку, представляющую состояние движения, которое принимает наша система в любой момент t, отправляясь от начальных условий, представляемых точкой P_0, то указанное выше характеристическое условие устойчивости состояния равновесия в C^0, представляемого точкой M, можно высказать следующим образом: состояние равновесия в C^0 будет устойчивым, если, выбрав сколь угодно малое ε, можно поставить ему в соответствие такое η, что при всяком P_0 внутри гиперсферы с центром в M и радиусом η точка P будет *неопределенно долго* оставаться внутри концентрической гиперсферы с радиусом ε.

Наоборот, состояние равновесия в C^0 будет неустойчивым, если внутри всякой гиперсферы с центром в M и как угодно малым радиусом η всегда будет существовать по крайней мере одна точка P_0, отправляясь от которой точка P в конце концов выйдет из концентрической гиперсферы с радиусом, *не зависящим от* η.

5. Теорема Дирихле. Выяснив таким образом динамическое понятие об устойчивости, докажем теорему Дирихле: *если потенциал U в некоторой конфигурации C^0 имеет действительный максимум, то равновесие в ней будет устойчивым.*

Заметим прежде всего, что при только что установленных предположениях полная энергия $H = T - U$ системы в точке M (представляющей состояние равновесия в конфигурации C^0) имеет действительный минимум. В самом деле, если P есть какая-нибудь точка пространства A_{2n}, то разность $H_P - H_M$, так как в M живая сила равна нулю, будет равна

$$T_P + (U_M - U_P),$$

откуда видно, что пока точка P близка к M или, еще точнее, остается в такой окрестности точки M, в которой чувствуется максимум U, эта разность остается положительной, за исключением случая, когда P совпадает с M.

Обратимся теперь к интегралу живых сил

$$H = \text{const}.$$

Если возьмем ε достаточно малым для того, чтобы гиперсфера Σ_ε с центром в M и радиусом ε вся была внутри окрестности точки M, в которой чувствуется действительный минимум функции H, то этому ε можно в силу замечаний п. 3 поставить в соответствие такое число μ, что для всех точек Q, лежащих на гиперсфере Σ_ε, будем иметь

$$H_Q - H_M > \mu. \tag{3}$$

Выберем теперь какое-нибудь положительное число $\mu' < \mu$ и заметим, что вследствие непрерывности H относительно своих $2n$ аргументов наверное будет существовать некоторая гиперсфера Σ_η с центром в M и радиусом η, достаточно малым для того, чтобы *во всякой точке* P_0 гиперсферы Σ_η или внутри нее имело место соотношение

$$H_{P_0} - H_M \leq \mu'. \tag{4}$$

Далее, поверхность Σ_η есть как раз гиперсфера, фигурирующая в нашем динамическом критерии устойчивости; действительно, если возмущенное начальное состояние представляется точкой P_0, не внешней для Σ_η, благодаря чему вначале будет справедливо соотношение (4), то разность $H_P - H_M$, в силу интеграла живых сил, сохранит в течение всего движения свое начальное значение $\leqslant \mu'$. Отсюда следует, что изображающая точка P не может уже уходить из гиперсферы Σ_ε, так как, для того чтобы точка P могла уйти из этой гиперсферы, ей нужно было бы пересечь гиперсферу в некоторой точке Q, в которой разность $H_Q - H_M$ в силу неравенства (3) сделалась бы больше μ и, следовательно, больше μ'.

Таким образом, на основании динамического критерия предыдущего пункта подтверждается устойчивость состояния равновесия в M, т. е. в конфигурации C^0.

6. Покажем еще, как предыдущему доказательству теоремы Дирихле можно придать синтетическую форму, которая, требуя, при строгом ее проведении, логических рассуждений, эквивалентных только что изложенным, делает доказательство непосредственно наглядным.

Рассмотрим в пространстве A_{2n} состояний движения гиперповерхность $H = \text{const}$ (*изоэнергетическая гиперповерхность*), записывая уравнение ее в виде

$$H - H_M = c, \tag{5}$$

где c обозначает произвольную постоянную, конечно, не отрицательную вблизи от M. При $c = 0$ эта гиперповерхность сводится к точке M, изображающей состояние равновесия в конфигурации C^0; тогда при $c > 0$ и достаточно малом гиперповерхности (5) будут замкнутыми вокруг M, и при возрастании c будут следовать одна за другой таким образом, что каждая будет содержать внутри себя все предыдущие. Это логически следует из одних только предположений непрерывности H и действительного минимума в M и может быть строго доказано при помощи рассуждений, эквивалентных рассуждениям предыдущего пункта.

Теперь теорема Дирихле, благодаря этим замечаниям, оказывается совершенно наглядной. Действительно, так как имеет место интеграл живых сил, то изображающая точка P, в каком-нибудь возмущенном движении, уже не будет покидать гиперповерхность (5), на которой она находилась вначале, так что нужно только задать достаточно малым начальное возмущение, т. е. по существу постоянную c, соответствующую начальному состоянию движения P_0, чтобы точка P бесконечно долго оставалась сколь угодно близкой к M.

7. Теорема Ляпунова *). Важно отметить, что теорема Дирихле допускает следующее обращение: *если состояние равновесия M соответствует просто некоторому стационарному значению потенциала U, которое не является максимумом, и если, как это имеет место в общем случае, отсутствие максимума можно обнаружить из рассмотрения местных числовых значений вторых производных, то равновесие будет неустойчивым.*

Эту теорему, принадлежащую Ляпунову, мы не будем доказывать; мы только позволим себе указать в дальнейшем, прибегая к некоторым интуитивным соображениям, порядок рассуждений, при помощи которых можно придти к доказательству (§ 5). Здесь же, между прочим, добавим, что Ляпунов доказал также, что неустойчивость будет иметь место и в большей части исключительных случаев, когда для подтверждения отсутствия максимума оказывается необходимым обратиться к производным порядка выше второго.

---

*) Александр Михайлович Ляпунов родился 25 мая 1857 г. в Ярославле, умер 3 ноября 1918 г. в Одессе. Окончил математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета в 1880 г. и был оставлен своим учителем, профессором Бобылевым, при университете. В 1885 г. защитил магистерскую диссертацию на тему „Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости". В 1892 г. блестяще защитил свою докторскую диссертацию на тему „Общая задача об устойчивости движения". Был профессором Харьковского университета с 1885 по 1901 г. В 1900 г. избран членом-корреспондентом, а в 1901 г. — действительным членом Российской академии наук.

Научные труды А. М. Ляпунова охватывают многие вопросы математики и математической физики, но особенной известностью пользуются его работы по устойчивости движения и по вопросу о фигурах равновесия вращающейся жидкости. Задача об устойчивости движения, впервые поставленная Лагранжем, на протяжении ста лет решалась на основании результатов, получаемых из линейных уравнений первого приближения. Многочисленные и очень важные результаты были получены до Ляпунова Томсоном и Тэтом, Раусом и Н. Е. Жуковским. Однако до Ляпунова никто не делал попытки обосновать законность методов, которыми эти результаты были получены, и заслуга Ляпунова заключается в том, что он впервые отчетливо сформулировал понятие устойчивости движения, разработал методы исследования, получил много весьма важных результатов в более общей форме, чем это было сделано до него, и указал условия, при которых метод малых колебаний доставляет исчерпывающее суждение об устойчивости и неустойчивости движения. Работы А. М. Ляпунова по теории устойчивости движения, доставившие ему мировую славу, ныне нашли себе применение в самых различных областях математического естествознания и техники.

О роли А. М. Ляпунова в науке и, в частности, в развитии учения об устойчивости движения см. некролог, посвященный памяти А. М. Ляпунова академиком Стекловым (в книге А. М. Ляпунова „Общая задача об устойчивости движения", ОНТИ, 1935, стр. 364—382), и некролог, посвященный памяти А. М. Ляпунова академиком А. Н. Крыловым в „Известиях Академии наук СССР" за 1930 г. Значение работ А. М. Ляпунова в развитии теории устойчивости движения подробно охарактеризовано в монографии Н. Д. Моисеева „Очерки развития теории устойчивости", 1949. *(Прим. ред.)*

Мы не будем здесь задерживаться на этом разборе, требующем знания не совсем элементарной теории дифференциальных уравнений; заметим только, что эти рассуждения об устойчивости, которые, как мы увидим в §§ 4, 5, распространяются со случая равновесия на случай движения, заставляют признать, что неустойчивость составляет правило, тогда как устойчивость является только исключением [1]).

§ 2. Смещение равновесия

8. Определение. Разберем здесь один вопрос, хотя и относящийся к чистой статике, но связанный с понятием об устойчивости с только что выясненной динамической точки зрения.

Рассмотрим, как и в предыдущем параграфе, материальную голономную систему с независимыми лагранжевыми координатами q_1, $q_2, \ldots, q_n$ и допустим, что она обладает *внутренней энергией* $\Omega(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, т. е. находится под действием внутренних сил, являющихся производными от потенциала $-\Omega$, предполагаемого, как обычно, однозначным, конечным, непрерывным и дифференцируемым по крайней мере до второго порядка внутри некоторой области (гл. V, п. 34). Пусть, кроме того, C^0 есть конфигурация действительного минимума этой внутренней энергии, т. е., по теореме Дирихле (п. 5), конфигурация устойчивого равновесия для системы, если предположить, что она находится под действием только указанных выше внутренних сил. Такую конфигурацию мы будем называть *естественным положением* системы и для формальной простоты будем предполагать, что она определяется n координатами $q_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

Предположим теперь, что к системе приложены другие позиционные силы с лагранжевыми составляющими $Q_h(p)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$. Если эти составляющие не все обращаются в нуль в положении C^0, то равновесия в естественном положении больше не будет, но возможно, что установится (например, после затухающих колебаний) состояние *смещенного равновесия* в новой конфигурации C^0, которая,

---

[1]) Чтобы оправдать это утверждение в отношении того, что касается состояний равновесия, ограничиваясь при этом случаем, когда о наличии или отсутствии максимума U можно вывести заключение из рассмотрения местных значений вторых производных, достаточно вспомнить, что определяющий критерий для различения устойчивости и неустойчивости состоит в том, будет или не будет определенной отрицательной квадратичная форма с n переменными, имеющая коэффициентами эти местные значения вторых производных. Из алгебры известно, что для того, чтобы такая квадратичная форма была определенной отрицательной, требуется, чтобы известные n определителей порядков $n, n-1, \ldots, 1$ все имели один и тот же знак; такая комбинация представляется, конечно, весьма случайной среди всех остальных возможных случаев для знаков этих определителей. О том, что относится к состояниям движения, см. Levi-Civita, Sopra alcuni criteri di instabilità, *Annali di Matematica*, т. V, 1901, стр. 221—308.

естественно, будет определяться общими уравнениями статики в лагранжевых координатах (т. I, гл. XV, п. 25)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_h} = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

На основании предположения, что C^0 является конфигурацией равновесия при отсутствии внешних сил, должны обращаться в нуль при $q_k = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ все частные производные от Ω по q. Поэтому, предполагая внутреннюю энергию в естественном состоянии равной нулю (что равносильно соответствующему выбору несущественной аддитивной постоянной потенциала), мы будем иметь в подходящей окрестности C^0 разложение вида

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_h \partial q_k}\right)^0 q_h q_k + \cdots \tag{7}$$

Ограничиваясь рассмотрением случая, когда конфигурация C смещенного равновесия находится в непосредственной близости от естественного положения C^0, можно пренебречь остатком предыдущего разложения и удержать для Ω элементарное выражение, представляющее собой квадратичную форму относительно q,

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \beta_{hk} q_h q_k, \tag{7'}$$

где для краткости положено

$$\beta_{hk} = \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_h \partial q_k}\right)^0;$$

с аналогичным приближением можно рассматривать все Q_h как постоянные, со значениями $\overset{0}{Q}_h$, которые эти постоянные имеют в естественном положении системы. Поэтому система (6), от которой зависит определение конфигурации смещенного состояния равновесия, т. е. определение приращений q_k, испытываемых лагранжевыми координатами при смещении системы из C^0 в C, в первом приближении приводится к системе n линейных неоднородных уравнений относительно q

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{hk} q_k = \overset{0}{Q}_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{6'}$$

Эта система однозначно определяет все координаты q во всех тех случаях, когда отличен от нуля определитель

$$\| \beta_{hk} \| = \left\| \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_h \partial q_k}\right)^0 \right\|;$$

заметим, что это обстоятельство необходимо будет иметь место, когда из рассмотрения второго дифференциала можно заключить о действительном минимуме функции Ω в $C^\bullet$, так как в этом случае квадратичная форма (7′) будет определенной положительной и, следовательно, дискриминант ее не равен нулю.

9. Теорема взаимности. Интересное следствие из этих рассуждений мы будем иметь, предполагая, что добавочные силы сводятся к одной единственной составляющей Q по одной из q, например по q_i. Равенства (6′) тогда принимают вид

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{hk} q_k = \delta_{hi} Q \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где δ_{hi} обозначает нуль или положительную единицу, смотря по тому, будут ли оба индекса h, i между собой различны или равны. Отсюда, предполагая $\|\beta_{hk}\| \neq 0$, применяя правило Крамера[1]) и обозначая через $\beta^{(hk)}$ величину, взаимную с β_{hk} (т. е. соответствующее алгебраическое дополнение, деленное на определитель $\|\beta_{hk}\|$), получим выражение для изменения, испытываемого любой лагранжевой координатой q_k при смещении из положения равновесия, соответствующего рассматриваемым силам,

$$q_k = Q \sum_{h=1}^{n} \beta^{(hk)} \delta_{hi} = \beta^{(ik)} Q \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Предположим теперь, что та же сила Q действует не в направлении координаты q_i, а по направлению какой-нибудь другой координаты, например q_k. В этом случае мы будем иметь другое состояние смещенного равновесия, в котором координата q_i, на основании предыдущей формулы, в предположении, что в ней k заменено через i, будет иметь величину

$$q_i = \beta^{(ki)} Q;$$

если теперь примем во внимание, что $\beta^{(hk)}$, так же как и β_{hk}, составляют симметричную матрицу, то из сравнения двух состояний равновесия получим следующую теорему взаимности[2]): *изменение, которое испытывает какая-нибудь лагранжева координата q_k, исходя из значения, соответствующего естественному положению системы, при смещении положения равновесия, происходящего от*

---

[1]) Г. Крамер (Gabriel Cramer) родился в Женеве в 1704 г., умер близ Нима в 1752 г., был профессором математики и философии в Академии наук Женевы. Знаменитое правило, носящее его имя, можно найти в Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, 4 тома, Женева, 1750.

[2]) Ср., в частности, Rayleigh, Scientific papers, Cambridge, University Press, т. I, 1901, стр. 232—237.

действия силы только в направлении какой-нибудь другой координаты q_i, тождественно с аналогичным изменением, которое испытывала бы координата q_i, если бы система подвергалась действию такой же силы только в направлении q_k.

Для иллюстрации этой теоремы в схематически наиболее простом случае рассмотрим систему с двумя степенями свободы, обладающую некоторым запасом внутренней энергии Ω. Пусть эта система осуществлена, например, посредством упругих приспособлений и притом так, что если значения соответствующих лагранжевых параметров интерпретировать как декартовы координаты x, y некоторой точки на плоскости, то внутренняя энергия такой изображающей точки получится от некоторой силы с составляющими $-\omega_1^2 x$, $-\omega_2^2 y$ и, следовательно, будет иметь вид

$$\Omega = \frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2).$$

Обращаясь теперь к этому изображению системы как точки на плоскости, представим себе силу величины F, приложенную к точке в направлении единичного вектора u с направляющими косинусами α, β, и пусть v — единичный вектор, нормальный к вектору u и ориентированный относительно него так же, как ось y ориентирована относительно оси x. Под действием этой добавочной силы точка, предполагаемая вначале в естественном положении (т. е. в начале координат), сместится и примет новое положение равновесия, определяемое равенствами

$$\omega_1^2 x = F\alpha, \qquad \omega y_2^2 = F\beta;$$

только тогда, когда добавочная сила направлена по одной из осей ($\alpha = 1$, $\beta = 0$ или $\alpha = 0$, $\beta = 1$), смещение произойдет в том же самом направлении. Теорема взаимности утверждает, что если сила F действует по направлению какого-нибудь единичного вектора u, то нормальная составляющая смещения (по v) будет равна соответствующей нормальной составляющей по u смещения, возникающего в том случае, если бы сила F действовала по v.

Следует заметить, что та же теорема взаимности справедлива также и в случае непрерывных систем с бесконечным числом степеней свободы; очень наглядную иллюстрацию теоремы в этом случае мы получим, рассматривая упругую пластинку, закрепленную по горизонтальному контуру. Если к внутренней точке P прикладывается нагрузка, то пластинка изгибается, и любая ее точка Q испытывает некоторое вертикальное перемещение h. Если та же нагрузка будет приложена, наоборот, в Q, то точка P при соответствующем изгибе пластинки испытает, в свою очередь, вертикальное перемещение h.

10. Влияние добавочных консервативных сил и новых связей на смещение равновесия и вопросы устойчивости [1]). Возьмем снова систему п. 8, т. е. голономную систему с n степенями свободы, обладающую внутренней энергией $\Omega(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ и имеющую в конфигурации C^0 ($q_h = 0$; $h = 1, 2, \ldots, n$) свое естественное положение (действительный минимум Ω); поставим себе целью изучить смещение положения равновесия, которое испытывает система, если в дальнейшем она подвергается действию внешних сил и действию некоторого числа $l < n$ голономных, не зависящих от времени, связей

$$f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l), \tag{8}$$

не исключая, конечно, тех частных случаев, когда будет действовать только одно из этих двух возмущающих влияний.

Чтобы иметь возможность сделать некоторые интересные выводы, удобно здесь присоединить к предыдущим гипотезам следующие дополнительные предположения качественного характера.

Допустим прежде всего, что по второму дифференциалу можно заключить о действительном минимуме энергии Ω; тогда мы нашли бы, что квадратичная форма

$$A_0 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_h \, \partial q_k}\right)^0 q_h q_k,$$

к которой приводится в первом приближении эта энергия, является определенной положительной; если мы примем во внимание, что этот характер формы следует из некоторых неравенств, которым должны удовлетворять коэффициенты формы, то на основании непрерывности функции Ω можем заключить, что аналогичная форма A, в которой коэффициенты относятся к любой конфигурации C, близкой к C^0, останется определенной положительной в подходящей окрестности этого естественного положения.

С другой стороны, рассмотрим потенциал $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, производными от которого являются добавочные силы. Предположим, что, помимо обычных условий однозначности, конечности, непрерывности и дифференцируемости до второго порядка, потенциал имеет еще и то свойство, что его вторые производные остаются в окрестности конфигурации C^0 *достаточно малыми* по абсолютной величине. Так как эти вторые производные суть не что иное, как производные от лагранжевых составляющих $\frac{\partial U}{\partial q_h}$ добавочных сил, то предыдущее предположение равносильно допущению, что поле силы, в которое предполагается помещенной наша система,

[1]) Levi-Civita, Sullo spostamento dell'equilibrio, *Atti del R. Ist. Ven.*, т. 71, ч. II, 1911—1912, стр. 241—249.

в окрестности естественного положения C^0 системы является *почти однородным*.

Если, далее, построим квадратичную форму B от переменных q, имеющих коэффициентами вторые производные от U (вычисленные в любой конфигурации C), то из только что указанного предположения, очевидно, будет следовать, что, вычитая B из аналогичной формы A, мы получим форму $A-B$, которая наравне с первоначальной формой A остается определенной положительной, по крайней мере в некоторой окрестности I естественного положения C^0.

Перейдем теперь к отысканию смещения равновесия, являющегося следствием совместного действия силового поля с потенциалом U и связей (8). Для этой цели достаточно обратиться к общему уравнению статики (т. I, гл. XV, п. 9), на основании которого для равновесия необходимо и достаточно, чтобы при любом перемещении δq_h, совместимом со связями (8), исчезал первый дифференциал от $\Omega - U$

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial q_h}\delta q_h. \tag{9}$$

Если введем множители Лагранжа, то придем (т. I, гл. XV, § 7) к n уравнениям

$$\frac{\partial(\Omega - U)}{\partial q_h} + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

образующим совместно с уравнениями (8) дополнительных связей систему, из которой достаточно исключить множители λ, чтобы получить уравнения относительно q, определяющие возможную конфигурацию C смещенного равновесия.

Не будем останавливаться здесь на разборе условий существования и единственности такой конфигурации. Допустим, что такая конфигурация существует и, более того, принадлежит к той окрестности I естественного положения системы, которую мы определили немного выше, и исследуем ее устойчивость.

Для того чтобы равновесие, смещенное к конфигурации C, определяемой уравнениями (8), (10), было устойчивым, достаточно, чтобы функция $\Omega - U$ имела в C действительный минимум по отношению к другим конфигурациям, совместимым со связями; это будет обеспечено, если будет существенно положительным второй дифференциал от $\Omega - U$, вычисленный, принимая во внимание уравнения (8). Если продифференцируем первый дефференциал (9) и примем во внимание, что нельзя прямо положить $\delta^2 q_k = 0$, так как

q надо рассматривать не как вполне независимые переменные, а как связанные уравнениями (8), то в первом приближении получим

$$\delta^2(\Omega - U) = A - B + \alpha;$$

здесь в квадратичной форме $A - B$ аргументами являются приращения δq, а коэффициентами — вторые производные от $\Omega - U$, вычисленные в конфигурации C, и для простоты положено

$$\alpha = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial q_h} \delta^2 q_h,$$

т. е. через α обозначен член, происходящий от добавочных связей. Если представим себе, что посредством l уравнений (8) связей исключено столько же переменных q или, более общим образом, если все переменные q выражены через $n - l = \nu$ независимых лагранжевых параметров $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$, то A, B, α станут тремя квадратичными формами от ν аргументов (оставшихся независимыми δq или произвольных приращений δr). Но в то время как форма $A - B$, которая была существенно положительной в n переменных δq, рассматривавшихся как независимые, очевидно, останется такой же и после только что указанного приведения числа ее степеней свободы к меньшему, о добавочном члене α, наоборот, ничего нельзя сказать заранее, так как, вообще говоря, остается сомнительным, будет ли смещенное равновесие устойчивым или неустойчивым; напротив, мы увидим на одном примере в ближайшем пункте, что может представиться как та, так и другая возможность.

Однако предыдущие рассуждения прямо приводят к определению одного случая, в котором устойчивость смещенного равновесия оказывается обеспеченной; это именно будет тот случай, когда вместе с исчезновением всех $\delta^2 q_h (h = 1, 2, \ldots, n)$ исчезает и член α, так что $\delta^2(\Omega - U)$ приводится к определенной квадратичной форме $A - B$.

Это, в частности, будет иметь место, если добавочные связи (8) представляются линейными уравнениями (даже и неоднородными) относительно q, потому что такими же будут и выражения l координат q из них через остальные $n - l = \nu$; если исчезают вторые дифференциалы этих последних ν независимых переменных q, то исчезают также и вторые дифференциалы первых l переменных, которые являются линейными функциями от остальных.

Таким образом, мы пришли к следующей теореме: *состояние равновесия, принимаемое системой вблизи ее конфигурации минимума внутренней энергии, при одновременном действии почти однородного силового поля и линейных связей, будет всегда устойчивым.*

Частный тип линейных связей (вообще говоря, неоднородных), мы будем иметь, давая определенные значения некоторым из координат q, например первым l, что равносильно заданию l из n элементарных перемещений, переводящих систему из конфигурации C^* в ту, которая будет новой конфигурацией равновесия.

Если внешние силы не действуют ($U = \text{const}$), то мы можем утверждать, что (наравне с $\Omega - U$) *внутренняя энергия Ω в конфигурации C, в которой снова устанавливается равновесие, если l элементарных перемещений заданы наперед, имеет минимум по сравнению со всеми другими конфигурациями, возможными при произвольных $(n - l)$ элементарных перемещениях.*

11. Пример. Для иллюстрации предыдущих общих рассуждений обратимся к случаю, уже указанному в п. 9, системы с двумя степенями свободы, изображаемой посредством одной точки P, движущейся по плоскости; уточним допущенные там предположения, полагая, что сила, от которой происходит внутренняя энергия, является типичной восстанавливающей силой, притягивающей точку к началу O, с компонентами $-\omega^2 x$ $-\omega^2 y$, так что имеем

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2).$$

Здесь, при отсутствии связей и других сил, точка O есть положение устойчивого равновесия.

Рассмотрим смещение равновесия, которое определится в случае, когда при отсутствии внешних сил ($U = \text{const}$) вводится связь; сначала речь будет идти о линейной связи, т. е. точка P вынуждена будет оставаться на прямой (не проходящей через O). Основание M перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, очевидно, представляет новое положение равновесия; и так как из всех точек прямой M является ближайшей к O, то внутренняя энергия Ω принимает в ней минимальное значение по сравнению со всеми положениями, совместимыми со связью, и равновесие будет все еще устойчивым.

Наоборот, в общем случае, когда точка P вынуждена оставаться на какой-нибудь линии L (отличной от прямой), легко видеть, что смещенное равновесие может оказаться неустойчивым.

Чтобы составить себе наглядное представление, начнем с произвольного закрепления точки M (отличной от O) и обозначим через γ окружность с центром в O, проходящую через M; возьмем кривую L, касательную к γ в точке M, и предположим, единственно с целью сократить рассуждения, что радиус кривизны кривой L в точке M будет отличен от OM; это равносильно допущению, что в непосредственной близости от M кривая L является целиком внешней или целиком внутренней по отношению к окружности γ.

Как в том, так и в другом случае точка M будет точкой положения равновесия; но тогда как в первом случае это равновесие, очевидно, будет устойчивым (как и в случае прямой), наоборот, во втором случае оно будет неустойчивым, даже если смещение будет очень малым, т. е. если точка M будет сколь угодно близка к точке O.

Наконец, к тому же заключению мы придем также и аналитическим путем, применяя общий критерий предыдущего пункта. В самом деле, представим себе, что уравнение связи выражает y как функцию от x (правильную в окрестности начала) в виде

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots,$$

при постоянных a, b, c, ... Отсюда получим

$$\delta y = (b + 2cx + \ldots)\,\delta x, \quad \delta^2 y = (2c + \ldots)\,\delta x^2,$$

где опущенные члены содержат по крайней мере x^2 в выражении δy и, следовательно, по крайней мере x в выражении $\delta^2 y$; поэтому квадратичная форма, которая должна быть рассмотрена, будет определена, по крайней мере до членов, содержащих множителем x, посредством равенства

$$\delta^2\Omega = \omega^2(\delta x^2 + \delta y^2 + y\delta^2 y) = \omega^2(1 + b^2 + ac + \ldots)\,\delta x^2.$$

Поэтому, если допустить, что смещение равновесия является достаточно малым (и, следовательно, такой же будет абсцисса x нового положения равновесия), то критерий для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости будет даваться знаком трехчлена $1 + b^2 + ac$. Для линейной связи c равно нулю, и, следовательно, мы будем иметь устойчивость, каково бы ни было значение a (а не только значение b); тогда как, наоборот, в общем случае, как бы ни было мало a, т. е. как бы близко от начала ни проходила кривая L, всегда можно приписать коэффициенту c такие значения, что трехчлен будет отрицательным и, следовательно, смещенное положение равновесия будет неустойчивым.

§ 3. Малые колебания голономной системы в окрестности одной из ее конфигураций устойчивого равновесия

12. Приведение двух квадратичных форм к каноническому виду. Начнем с повторения следующей теоремы из алгебры*). Пусть даны две квадратичные формы с n переменными

$$\mathrm{A} = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk} z_h z_k, \qquad \mathrm{B} = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \beta_{hk} z_h z_k;$$

*) См., например, Бохер М., Введение в высшую алгебру, 1933; Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 1946; Окунев А. Я., Высшая алгебра, 1949. (*Прим. ред.*)

обозначая через ρ некоторый параметр, рассмотрим алгебраическое уравнение степени n относительно ρ

$$\| \beta_{hk} - \rho\alpha_{hk} \| = 0, \tag{11}$$

которое получается, если мы приравняем нулю дискриминант квадратичной формы $\mathrm{B} - \rho\mathrm{A}$. Если форма A является определенной положительной, то корни этого уравнения все будут действительными (не необходимо различными); обозначим эти корни через ρ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Существует по крайней мере одно линейное преобразование (не вырожденное) с действительными коэффициентами, посредством которого можно представить z_h в виде некоторых линейных однородных комбинаций n таких новых переменных x_i, что обе данные формы примут соответственно вид:

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \mathrm{B} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i^2.$$

13. Нормальные координаты. Главные колебания и главные частоты. После этого отступления обратимся, как в п. 4, к голономной системе S с n степенями свободы, находящейся под действием консервативных сил с потенциалом U, и рассмотрим конфигурацию C^0 устойчивого равновесия, предполагая, что действительный максимум функции U в C^0 будет общего типа, т. е. о его существовании можно судить на основании рассмотрения местных значений одних только вторых производных функций U.

Мы знаем, что если это состояние равновесия возмущено достаточно мало, то система благодаря устойчивости равновесия в C^0 будет двигаться неопределенно долго в непосредственной близости от этой конфигурации; изучим здесь характер этого движения.

Можно предположить прежде всего, что аддитивная постоянная выбрана так, чтобы потенциал U в C^0 был равен нулю. С другой стороны, вследствие предположения о равновесии (или о максимуме функции U), будут равны нулю также и все первые производные от потенциала; поэтому, разлагая эту функцию по формуле Тэйлора в окрестности конфигурации C^0 и полагая для краткости

$$q_h - q_h^0 = z_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

будем иметь

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \right)^0 z_h z_k + \ldots$$

Во всяком движении, достаточно близком к состоянию равновесия, z_h вместе с их производными $\dot{q}_h$ останутся сколь угодно малыми, так что в силу этого в предыдущем разложении функции U можно пренебречь, по сравнению с написанными членами второго порядка относительно z, всеми опущенными членами, которые будут более высокого порядка; аналогично и в выражении живой силы

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k$$

вместо коэффициентов a_{hk}, зависящих исключительно от q, можно подставить числовые значения $a^0{}_{hk}$, соответствующие конфигурации равновесия C^0, и написать

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}} a^0{}_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k. \tag{12}$$

Полагая временно

$$a^0{}_{hk}=\alpha_{hk}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h\,\partial q_k}\right)^0=\beta_{hk},$$

рассмотрим две квадратичные формы:

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n}\alpha_{hk}z_h z_k, \qquad \frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n}\beta_{hk}z_h z_k, \tag{13}$$

первая из которых, как и живая сила, из которой она получается путем подстановки z вместо $\dot{q}$, является определенной положительной. Поэтому существует (предыдущий пункт) по крайней мере одно невырожденное линейное однородное преобразование, в результате которого переменные z_h заменяются линейными однородными функциями с постоянными действительными коэффициентами от новых n переменных x_i, после чего две формы (13) соответственно перейдут в следующие:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2, \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i^2, \tag{13'}$$

где ρ_i суть действительные постоянные. Так как мы допускаем, что максимум функции U — общего типа, то можем прибавить, что вторая из форм (13), вследствие самого ее происхождения, и, следовательно, вторая из форм (13') является *определенной отрицательной*, так что все ρ_i *будут необходимо отрицательными*.

Положив теперь

$$\rho_i=-\omega_i^2 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

заключаем, что потенциал U в окрестности C^0, по крайней мере с точностью до членов порядка выше второго, принимает вид

$$U=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 x_i^2. \tag{14}$$

Что касается живой силы, то заметим, что вследствие предположения $z_h = q_h - q_h^0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ и благодаря постоянным значениям коэффициентов линейного преобразования переменных z к переменным x то же преобразование дает переход от $\dot{q}$ к $\dot{x}$, так что тем же самым способом, каким первая из форм (13) преобразуется в первую из форм (13'), выражение (12) живой силы преобразуется в следующее:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2. \tag{15}$$

Это выражение и будет представлять, по крайней мере до членов порядка выше второго, живую силу нашей системы для состояния движения, близкого к состоянию равновесия в C^0.

Переменные x_i, для которых потенциал и живая сила системы вблизи состояния устойчивого равновесия принимают соответственно формы (14), (15), называются нормальными координатами (относительно этого состояния равновесия).

Далее, в этих нормальных координатах функция Лагранжа рассматриваемого нами движения определится равенством (предыдущая глава, п. 40)

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2),$$

так что соответствующие уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, мы видим, что во всяком движении голономной системы (со связями без трения) в непосредственной близости от конфигурации устойчивого равновесия (общего типа) каждая из нормальных координат x_i изменяется по гармоническому закону.

Приписав индексу i какое-нибудь одно из значений от 1 до n, рассмотрим то частное колебательное движение системы, в котором x_i изменяется гармонически с частотой $\omega_i/2\pi$, в то время как остальные $n-1$ нормальных координат x_j (при $j \gtrless i$) остаются постоянно равными нулю. Эти n простых гармонических независимых колебаний, определенных в соответствии с n значениями индекса i, называются *главными колебаниями*. Очевидно, что наиболее общее колебательное движение системы в окрестности конфигурации рассматриваемого устойчивого равновесия можно представить себе получающимся посредством наложения или *сложения* этих n главных колебаний. Следовательно, нормальное выражение (15) для T показывает, что живая сила колебаний в общем случае равна сумме живых сил составляющих главных колебаний.

Частоты $\frac{\omega_i}{2\pi}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ этих составляющих колебаний называются *главными*; самая низшая частота (т. е. та, которая дает самый низкий звук, если колебание соответствует акустическому явлению) носит название *основной частоты или основного тона*, тогда как другие, расположенные в возрастающем порядке, называются соответственно *первой, второй, ... гармониками* системы.

Полученные результаты оправдывают в этом случае то общее замечание (т. I, гл. II, п. 34), что все явления незатухающего колебательного характера по существу можно анализировать посредством независимых гармонических движений.

Естественно, что после того, как получено общее решение уравнений малых колебаний в нормальных координатах в виде

$$x_i = r_i \cos(\omega_i t + \theta_i^0) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где r_i и θ_i^0 обозначают $2n$ постоянных интеграции (из которых первые n во всех случаях можно предполагать положительными), надо возвратиться к выражениям того же общего решения в первоначальных координатах q, принимая во внимание линейную подстановку, связывающую эти q с x. Если такая подстановка определяется равенствами

$$q_h = q_h^0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{hi} x_i \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

то непосредственно находим

$$q_h = q_h^0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{hi} r_i \cos(\omega_i t + \theta_i^0) \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

где q^0 и γ суть вполне определенные постоянные, зависящие от природы колеблющейся системы, а r и θ — постоянные интегрирования.

Для приложений важно заметить, что не всегда удобно приводить живую силу и потенциал к каноническим формам (14), (15), но весьма существенно, чтобы в выражениях T и U исчезали все члены с произведениями координат, т. е. чтобы T и U были приведены к виду

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \dot{y}_i^2, \qquad U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2.$$

В этом случае главные частоты определяются из соотношений

$$\omega_i^2 = -\frac{b_i}{a_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

что можно видеть непосредственно или составляя соответствующие уравнения Лагранжа $a_i\ddot{y}_i - b_i y_i = 0$, или представляя себе, что не y_i, а $y_i/\sqrt{a_i}$ являются нормальными координатами. Общее решение уравнений малых колебаний и в координатах y_i приводит для каждой из них к гармоническому движению; по этой причине иногда также называют *нормальными* такие координаты, которые, как y_i, придают T и U одновременно ортогональную форму.

14. Вынужденные колебания. Как и в случае системы с одной степенью свободы (гл. I, п. 59), обычно называют *вынужденными колебаниями* какой-нибудь голономной системы в окрестности конфигурации устойчивого равновесия колебания, определяющиеся совместным действием консервативных сил, к которым относится состояние равновесия, и добавочных сил, например периодических.

Оставляя рассмотрение общего вопроса для упражнений (см., в частности, упражнения 19 и 20), ограничимся здесь утверждением, что мы встретимся с явлениями, аналогичными тем, которые были изучены в случае задач одного измерения (периоды вынужденных колебаний, затухания колебаний, резонанс и т. д.). Естественно, мы встретим более разнообразные случаи, а формальные выкладки, по необходимости, будут более пространными [1]).

Можно прибавить еще, что так как мы ограничились наложением на консервативные силы только периодически действующих сил (функций только времени), то мы получим случай, аналогичный тому идеальному случаю незатухающих колебаний, которым мы занимались, в предположении только одной степени свободы, в п. 64 гл. 1.

15. Теоремы Рэлея. Рэлей [2]) исследовал, как изменяются главные частоты в материальной системе, колеблющейся вокруг одной из своих конфигураций устойчивого равновесия, и, в частности, как изменяется основная частота, когда:

а) накладываются новые связи (само собой разумеется, так, чтобы не исключалась конфигурация рассматриваемого равновесия);

б) увеличиваются массы, составляющие систему;

---

[1]) См., например, Рэлей, Теория звука, 1941, т. I, гл. IV, V.

[2]) Рэлей (J. W. Strutt) родился в Лангфорд Грове (Эссекс) в 1842 г., умер в Витгеме в 1919 г. В 1879 г. заместил Максвелла по кафедре физики в Кембридже и в 1887 г. перешел в Королевский институт в Лондоне. Один из крупнейших английских физиков. Особенно известны его труды по оптике и акустике. Его многочисленные работы охватывают все математическое естествознание — от математики до химии. Вспомним, например, его исследования по гидродинамике, по капиллярности, по статистической механике, труды по электрометрологии, объяснение окраски неба, открытие вместе с Рамзеем аргона. Его сочинения собраны в семи томах.

в) увеличивается потенциальная энергия — U.

В случае „б" можно в более общем смысле говорить о том, что увеличивается инерция системы. Что же касается предположения „в", то его можно выразить также, говоря, что увеличивается емкость системы по отношению к энергии *). Чтобы дать себе отчет в этом способе выражения, вспомним, что в окрестности конфигурации C^0 устойчивого равновесия работа

$$L_{CC'} = U_{C'} - U_C,$$

которую совершают действующие силы, когда система переходит из одной определенной конфигурации C в любую другую C', достигает своего максимума тогда и только тогда, когда конфигурация C' совпадает с C^0; это максимальное значение определяется равенством

$$L_{CC^0} = U_{C^0} - U_C.$$

Поэтому достаточно представить себе, что мы можем распорядиться аддитивной произвольной постоянной так, чтобы $U_{C^0} = 0$, чтобы убедиться, что потенциальная энергия — U_C, вычисленная в любой конфигурации C (в окрестности C^0), измеряет *максимум работы*, которую *способна* совершить система, исходя из этой конфигурации.

Рассмотрим сначала случай „а"; чтобы сделать изучение более простым, обратимся к геометрическому представлению, рассматривая нормальные координаты $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, как декартовы прямоугольные координаты линейного пространства n измерений S_n. В этом пространстве эквипотенциальные поверхности

$$-2U = \sum_{=1}^{n} \omega_i^2 x_i^2 = \text{const}$$

составляют семейство эллипсоидов, гомотетичных между собой относительно общего центра O; рассмотрим ту из этих поверхностей, уравнение которой имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i^2}{4\pi^2} x_i^2 = 1,$$

т. е. эллипсоид E, имеющий полуосями периоды $2\pi/\omega_i$ (обратные частотам) главных колебаний. Если представим себе, что индексы приписываются различным частотам так, чтобы

$$\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n,$$

*) Или, как еще можно сказать, увеличивается „жесткость" системы. (*Прим. ред.*)

т. е. таким образом, чтобы $\omega_1/2\pi$ являлась основной частотой и $\omega_2/2\pi$, $\omega_3/2\pi$, ... составляли соответственно первую, вторую, ... гармоники, то максимальное расстояние точек поверхности E от центра определяется, как известно, основным периодом $2\pi/\omega_1$. Условившись в этом, допустим, согласно предположению „а", что увеличивается число связей системы наложением $p<n$ новых голономных связей, которые, естественно, удовлетворяются в конфигурации равновесия C^0 ($x_i=0$, $i=1, 2, \ldots, n$). В непосредственной близости от C^0 и в принятом нами порядке приближения эти связи, выраженные в нормальных координатах, будут представлены p линейными независимыми уравнениями, обязательно однородными, так как эти уравнения должны удовлетворяться величинами $x_i=0$. В пространстве S_n эти p уравнений определяют линейное пространство $n-p$ измерений S_{n-p}, проходящее через O, так что, в то время как с самого начала возможные для системы конфигурации представлялись всеми точками (достаточно близкими к началу) пространства n измерений S_n, добавление новых p связей ограничивает изменение положения изображающей точки указанным выше пространством S_{n-p}.

Чтобы лучше уяснить это рассуждение, обратимся к случаю, доступному для непосредственного представления, $n=3$, $p=1$, в котором речь идет об эллипсоиде E в пространстве S_3 трех измерений, с центром в начале и имеющем полуоси $\frac{2\pi}{\omega_1}\geqslant\frac{2\pi}{\omega_2}\geqslant\frac{2\pi}{\omega_3}$; в то же время изображающее пространство новой связи сводится к плоскости S_2, проходящей через начало.

Эта плоскость пересекает эллипсоид E по некоторому эллипсу E'; новый основной период и период единственной оставшейся гармоники, после добавления последней связи, определяются соответственно максимумом и минимумом расстояния точек кривой E' от O, т. е. двумя полуосями этого эллипса. Первая теорема Рэлея представляет собой прямое истолкование того геометрического факта, что большая полуось E' всегда заключена (включая концы) между максимальной $2\pi/\omega_1$ и средней $2\pi/\omega_2$ полуосями эллипсоида E.

Чтобы убедиться в этом последнем утверждении, заметим, что, в то время как большая полуось эллипса E' не может быть больше максимальной полуоси $2\pi/\omega_1$ эллипсоида E, сечением которого является E', диаметральная плоскость S_2 всегда пересекает по некоторой прямой главную плоскость x_1x_2 двух полуосей максимальной $2\pi/\omega_1$ и средней $2\pi/\omega_2$ эллипсоида E, так что полудиаметр эллипса E', лежащий на этой прямой (и, следовательно, тем более его большая полуось), не может оказаться меньше $2\pi/\omega_2$. Важно добавить, что оба крайние значения $2\pi/\omega_1$ и $2\pi/\omega_2$ большой полуоси E' действительно могут быть достигнуты при подходящем выборе секущей плоскости S_2 (т. е., механически, новой связи); первое значение будет достигнуто всякий раз, когда плоскость S_2 пройдет через наибольшую полуось эллипсоида E, второе — всякий раз, когда S_2 пройдет через среднюю полуось и будет лежать внутри того двугранного угла, образованного двумя диаметральными плоскостями круговых сечений эллипсоида E, который содержит малую полуось.

Аналогичным образом рассуждают и в общем случае $p < n$ новых связей, наложенных на колеблющуюся материальную систему с n степенями свободы. Здесь изображающее пространство S_{n-p} новой системы связей пересекает эллипсоид E по эллипсоиду E' ($n-p-1$ измерений), имеющему $n-p$ главных полуосей (периоды нового основного тона и $n-p-1$ оставшихся гармоник). Максимальная полуось E' (период нового основного тона) не может, очевидно, превосходить максимальную полуось $2\pi/\omega_1$ эллипсоида E, тогда как, с другой стороны, S_{n-p} пересекает всегда главное пространство S_{p+1} $p+1$ измерений $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, определенное первыми $p+1$ полуосями $\frac{2\pi}{\omega_1} \geqslant \frac{2\pi}{\omega_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{2\pi}{\omega_{p+1}}$ эллипсоида E, по диаметральной прямой эллипсоида E', а длина соответствующего полудиаметра (и, следовательно, тем более максимальная полуось эллипсоида E') не может быть меньше $2\pi/\omega_{p+1}$.

Если примем во внимание, что оба крайних значения $2\pi/\omega_1$ и $2\pi/\omega_{p+1}$ максимальной полуоси могут быть действительно достигнуты путем надлежащего выбора секущего пространства S_{n-p} (т. е. пространства новых связей), то придем, беря частоты вместо периодов, *к первой теореме Рэлея*:

В материальной системе с n степенями свободы, колеблющейся около конфигурации устойчивого равновесия, добавление $p < n$ голономных связей, не будучи в состоянии понизить основной тон, не может и поднять его выше частоты $\frac{\omega_{p+1}}{2\pi}$, принадлежащей $(p+1)$-ой гармонике.

Прибавим к этому, что геометрическое рассмотрение, аналогичное только что изложенному, позволяет видеть, что *из других $n-p-1$ главных частот (или гармоник) новой колеблющейся системы γ-ая, при $\gamma \leqslant n-p-1$, будет всегда заключена (включая концы) между $\frac{\omega_{\gamma+1}}{2\pi}$ и $\frac{\omega_{\gamma+p+1}}{2\pi}$.*

Перейдем теперь к случаям „б“ и „в“, которые можно рассматривать почти одновременно. Здесь опять удобно обратиться к алгебраическим соображениям п. 12 и вспомнить, что когда имеются две квадратичные формы A и B от n переменных z_h ($h=1, 2, \ldots, n$), из которых A — определенная положительная, то отношение B/A, как бы ни изменялись z, за исключением $z_h=0$, остается всегда заключенным между наибольшим и наименьшим из корней уравнения (11) [1]). Если теперь представим себе, что А увеличивается в том смысле, что она заменяется формой А' с коэффициентами, измененными так, что соответственно одним и тем же значениям (не равным нулю одновременно) переменных всегда имеем $A' > A$, то очевидно, что как максимум, так и минимум отношения В/А могут только уменьшиться; и, наоборот, они могут только увеличиться, если увеличивается В.

Отождествим теперь, как в п. 13, форму А с живой силой T колеблющейся системы (за исключением только замены переменных $\dot{x}$ через x), а форму В — с потенциальной энергией — U; вследствие этого корни уравнения (11) можно отождествить с $\rho_i = -\omega_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Если у всех материальных точек системы или даже только у некоторых из них возрастает масса, то увеличится, при прочих равных условиях, $A = T$ в смысле, разъясненном выше, так

[1]) Так как речь идет о хорошо известной теореме, не бесполезно напомнить ее доказательство. Представим себе, что вместо первоначальных переменных z подставлены те их линейные комбинации x, которые мы назвали нормальными координатами (пп. 13, 14) и в которых обе квадратичные формы принимают канонический вид

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad B = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i^2,$$

где ρ_i обозначают корни уравнения (11); введем отношения

$$\alpha_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

представляющие собой обычное обобщение, для n переменных, направляющих косинусов ориентированной прямой, для которых существует тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{B}{A} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \alpha_i^2,$$

или, принимая во внимание только что упомянутое тождество

$$\frac{B}{A} = \rho_1^2 + \sum_{i=1}^{n} (\rho_i - \rho_1)\alpha_i^2 = \rho_n^2 - \sum_{i=1}^{n} (\rho_n - \rho_i)\alpha_i^2;$$

отсюда непосредственно следует, что если ρ_1, ρ_n суть соответственно минимум и максимум ρ_i, то

$$\rho_1 \leqslant \frac{B}{A} \leqslant \rho_n.$$

что мы будем иметь теорему Рэлея: *увеличение инерции в колеблющейся системе может только уменьшить ее основную частоту и частоту последней гармоники.*

Этому предложению можно дать более общую форму, так как тот же самый эффект от увеличения инерции распространяется и на всякую другую из остальных главных частот.

Это выводится из естественного обобщения только что использованного алгебраического замечания, в силу которого, обращаясь к геометрическому рассмотрению, изложенному в начале этого пункта, мы увидим, что также и промежуточные корни уравнения (11) приобретают характер абсолютных максимумов после введения $1, 2, \ldots, n-2$ связей.

Наоборот, если представим себе, что увеличивается потенциальная энергия $B=-V$, то можно заключить, что *увеличение емкости системы по отношению к энергии* *) *повышает или, по крайней мере, не понижает отдельных главных частот колеблющейся системы.*

§ 4. Устойчивые решения системы дифференциальных уравнений

16. Безусловная устойчивость или устойчивость по Дирихле. Как уже указывалось в п. 7, мы предполагаем распространить здесь понятие об устойчивости со случая состояний равновесия (§ 1) на случай явлений движения. При этом для более широкой применимости результатов рассмотрим вопрос в наиболее общей и абстрактной форме.

Предположим, что данный процесс определяется в любой момент посредством известного числа n произвольных и независимых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$; пусть эти параметры имеют геометрическую, кинематическую или другую, более свойственную данному процессу природу [5]. Предположим далее, что закон, по которому эти параметры изменяются с временем, определяется известной нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_h}{dt}=X_h(x|t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \qquad (16)$$

где X_h в правой части обозначают n известных функций от аргументов x и t, обладающих всеми теми свойствами непрерывности и правильности, которые в состоянии обеспечить для системы (16), по крайней мере в некоторой области, существование и единственность решений, удовлетворяющих произвольно заданным начальным условиям.

*) Увеличение „жесткости" системы. (*Прим. ред.*)

Обратимся здесь, так же как и в предыдущем пункте, к геометрическому представлению, рассматривая переменные как прямоугольные декартовы координаты в n-мерном пространстве S_n; как и в п. 2, назовем „отклонением" двух точек x', x'' максимум абсолютных величин $|x'_h - x''_h|$ разностей одноименных координат.

В этом пространстве S_n всякое частное решение σ

$$x_h = x_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

системы (16), т. е. всякое частное явление, определяемое этим элементарным законом, будет представлено одной определенной *интегральной кривой*; в силу упомянутых выше теорем существования и единственности, через всякую точку P_0 пространства S_n (или, по крайней мере, через всякую точку той области, в которой функции X_h удовлетворяют условию правильности), принятую за начальную, проходит одна и только одна такая кривая, так что пространство S_n (или указанная выше область) будет покрыто системой ∞^{n-1} (или конгруэнцией) интегральных кривых — изображений различных явлений, определяемых уравнениями (16).

Иногда приходится фиксировать внимание на частном решении $\bar{\sigma}$, определяемом некоторыми начальными значениями $x_h = \bar{x}_h^0$ координат при $t = t_0$, и сравнивать его с решениями σ, которые вначале близки к $\bar{\sigma}$. Если удастся установить, что все решения σ, которые получаются в результате небольшого начального возмущения, остаются при безграничном возрастании времени в непосредственной близости к $\bar{\sigma}$, то можно сказать, что общий ход явления, описываемый уравнениями (16), характеризуется одним только решением $\bar{\sigma}$, по крайней мере для некоторой области начальных данных. Решение $\bar{\sigma}$, однако, не будет характеризовать в этом смысле ход явления, если, при самом незначительном начальном возмущении, решение σ с возрастанием времени в конце концов будет значительно отличаться от $\bar{\sigma}$.

Все это оправдывает разделение решений системы дифференциальных уравнений (16) на *устойчивые* и *неустойчивые* на основании критерия, который мы здесь уточним, высказав его прямо в геометрически-кинематической форме. Частное решение (или интегральная кривая) уравнений (16), которое в момент $t = t_0$, принятый за начальный, проходит через точку $\bar{P}_0(\bar{x}_0)$, называется *устойчивым*, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое другое положительное число η, что если взять за начальную какую-нибудь другую точку $P_0(x_0)$, отклонение которой от $\bar{P}_0$ меньше η, то отклонение точек $\bar{P}$ и P друг от друга на кривых $\bar{\sigma}$ и σ для одного и того же момента времени будет неопределенно долго оставаться меньшим ε.

Для избежания недоразумений необходимо лучше выяснить смысл и свойства этого последнего условия, заключающегося в том, что отклонение точек $\overline{P}$ и P друг от друга остается *неопределенно долго* меньше ε. Если ограничиться сравнением решений $\overline{\sigma}$ и σ в промежутке времени T, хотя и большом, но вполне определенном, то всегда возможно (в тех условиях, в которых теоремы существования общих интегралов, имеющие силу при каком-нибудь t, обеспечивают им непрерывность в отношении произвольных постоянных) при всяком ε поставить ему в соответствие начальное отклонение η, достаточно малое, для того чтобы во всяком интервале времени от t_0 до t_0+T отклонение между точками в один и тот же момент времени оставалось меньше ε. Может, однако, случиться, что когда заставляют T возрастать до бесконечности, η будет стремиться к нулю (при всяком ε, заданном достаточно малым). Решение $\overline{\sigma}$ называется устойчивым, когда эта возможность исключена.

В ближайших главах мы дадим различные простые и наглядные примеры устойчивости движения.

Заметим, между прочим, что в динамических случаях, когда мы имеем голономные системы со связями, не зависящими от времени, находящиеся под действием консервативных (или даже только позиционных) сил, уравнения движения остаются неизменными при замене t на $-t$, т. е. все движения *обратимы*. Поэтому в таких случаях, как и в случаях равновесия, понятие устойчивости приложимо без ограничения времени, т. е. от наиболее отдаленного прошедшего до наиболее далекого будущего (при t, изменяющемся от $-\infty$ до $+\infty$). Но, как мы увидим далее, в некоторых случаях, в частности, когда входят силы *трения, вязкости* или вообще так называемые *диссипативные силы* (§ 7), движения оказываются необратимыми; тогда необходимо ограничиться для каждого отдельного движения разбором *устойчивости в будущем*, т. е. только при $t \geqslant 0$.

17. Обобщенная теорема Дирихле. В связи с содержанием предыдущего пункта мы обратим здесь внимание на одно замечание, которое само по себе не имеет большого значения, однако ценно в том отношении, что лучше выясняет, при сопоставлении, сущность теоремы Дирихле для динамических задач.

Предположим, что система (16) имеет интеграл (который может зависеть явно от t)

$$H(x|t) = \text{const}$$

и что для некоторого статического решения $\overline{\sigma}$, т. е. такого решения, для которого соответствующие x_h приводятся к постоянным и, следовательно, сохраняют постоянно свои начальные значения $\overline{x}_h^0$, функция $H(x|t)$ имеет действительный максимум или минимум *при* *любом значении* t. В таком случае статическое решение $\bar{\sigma}$ *устойчиво* в том смысле, как это разъяснено в предыдущем пункте. Доказательство по смыслу тождественно с доказательством, которое мы дали теореме Дирихле в собственном смысле, поэтому мы ограничимся ссылкой на рассуждение п. 5 или, лучше, на синтетическое интуитивное рассмотрение п. 6 [6].

Остановимся немного на сопоставлении теоремы Дирихле с этим ее обобщением. Мы должны допустить здесь, что 1) $x_h = x_h^0$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) является решением (статическим) уравнений (16) и 2) $H(\bar{x}^0|t)$ для $H(x|t)$ есть действительный максимум или минимум, каково бы ни было t. Оба эти предположения не зависят друг от друга и в общей их сложности являются весьма ограничительными.

Наоборот, в динамическом случае (теорема Дирихле в собственном смысле) предположение о том, что уравнения движения допускают статическое решение, т. е. что для системы существует конфигурация равновесия C^0, влечет за собой количественные условия (обращение в нуль первых производных от потенциала), необходимые для существования минимума полной энергии, так что для обеспечения действительного минимума не нужны сверх только что указанных количественных условий какие-либо другие, кроме чисто качественных. Можно сказать, что, в конце концов, большая важность теоремы Дирихле зависит от этого обстоятельства, которое *вообще* не встречается в случае какой угодно обобщенной лагранжевой системы.

Здесь сказано *вообще*, потому что, как это прямо вытекает из предыдущего рассуждения, указанное выше обстоятельство представится, помимо динамического случая, также и для обобщенных лагранжевых систем, для которых $\mathfrak{L}$ не зависит от времени; мы вернемся к этому в § 1 гл. X [7].

18. Приведенная устойчивость или устойчивость по Раусу[1]**.** Обращаясь к общему учению об устойчивости, добавим некоторые замечания, имея в виду приложения, которыми мы будем заниматься в ближайших главах.

Иногда случается, что между параметрами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяющими в любой момент какое-нибудь явление движения, некоторые параметры, например $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ($m < n$), выделяются среди остальных по своему значению в том смысле, что они одни достаточны для определения характерных черт хода явления. Когда

[1]) Е. Дж. Раус (Edwad John Routh) родился в Квебеке (Канада) в 1831 г., умер в Кэмбридже в 1907 г. Был преподавателем и экзаминатором и вел научную работу в Кэмбридже и Лондоне. Разработал вопросы, касающиеся линейной устойчивости (в смысле, который будет указан в п. 22) в его Essay on the stability of steady motion (Cambridge, 1877), премированном Кэмбриджским университетом. Ему принадлежит введение приведенной лагранжевой функции (гл. I, пп. 45, 46), называемой поэтому некоторыми авторами *функцией Рауса*.

исследуется устойчивость движения, то, как и раньше, сравнивают частное решение $\bar{\sigma}$ с каким-либо решением σ, близким к $\bar{\sigma}$ в начальный момент; в данном случае можно ограничиться рассмотрением одновременных отклонений для $\bar{\sigma}$ и σ только этих параметров $x_1, x_2, \ldots, x_m$, не принимая во внимание остальных.

Рассмотрим, например, особенно простое движение точки по заданной траектории при заданных силах, уравнение которого

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s}/t)$$

можно заменить нормальной системой первого порядка

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad \frac{d\dot{s}}{dt} = f(s, \dot{s}|t).$$

При сравнении частного движения $\bar{\sigma}$ и любого другого движения σ, определенных предыдущей системой, иногда может представить интерес вопрос о том, будут ли оставаться близкими скорости для одного и того же момента в том и другом движении, в то время как различие в положениях точек будет иметь небольшое значение или даже вовсе может не иметь значения. Так, в частности, если речь идет о двух равномерных движениях, естественно рассмотреть одно как тип или образец другого, когда соответствующие скорости почти равны; при этом можно отвлечься от того, что координаты точек в конце концов после длительного промежутка времени будут отличаться на сколь угодно большую величину, как бы мало ни было различие скоростей (лишь бы оно не равнялось нулю).

Во всех случаях, когда, руководствуясь соображениями устойчивости, можно или желательно ограничиться при рассмотрении отклонения частью характеристических параметров, мы будем говорить, что речь идет о *приведенной устойчивости* (или неустойчивости) или об *устойчивости по Раусу*; в противоположность этому мы назовем *безусловной устойчивостью* (или неустойчивостью), или *устойчивостью по Дирихле*, устойчивость, которой мы занимались в предыдущем пункте.

Отметим, наконец, что в некоторых случаях (главным образом в тех, в которых рассмотрение приведенной устойчивости ставится природой самого вопроса) „привилегированные" параметры x_1, x_2, …, x_m представляются уже отделенными от остальных в дифференциальной системе (16), поскольку эту систему можно разбить на две, первая из которых будет вида

$$\frac{dx_h}{dt} = X_h(x_1, x_2, \ldots, x_m|t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m), \qquad (16')$$

т. е. содержит только параметры x_1, x_2, …, x_m, а вторая

$$\frac{dx_{m+k}}{dt} = X_{m+k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-m) \qquad (16'')$$

выражает производные от $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ в функциях от всех параметров. Поэтому, когда путем интегрирования частичной системы (16′) будут найдены $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$, дополнительную систему можно привести, в свою очередь, к системе только с $n-m$ остальными неизвестными x_{m+k} $(k=1, 2, \ldots, n-m)$.

Очевидно, что в этих случаях устойчивость (или неустойчивость) решений полной системы (16′), (16″), *приведенной к параметрам* $x_1, x_2, \ldots, x_m$, будет тождественна с безусловной устойчивостью решений частичной системы (16′) [8].

Некоторые интересные примеры на устойчивость этого типа мы встретим в ближайших главах.

§ 5. Малые колебания около устойчивого решения системы дифференциальных уравнений. Критерии неустойчивости

19. Уравнения в вариациях. Возьмем снова систему (16)

$$\frac{dx_h}{dt}=X_h(x|t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n)$$

и рассмотрим ее устойчивое решение $\bar{\sigma}$

$$\bar{x}_h=\bar{x}_h(t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n);$$

представим уравнения какого-нибудь другого решения σ системы (16) в виде

$$x_h=\bar{x}_h(t)+\xi_h(t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \tag{17}$$

где ξ_h обозначают n новых неизвестных функций.

Из самого определения устойчивости решения $\bar{\sigma}$ (п. 16) следует, что достаточно взять для σ начальные значения x^0 переменных x, достаточно близкие к одновременным значениям $\bar{x}^0$ решения $\bar{\sigma}$ (т. е. достаточно близкие к нулю начальные значения ξ^0 неизвестных ξ), для того чтобы функции ξ оставались *неопределенно* долго меньшими по абсолютной величине некоторого наперед заданного постоянного числа ε.

Если теперь в выражениях функций X в правых частях системы (16) мы будем рассматривать t как параметр и предположим, что самые функции X могут быть разложены в ряд Тэйлора по отношению к переменным $\xi=x-\bar{x}$, то, принимая во внимание уравнения (17), будем иметь

$$X_h=(X_h)_{x=\bar{x}}+\sum_{k=1}^{n}\xi_k\left(\frac{dX_k}{dx_k}\right)_{x=\bar{x}}+R_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

где остаточные члены R_h относительно ξ будут по меньшей мере второго порядка. Так как для всех решений σ, вначале близких к $\bar{\sigma}$, всегда имеем $\xi_k<\varepsilon$, то этими остаточными членами R_h можно будет пренебречь всякий раз, когда значение ε будет задано достаточно малым для того, чтобы можно было его рассматривать как величину первого порядка. Допуская явно это предположение и замечая, что, так как $\bar{\sigma}$ есть решение системы (16), имеем тождественно

$$\frac{d\bar{x}_h}{dt}=(X_h)_{x=\bar{x}} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

путем подстановки выражений (17) в уравнения (16) мы убедимся, что функции для решений σ, вначале близких к устойчивому решению $\bar{\sigma}$, определятся по меньшей мере до членов, весьма малых по сравнению с ε, из системы уравнений

$$\frac{d\xi_h}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_k}\right)_{x=\bar{x}} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{18}$$

Уравнения (18) называются *уравнениями в вариациях* системы (16) по отношению к ее устойчивому решению $\bar{\sigma}$ [1]).

В заключение заметим, что функции ξ, определенные из системы (18), после подстановки в решения (17), дают приближенное представление всех решений системы (16), близких к устойчивому решению $\bar{\sigma}$, справедливое для сколь угодно большого промежутка времени, если начальные значения ξ^0 выбраны достаточно малыми. Такие решения системы (16) называются *малыми колебаниями около устойчивого решения* $\bar{\sigma}$.

С аналитической точки зрения заметим, что так как $\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_k}\right)_{x=\bar{x}}$ после вычисления будут известными функциями от одной независимой переменной t, то уравнения в вариациях (18) образуют систему из n линейных однородных уравнений относительно n неизвестных функций ξ, так что с точки зрения соответствующего интегрирования остается в силе вся известная теория этих уравнений.

20. Вывод общего интеграла уравнений в вариациях из интеграла конечных уравнений. Ограничимся здесь замечанием, что всякий раз, когда известно общее решение уравнений (16), из него можно непосредственно вывести одним только дифференцированием общее решение системы в вариациях (18).

Действительно, пусть функции

$$x_h=f_h(t\,|\,x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{19}$$

определяют общее решение системы (16), где произвольные постоянные задаются в виде начальных значений x_h^0 какого-либо решения. Решение $\bar{\sigma}$ по предположению определяется своими

---

[1]) Относительно тех, кто ввел в механику математическое изучение уравнений в вариациях, см. Poincaré, Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, т. I, гл. IV, Paris, 1892.

начальными значениями $x_h^0 = \bar{x}_h^0$, и на основании соотношений (17) начальные значения, определяющие любое решение σ, бесконечно близкое к $\bar{\sigma}$, будут вида $\bar{x}_h^0 + \xi_h^0$, где ξ_h^0 надо рассматривать как бесконечно малые. При этих значениях x_h^0 правые части уравнений (19) можно написать в виде

$$\bar{x}_h + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_k^0}\right)_{x^0=\bar{x}^0} \xi_k^0 \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

откуда, применяя еще раз формулы (17), придем к уравнениям

$$\xi_h(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_k^0}\right)_{x^0=\bar{x}^0} \xi_k^0 \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

которые дают общее решение линейных уравнений в вариациях в функции от независимого переменного t и начальных смещений ξ_k^0 решения σ от $\bar{\sigma}$, а также, как это естественно, от постоянных $\bar{x}_h^0$, определяющих решение $\bar{\sigma}$.

Аналогичным образом найдем, что если для уравнений (16) известно не общее решение, а только семейство решений, зависящее от $m < n$ произвольных постоянных (существенных), то из него можно вывести только дифференцированием семейство решений для уравнений в вариациях, зависящее линейно от m произвольных постоянных.

Особенно простое приложение этого замечания мы имеем в случае системы (16), правые части уравнений которой не содержат явно t; в этом случае ясно, что если $x_h = x_h(t)$ есть частное решение, то из него непосредственно выводим класс ∞^1 решений, заменяя t на $t - t_0$, где t_0 — произвольная постоянная; дифференцируя $x_h(t - t_0)$ по t_0 и опуская дифференциал $-\delta t_0$ (который здесь появляется как мультипликативная произвольная постоянная), мы получим как частное решение системы (18) уравнения

$$\xi_h = \dot{x}_h(t - t_0) \qquad (h=1, 2, \ldots, n).$$

21. Малые колебания около статического решения. Характеристические показатели. Критерий неустойчивости. Простой и в то же время очень важный для механики случай будем иметь, когда функции X не зависят явно от t:

$$\frac{dx_h}{dt} = X_h(x) \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \qquad (20)$$

и, кроме того, устойчивое решение $\bar{\sigma}$, около которого рассматриваются малые колебания, является статическим.

В этом предположении уравнения в вариациях (18) будут уравнениями с постоянными коэффициентами.

Полагая для краткости

$$\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_k}\right)_{x=\bar{x}^0}=c_{hk} \qquad (h,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

приведем уравнения в вариациях к виду

$$\frac{d\xi_h}{dt}=\sum_{k=1}^{n} c_{hk}\xi_k \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (21)$$

Из анализа известно, что при интегрировании системы (21) следует поступать так же, как и при интегрировании линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами с одной неизвестной функцией (ср. т. I, гл. II, пп. 42—43), т. е. следует искать частные решения вида

$$\xi_h=\lambda_h e^{zt} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (22)$$

где λ_h и z обозначают постоянные, которые затем надо определить. Подставляя функции (22) в уравнения (21), мы тотчас же увидим, что для того, чтобы эти уравнения удовлетворялись, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись n уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_{hk}\lambda_k=z\lambda_h \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

которые по отношению к n неизвестным λ являются линейными и однородными; они будут совместными только тогда, когда будет равен нулю определитель из коэффициентов при λ, т. е. когда постоянная z будет корнем алгебраического уравнения n-ой степени, называемого *характеристическим уравнением* системы (21)

$$\Delta(z)\equiv\|\, c_{hk}-\delta_{hk}z\,\|=0, \qquad (23)$$

где по обыкновению δ_{hk} обозначает единицу, если индексы h и k совпадают, и нуль, если они не совпадают. Корни $z_s\,(s=1,\ 2,\ \ldots)$ этого уравнения называются *характеристическими показателями* системы (21) или, еще лучше, статического решения $\bar{\sigma}$ уравнений (20), к которым относятся уравнения в вариациях (21).

Различные между собой характеристические показатели определяют столько же решений вида (22), линейно независимых между собой, системы (21). Здесь нет необходимости останавливаться на рассмотрении того, как находятся путем алгебраических операций другие необходимые частные решения для построения основной системы в том случае, когда число этих различных между собой характеристических показателей окажется меньше n [9]; обратимся прямо к малым колебаниям около статического решения $\bar{\sigma}$.

Легко интуитивным путем прийти к заключению, что в предполагаемом здесь случае устойчивости решения $\bar{\sigma}$ характеристические показатели не могут иметь положительную действительную часть, если говорить об устойчивости в будущем.

В самом деле, предположим, что $z=\mu+i\nu$ при $\mu>0$ есть такой показатель, и пусть функции (22) представляют собой соответствующее решение уравнений (21). Постоянные λ_h наверное не все нули; с другой стороны, вместе с решением (22) система (21) вследствие того, что она является линейной, допускает в качестве решений n функций $\eta\lambda_h e^{zt}$, где η обозначает действительную произвольную постоянную; если возьмем постоянную η достаточно малой по абсолютной величине, то будем иметь решение уравнений (21), вначале сколь угодно близкое к нулю, для которого, при заданном виде показательной функции $e^{zt}=e^{\mu t}e^{i\nu t}$, по крайней мере одна из функций ξ_h (та или одна из тех, для которых $\lambda_h \gtrless 0$) возрастает при t, стремящемся к бесконечности. Заметим, что в предыдущем рассуждении мы ввели решения, которые, вообще говоря, будут комплексными. Но если мы не будем иметь $\nu=0$ (в этом последнем случае только что изложенное рассуждение относится прямо к действительному решению), то характеристическое уравнение вместе с корнем $z=\mu+i\nu$ будет допускать также и сопряженный корень $\bar{z}=\mu-i\nu$. Полагая последовательно $\lambda_h=\rho e^{i\theta}/2$, $\lambda_h=\rho e^{-i\theta}/2$, можно получить для системы (21) действительное решение

$$\eta(\xi_h+\bar{\xi}_h)=\eta\rho e^{\mu t}\cos(\nu t+\theta),$$

которое при заданном η, близком к нулю, вследствие наличия множителя $e^{\mu t}$ нельзя рассматривать как ограниченное при стремлении t к бесконечности; это решение, колеблясь около нуля, принимает сколь угодно большие значения.

Аналогичным образом, если рассмотрим только прошедшее время, то увидим, что нельзя допустить характеристических показателей с отрицательной действительной частью.

Следовательно, для того чтобы решение $\bar{\sigma}$ было устойчивым как в прошедшем, так и в будущем, необходимо, чтобы действительные части всех характеристических показателей были равны нулю. Повидимому, можно было бы думать, что предыдущим интуитивным рассуждениям можно дать совершенно строгую форму; но в действительности аналитическое исследование устойчивости до сих пор было в состоянии установить лишь более или менее косвенные результаты. А. М. Ляпунов пришел к следующему результату, формулировкой которого мы здесь ограничимся.

Для того чтобы статическое решение уравнений (20) *было устойчивым, необходимо, чтобы все его характеристические показатели были чисто мнимыми (за исключением разве лишь одного, равного нулю)* [1]).

---

[1]) Некоторые авторы полагают $z_s=iz'_s$ и называют характеристическими показателями z'_s, так что необходимое условие устойчивости будет заключаться в том, чтобы характеристические показатели были все действительными (за исключением разве одного, равного нулю).

Другими словами, мы имеем следующий критерий неустойчивости:

Статическое решение уравнений (20) *будет наверное неустойчивым, если по крайней мере один из его характеристических показателей имеет действительную часть, отличную от нуля.*

Необходимо добавить, что предыдущий результат, к сожалению, вообще говоря, необратим, так как можно показать на конкретных примерах возможность статических решений со всеми характеристическими показателями чисто мнимыми и тем не менее неустойчивых [1]) [10].

22. Динамический случай. Обращение теоремы Дирихле. Оставим пока общие рассуждения предыдущих пунктов, чтобы показать, как они связываются с задачей о малых колебаниях голономной системы около некоторой конфигурации устойчивого равновесия, изученной уже нами в § 3 при помощи уравнений Лагранжа.

С этой целью начнем с указания того, как способ, изложенный в пп. 19, 21, прилагается к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x_h}{dt^2}=X_h(x) \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{24}$$

которая отличается от первоначальной системы (20) только тем, что в левой части вместо производных первого порядка от неизвестных функций входят производные второго порядка. Известно, что такую систему всегда можно привести к виду (20), принимая за неизвестные функции вместе с x_h также и $\dot{x}_h=dx_h/dt$ и рассматривая вместо системы второго порядка (24) эквивалентную ей систему из $2n$ уравнений первого порядка с $2n$ неизвестными функциями

$$\frac{dx_h}{dt}=\dot{x}_h, \quad \frac{d\dot{x}_h}{dt}=X_h(x) \quad (h=1,2,\ \ldots,n). \tag{24'}$$

Предполагая, что для системы (24) известно статическое решение $x_h=\text{const}=\bar{x}_h^0$, будем иметь для системы (24′) решение, тоже статическое, $x_h=\bar{x}_h^0$, $\dot{x}_h=0$; поэтому можно образовать соответствующие этому решению уравнения в вариациях системы (24′) и дальше поступать так, как указано в предыдущем пункте.

Но при заданной частной форме уравнений (24) (именно благодаря отсутствию в правых частях первых производных от x) удобнее оперировать прямо с самими уравнениями (24). Подстановка

$$x_h=\bar{x}_h^0+\xi_h \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

[1]) Levi-Civita, Sopra alcuni criteri di instabilità, *Ann. di Mat.*, серия 3-я, т. 5, 1901, стр. 221—308.

приводит к тому, что уравнения в вариациях, соответствующие решению $x_h = \bar{x}_h^0$, при обозначениях предыдущего пункта принимают вид

$$\frac{d^2\xi_h}{dt^2} = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} c_{hk}\xi_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (25)$$

т. е. отличаются от уравнений в вариациях (21) системы (20) только тем, что в левую часть входят вторые производные от ξ вместо первых.

Если, далее, мы будем искать частные решения показательного типа $\xi_h = \lambda_h e^{zt}$ при постоянных λ и z, то для z придем к характеристическому уравнению степени $2n$

$$\Delta(z^2) \equiv \| c_{hk} - \delta_{hk} z^2 \| = 0,$$

которое может быть получено из характеристического уравнения (23) системы (20) посредством подстановки z^2 вместо z. Отсюда заключаем, что необходимое условие для устойчивости статического решения уравнений (20), найденное в предыдущем пункте (все корни уравнения $\Delta(z) = 0$ должны быть чисто мнимыми), здесь для системы (24) переходит в условие, что все корни *уравнения $\Delta(z) = 0$ степени n должны быть отрицательными.*

Заметим теперь, что предыдущие рассуждения остаются также в силе и для всякой системы вида

$$\sum_{k=1}^{n} a_{hk} \frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_h(z) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (26)$$

где a_{hk} обозначают n^2 известных функций от x с определителем $\| a_{hk} \|$, не равным тождественно нулю; действительно, такая система только по виду представляется более общей, чем система (24), так как она приводится к виду (24) после разрешения ее относительно вторых производных. Здесь важно рассмотреть непосредственно системы вида (26), потому что, как легко видеть, уравнения Лагранжа голономной системы, подчиненной связям, не зависящим от времени, и находящейся под действием консервативных сил, в непосредственной близости от конфигурации равновесия принимают вид, который, как частный случай, входит в тип уравнений в вариациях относительно статического решения системы (26) общего вида.

Чтобы проверить это, заметим прежде всего, что если обозначить через $\bar{a}_{hk}$ значения, которые принимают a_{hk} для статического решения, и при этом воспользоваться обычными обозначениями, то уравнения в вариациях системы (26) примут вид

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{hk} \frac{d^2\xi_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} c_{hk}\xi_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (27)$$

так что соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\| c_{hk} - z^2 \bar{a}_{hk} \| = 0. \tag{28}$$

С другой стороны, обращаясь к § 3, возьмем снова найденные там выражения для живой силы T и для потенциала U в непосредственной близости от конфигурации равновесия C^0. Эти выражения, если написать $\dot{z}_h$ вместо $\dot{q}_h$, что возможно на основании того, что было положено $z_h = q_h - q_h^0$, принимают вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk} \dot{z}_h \dot{z}_k, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \beta_{hk} z_h z_k.$$

Если на основании этих выражений составим уравнения Лагранжа, то придем к уравнениям

$$\sum_{k=1}^{n} a_{hk} \frac{d^2 z_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{hk} z_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{27'}$$

которые и будут как раз типа уравнений (27); но, как мы уже отмечали, уравнения (27') составляют их частный случай, потому что в уравнениях (27) c_{hk}, a_{hk} суть действительные числа, не подчиненные никакому условию, тогда как a_{hk}, β_{hk} в уравнениях (27') суть коэффициенты двух квадратичных форм ($a_{hk} = a_{kh}$, $\beta_{hk} = \beta_{kh}$), первая из которых является *определенной положительной*.

Характеристическое уравнение для уравнений (27') имеет вид

$$\| \beta_{hk} - z^2 a_{hk} \| = 0, \tag{28'}$$

и поэтому получается посредством подстановки $\rho = z^2$ из уравнения (11) § 3

$$\| \beta_{hk} - \rho a_{hk} \| = 0,$$

которое в известном смысле можно рассматривать как резольвенту задачи о малых колебаниях голономной системы в окрестности конфигурации устойчивого равновесия.

Отметим попутно, что из самой формы характеристического уравнения (28), которое действительно для всех дифференциальных систем вида (27) и, в частности, для уравнений малых колебаний, следует, что если z есть его корень, то корнем будет также и $-z$. Отсюда имеем: *характеристические показатели статического решения дифференциальной системы типа* (26) *и, в частности, динамической задачи попарно равны по модулю и противоположны по знаку.*

Важнее всего то, что, применяя критерий неустойчивости предыдущего пункта, мы придем к обращению теоремы Дирихле, уже упоминавшемуся в п. 7, по крайней мере в случаях общего типа.

Речь идет о следующей теореме Ляпунова, уже указанной в упомянутом выше пункте.

Дана голономная система, находящаяся под действием консервативных сил; если потенциал U имеет в данной конфигурации C^0 системы стационарное значение, которое не является максимумом, то равновесие в C^0 не будет устойчивым, по крайней мере всякий раз, когда отсутствие максимума можно видеть из рассмотрения местных значений вторых производных от U.

Доказательство почти очевидно, так как последнее предположение в формулировке заключает в себе то, что в канонической форме потенциала (отнесенного к нормальным переменным), т. е. в выражении

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i^2,$$

где ρ_i обозначают корни (все действительные) уравнения (11), по крайней мере один из этих корней будет положительным. Если, например, $\rho_h > 0$, то характеристическое уравнение (28′) допускает два действительных корня $\pm\sqrt{\rho_h}$ (характеристические показатели), откуда следует в силу критерия предыдущего пункта, что конфигурация равновесия C^0 будет наверное неустойчивой.

Мы можем прибавить, что эта конфигурация оказывается тем менее устойчивой, чем больше будет число неотрицательных значений ρ_i. Действительно, достаточно обратиться к дифференциальным уравнениям малых колебаний, т. е. к уравнениям

$$\ddot{x}_i - \rho_i x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

чтобы убедиться, что из нормальных переменных x_i те, которым соответствуют $\rho_i < 0$, будут во всяком случае изменяться по гармоническому закону, тогда как все те, для которых $\rho_i \geqslant 0$, при подходящем выборе начальных условий в конце концов будут возрастать неограниченно вместе с временем. На основании этого можно сказать, что конфигурация неустойчивого равновесия имеет столько *степеней неустойчивости*, сколько имеется в соответствующей канонической форме потенциала неотрицательных коэффициентов.

§ 6. Линейная устойчивость и критерий, даваемый методом малых колебаний

23. Приближенная устойчивость первого порядка или линейная. Вернемся к общим рассуждениям пп. 16, 18, чтобы по возможности быстрее перейти затем к рассмотрению дальнейших замечательных исследований.

Мы уже говорили (п. 21), что на конкретных примерах доказана недостаточность, в общем случае, необходимого условия устойчивости статического решения, найденного Ляпуновым [11].

Следует, однако, заметить, что всякий раз, как оно выполняется, т. е. всякий раз, как все характеристические показатели статического решения $\bar{\sigma}$ чисто мнимые, удается показать, что отклонение решений $\bar{\sigma}$ и σ друг от друга, вначале весьма малое, хотя и не остается неопределенно долго бесконечно малым, но обнаруживается только после более длительного промежутка времени, чем во всех других случаях, т. е. мы имеем в этом случае *устойчивость* в первом приближении, которую можно назвать *линейной*, поскольку принимается во внимание только линейная часть дифференциальных уравнений, о которых идет речь.

Когда имеет место эта линейная устойчивость, решения σ, близкие вначале к рассматриваемому решению $\bar{\sigma}$, называются попрежнему *малыми колебаниями* около $\bar{\sigma}$.

Далее, иногда при схематической постановке конкретных задач оказывается возможным считать удовлетворительным такое приближенное представление явлений, которое сохраняет свое значение если не на все время, то по крайней мере в течение конечного, но достаточно длительного промежутка времени. Это и является основанием того, что в конкретных приложениях, если не удается прийти к устойчивости в строгом смысле, удовлетворяются лишь решением вопроса, оказывается ли данное статическое решение строго неустойчивым, или же оно устойчиво в только что рассмотренном линейном смысле. А для этой цели достаточно применить так называемый *метод малых колебаний* (т. е. решение уравнений в вариациях) и критерий, даваемый рассмотрением характеристических показателей.

В дальнейшем нам придется часто рассматривать вопрос об устойчивости или в строгом смысле, когда задача допускает это, или ограничиваясь первым приближением, на основе исследования характеристических показателей. Здесь же, продолжая следовать дальше в развитии идей общего порядка, мы покажем, как сама физическая реальность во многих случаях подсказывает рассмотрение линейной устойчивости в будущем.

24. Меростатические движения и типичная форма уравнений малых колебаний около них. Рассмотрим динамическую систему с голономными связями, не зависящими от времени, на которую действуют консервативные силы, и предположим, что циклический характер некоторых лагранжевых координат допускает приложение метода игнорирования этих координат (предыдущая глава, п. 45).

Обозначая через $q_1, q_2, \ldots, q_n$ неигнорируемые координаты, сделаем дальнейшее предположение, что соответствующая *при-*

веденная лагранжева система допускает статическое решение $q_h = q_h^0 (h = 1, 2, \ldots, n)$. В действительности, движение системы, соответствующее такому решению, может называться статическим только частично, т. е. только по отношению к неигнорируемым координатам, потому что остальные координаты, вообще говоря, не будут постоянными, а будут изменяться с временем. Такое движение называется меростатическим (т. е. частично статическим); при этом следует заметить, что в конкретных задачах как раз для этого типа движений чаще всего и интересуются вопросом об устойчивости.

Вспомним, что (приведенная) лагранжева функция, которая здесь не будет зависеть от времени, содержит члены второй, первой и нулевой степени относительно $\dot{q}_k$ (предыдущая глава, п. 46), так что, обозначая ее через $\mathfrak{L}$, мы можем, при обычном значении символов, положить

$$\mathfrak{L} = T_2 + T_1 + T_0 + U,$$

где, как мы знаем, члены T_1, линейные относительно $\dot{q}_h$, имеют гиростатический характер.

Представим себе теперь, что вместо q введены n соответствующих *нормальных координат*, т. е. n таких линейных независимых между собой форм x_i от $q_h - q_h^0$, что в окрестности значений $x_i = 0$, соответствующих меростатическому движению, квадратичная часть T_2 живой силы и функция $T_0 + U$ имеют соответственно вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2, \qquad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i^2,$$

который в п. 13 мы придали живой силе и потенциалу, независимо от какого-либо игнорирования координат.

Что касается части T_1 гиростатического характера, то она после замены переменных, естественно, представится в виде линейной функции относительно $\dot{x}$, а коэффициент при любом $\dot{x}_i$, разложенный в ряд в окрестности решения, о котором идет речь, будет иметь вид

$$b_i + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_k + \ldots \tag{29}$$

Если перейдем теперь к составлению уравнений Лагранжа для малых колебаний, то тотчас же увидим, что в них не войдут ни известные члены b_i, ни члены, опущенные в разложении (29); эти уравнения принимают в рассматриваемом случае вид

$$\ddot{x}_i - \rho_i x_i + \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \dot{x}_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{30}$$

где для простоты положено

$$e_{ik} = b_{ik} - b_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, мы видим, что благодаря членам гиростатической природы в функции Лагранжа в уравнениях малых колебаний появляются линейные члены относительно лагранжевых нормальных скоростей с *антисимметричными* (постоянными) *коэффициентами.*

§ 7. Наличие пассивных сопротивлений. Диссипативность

25. Уравнения (30) предыдущего пункта не составляют еще наиболее общий тип уравнений малых колебаний, встречающихся при схематической постановке физических проблем.

Действительно, даже ограничиваясь случаем голономных систем со связями, не зависящими от времени, и находящихся под действием позиционных сил консервативной природы, необходимо принимать во внимание неизбежные пассивные сопротивления (трение, вязкость и пр.), которые, как мы уже видели в элементарном случае только одной степени свободы (см., например, гл. I, п. 58), можно вообще рассматривать схематически как силы, зависящие от скоростей точек системы; эти силы совершают существенно отрицательную работу на каком угодно перемещении системы.

В окрестности конфигурации равновесия $x_i = 0$ лагранжевы составляющие $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ таких сил будут, как правило, представлены линейными формами с постоянными коэффициентами относительно лагранжевых скоростей $\dot{x}$, и эти формы должны быть такими, чтобы выражение элементарной работы

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i = dt \sum_{i=1}^{n} X_i \dot{x}_i$$

было отрицательным для всякого перемещения, не равного тождественно нулю, т. е. при всяком выборе значений $\dot{x}$, не равных одновременно нулю. Другими словами, квадратичная форма относительно $\dot{x}$

$$\Psi = -\sum_{i=1}^{n} X_i \dot{x}_i$$

должна быть определенной положительной.

Предположим теперь, что

$$X_i = -\sum_{k=1}^{n} d_{ik} \dot{x}_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

какова бы ни была матрица $\|d_{ik}\|$, можно воспользоваться приемом, хорошо известным из теории билинейных форм, и положить

$$d_{ik}=\gamma_{ik}+\varepsilon_{ik} \qquad (i,k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где

$$\gamma_{ik}=\frac{1}{2}(d_{ik}+d_{ki}), \qquad \varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}(d_{ik}-d_{ki}),$$

в силу чего матрица $\|\gamma_{ik}\|$ будет симметричной, а матрица $\|\varepsilon_{ik}\|$ антисимметричной. Тогда, очевидно, будем иметь

$$\Psi=-\sum_{i=1}^{n} X_i\dot{x}_i=\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n}\gamma_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k,$$

$$X_i=-\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{x}_i}-\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{ik}\dot{x}_k \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ n);$$

уравнения малых колебаний, в которых антисимметричные части составляющих X_i объединяются в членах гироскопического происхождения, принимают их наиболее общий вид

$$\ddot{x}_i-\rho_i x_i+\sum_{k=1}^{n} e_{ik}\dot{x}_k=-\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{x}_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,n). \tag{31}$$

Этот вид является *по существу* наиболее общим; но не надо забывать (п. 24), что квадратичная часть T_2 живой силы и функция T_0+U предполагаются уже приведенными к канонической форме

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i^2, \qquad T_0+U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i^2,$$

т. е. относительно T_2 и T_0+U переменные x являются нормальными. Если же, наоборот, перейдем к каким угодно переменным z (линейным независимым функциям от x), то, естественно, будем иметь для T_2 и T_0+U квадратичные формы произвольного вида (§ 3):

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk}\dot{z}_h\dot{z}_k, \qquad T_0+U=\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n}\beta_{hk}z_h z_k;$$

T_1 (предыдущий пункт) и Ψ сохранят свой вид, если в них произвести фактическую замену буквы x буквой z (конечно, числовые значения коэффициентов изменятся в соответствии с этой заменой переменных).

Окончательно, так как $\mathfrak{L} = T_2 + T_1 + T_0 + U$, уравнения малых колебаний

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}_h} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_h} = -\frac{1}{2}\frac{d\Psi}{d\dot{z}_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

в каких угодно координатах z (исчезающих в конфигурации равновесия) примут вид

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{hk}\ddot{z}_k - \beta_{hk}z_k + e_{hk}\dot{z}_k) = -\sum_{k=1}^{n} \gamma_{hk}\dot{z}_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (31')$$

где из четырех рядов коэффициентов (постоянных) a, β, γ, e первые три являются симметричными относительно двух индексов

$$(a_{hk} = a_{kh}, \quad \beta_{hk} = \beta_{kh}, \quad \gamma_{hk} = \gamma_{kh}),$$

а e_{hk} — антисимметричны ($e_{hk} = -e_{kh}$).

Остается разъяснить физический смысл квадратичной формы Ψ. Для этой цели, не нарушая общности, мы можем снова взять координаты x и составить для уравнений (31) *уравнение живых сил*, умножая их соответственно на $\dot{x}_i\,dt$ и суммируя по индексу i. Таким образом, найдем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i^2\right\}dt + \Psi\,dt = 0;$$

отсюда прежде всего виден гиростатический характер линейных относительно $\dot{x}$ членов с антисимметричными коэффициентами; далее, если продолжать интерпретировать разность

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1} (\dot{x}_i^2 - \rho x_i^2)$$

как полное выражение $H = T_2 - (T_0 + U)$ механической энергии системы (кинетической и потенциальной), то из полученного выше уравнения живых сил следует

$$dH = -\Psi\,dt.$$

Отсюда заключаем, что квадратичная форма — Ψ, частные производные которой по $\dot{x}_i$ входят в уравнения (31) в виде членов, линейных относительно $\dot{x}_i$, равна производной по времени от полной механической энергии и поэтому в любой момент является мерой быстроты, с которой изменяется эта энергия. Характер определенной положительной формы, которым обладает Ψ, соответствует тому факту, что при естественном течении механических явлений, когда движущейся системе не сообщается энергия извне для сохранения режима движения, мы будем иметь (в силу действия трения, вязкости, пассивных сопротивлений всякого рода, представленных в добавочных членах уравнений (31)) *рассеяние энергии*, т. е. превращение энергии в низшие формы (чаще всего в теплоту).

Этим объясняется название *диссипативной функции* или *функции рассеяния*, которое, следуя Рэлею, дают (определенной положительной) квадратичной форме Ψ.

26. Вопросы устойчивости, связанные с наличием диссипативных и гиростатических членов. Выше установлена аналитически в согласии с физической действительностью возможность того, что, кроме консервативных сил, на систему могут действовать еще гиростатические и диссипативные силы; вместе с этим возникают и хорошо известные вопросы об устойчивости движения.

Отметим здесь прежде всего, что характер обратимости, которым обладают лагранжевы уравнения движения (и, следовательно, уравнения малых колебаний), когда действующие силы являются чисто консервативными, сохраняется также, когда на эти силы накладываются кинетические действия гиростатического типа. Это видно прежде всего из типичной формы уравнений (30) п. 24, которую имеют в этом случае уравнения малых колебаний. Действительно, мы замечаем, что вместе с e_{ik} антисимметричны также и $-e_{ik}$.

Но когда (независимо от гиростатических членов) входят кинетические диссипативные действия (в частности, когда в лагранжеву функцию входят билинейные члены общего типа относительно $\dot{x}$, x), то уравнения движения или соответствующие уравнения малых колебаний, принадлежащие в этом случае к типу уравнений (31) предыдущего пункта, при определенной положительной форме Ψ становятся необратимыми; при этом предположении истинный интерес вопроса будет заключаться уже не в изучении „вечной“ устойчивости *), а только в изучении устойчивости в будущем (п. 16).

После этого замечания рассмотрим ближе, как можно прийти к строгому или, по крайней мере, приближенному решению вопроса об устойчивости, сообразно различным возможным случаям действия сил. Чтобы объединить различные точки зрения, с которых рассматривается проблема соответственно различным предпосылкам, начнем с предположений, схематически наиболее простых, и постепенно будем переходить к более сложным.

Рассмотрим сначала голономную систему, находящуюся под действием только консервативных сил, и предположим, что в конфигурации C^0 соответствующий потенциал допускает действительный максимум, так что в ней существует для системы состояние устойчивого равновесия (как в прошлом, так и в будущем).

---

*) То есть устойчивости в прошлом и в будущем. (*Прим. ред.*)

Но с физической точки зрения такая постановка задачи не может сохранять свою силу неопределенно долго.

Как бы точно ни были осуществлены приспособления, реализующие связи, как бы ни было ослаблено влияние трения при помощи смазки или влияние других диссипативных сил посредством соответствующих устройств, рано или поздно дело кончится тем, что диссипативные действия накопятся и станут заметными. Сам собой возникает вопрос, могут ли в действительности эти диссипативные действия изменить равновесие или, по крайней мере, изменить характер устойчивости.

Легко видеть, что на этот вопрос нужно ответить отрицательно. по крайней мере постольку, поскольку диссипативные действия могут быть схематически представлены способом, указанным в предыдущем пункте. Действительно, заметим, что прежде всего эти малые диссипативные действия, благодаря их линейному характеру относительно $\dot{x}$, исчезают в конфигурации C^0 (т. е. при $x_i = \dot{x}_i = 0$), так что равновесие несомненно сохранится. Что же касается устойчивости, вспомним (предыдущий пункт), что при диссипативных силах теорема живых сил дает

$$dH = -\Psi\, dt,$$

где H есть полная механическая энергия системы, а $-\Psi dt$ — элементарная работа диссипативных сил, которая, как мы видели, благодаря самой физической природе сил, совершающих ее, отрицательна. Отсюда следует, что для любого элемента времени dt

$$\frac{dH}{dt} \leqslant 0,$$

так что, если обозначим через $H_0 = c_0$ начальное значение H и через $H_0 + c$ значение, относящееся к любому будущему моменту времени $t > t_0$, будем иметь $c < c_0$. Обращаясь теперь к представлению состояний движения в обычном $2n$-мерном пространстве A_{2n} (п. 2) и к рассмотрению поверхностей уровня энергии $H = \text{const}$ (п. 6), мы непосредственно увидим, что изображающая точка P какого-нибудь движения, незначительно возмущенного вначале, будет оставаться неограниченно долго в замкнутой области той гиперповерхности, которой она принадлежала в начальный момент.

Это замечание принадлежит лорду Кельвину[1]), который ввел различие между *обыкновенной устойчивостью*, или, как мы можем

---

[1]) Вилльям Томсон (лорд Кельвин) родился в Бельфасте (Ирландия) в 1824 г., умер в Глазго в 1907 г., был похоронен в Вестминстерском аббатстве рядом с Ньютоном. Был профессором естествознания в Глазго с 1846 до 1889 г. и членом почти всех академий мира. Идя по стопам Карно и Фурье, он сделался одним из основателей общего учения об энергии. В области электромагнетизма он ввел свой знаменитый метод мнимых, первым углубил понятие о переменном режиме электрического тока; в частности, изучил разряд конденсатора и распространение тока в кабеле. Крупный

сказать, теоретической устойчивостью (т. е. при отсутствии пассивных сопротивлений) и *вековой устойчивостью*, которая сохраняется неизменной также при наложении и накоплении (как это неизбежно происходит в физической действительности) таких диссипативных действий. В этом смысле предыдущее замечание можно сформулировать так: *равновесие, имеющее место при действии консервативных сил в конфигурации действительного максимума для потенциала, обладает также и вековой устойчивостью.*

27. Представим себе далее, что на голономную систему вместе с действующими на нее консервативными силами оказывают влияние кинетические действия *гиростатического типа;* предполагая, что конфигурация $C^0 (x_i = \dot{x}_i = 0)$ является конфигурацией равновесия, отбросим предположение, что потенциал в ней допускает действительный максимум или, другими словами, что в отсутствие гиростатических (или диссипативных) действий конфигурация C^0 соответствует состоянию устойчивого равновесия.

За отсутствием более точных критериев для состояния равновесия системы в C^0, мы можем разобрать только линейную устойчивость, применяя метод характеристических показателей.

Дифференциальное уравнение малых колебаний будет иметь вид

$$\ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{n} e_{ik}\dot{x}_k - \rho_i x_i = 0, \tag{30}$$

где матрица $\|e_{ik}\|$ будет антисимметричной; для составления характеристического уравнения, как это было уже разъяснено в п. 22, нет необходимости предварительно приводить дифференциальную систему к первому порядку, а достаточно найти лишь частные решения вида

$$x_i = \lambda_i e^{zt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Подставляя эти решения в уравнения (30) и исключая λ_i, мы придем таким образом к характеристическому уравнению

$$\Delta(z) \equiv |\delta_{ij}(z^2 - \rho_i) + e_{ij} z| = 0,$$

где полином $\Delta(z)$ степени $2n$ в силу антисимметричного характера величин e_{ij} не отличается от $\Delta(-z)$, так что его можно представить через $f(z^2)$, где f обозначает вполне определенный полином степени n.

экспериментатор, он изобрел ряд технических приборов и измерительных инструментов и принимал деятельное участие в прокладке первого трансатлантического кабеля. С неутомимой энергией работал он во всех областях математического естествознания, продолжил классические результаты в гидродинамике и в геофизике, придумывая механические модели наиболее запутанных явлений и поучительные представления о структуре материи. Его трактат A Treatise on the natural philosophy, написанный в сотрудничестве с Тэтом, содержит много оригинальных и плодотворных идей.

Теперь для линейной устойчивости нашего состояния равновесия необходимо, чтобы все $2n$ корней z полинома $\Delta(z)$ были чисто мнимыми (действительная часть равна нулю), и, следовательно, чтобы все n корней z^2 полинома $f(z^2)$ были отрицательными[1]. Отсюда следует, что произведение этих корней должно иметь знак величины $(-1)^n$. С другой стороны, в силу хорошо известного свойства алгебраических уравнений это произведение (так как в полиноме $f(z^2)$ коэффициент при наивысшей степени равен единице) равно $(-1)^n f(0)$, т. е. $\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n$. Поэтому заключаем, что *условие, необходимое* (но, конечно, недостаточное) *для того, чтобы характеристические показатели все были чисто мнимыми и, следовательно, чтобы выполнялось условие линейной устойчивости, заключается в том, чтобы произведение* $(-1)^n \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n$ *было положительным;* или, другими словами, чтобы ни один из сомножителей ρ не был нулем и чтобы число отрицательных сомножителей ρ было четным.

Интересно обратить внимание на то обстоятельство, что это условие ни в какой мере не зависит от гиростатических членов; если оно не выполнено, то уже невозможно выполнить его присоединением какого угодно числа гиростатических членов; наоборот, если $(-1)^n \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n > 0$, то a priori не исключена возможность, что устойчивость можно обеспечить путем введения кинетических действий гиростатического типа, хотя бы равновесие и не было устойчивым при одних консервативных силах.

Если воспользуемся теперь терминологией, установленной в п. 22, то предыдущее замечание можно высказать в следующей наглядной форме.

Введение гиростатических сил может в некоторых случаях исключить четное число, но ни в коем случае не может исключить нечетного числа степеней неустойчивости.

28. Стабилизация состояния равновесия посредством гиростатических действий. Для лучшего уяснения рассуждений предыдущего пункта рассмотрим наиболее простой из возможных случаев, $n=2$, который осуществляется, в частности, материальной точкой, движущейся в плоскости (под действием консервативной силы). Уравнения малых колебаний, если будем писать x, y вместо x_1, x_2, получат вид

$$\ddot{x}=\rho_1 x, \quad \ddot{y}=\rho_2 y;$$

если величины ρ_1, ρ_2 обе положительны, чем будет удовлетворено условие предыдущего пункта, то мы будем иметь две степени неустойчивости, происходящие, если можно так выразиться, от отталкивательной природы силы как вдоль оси x, так и вдоль оси y.

[1]) Действительно, как было отмечено в п. 21, случай, когда $f(z^2)$ допускает нулевой корень, исключен, так как он был бы *двойным* корнем уравнения $\Delta(z)=0$.

Так как речь идет о четном числе степеней неустойчивости, то на основании рассуждений предыдущего пункта не исключена возможность сделать равновесие устойчивым, вводя некоторые гиростатические действия; в этом случае легко убедиться прямым путем, что этого действительно можно достигнуть.

Согласно общей теории, постоянные коэффициенты e_{ij} гиростатических членов здесь сводятся только к одному, так что, положив $e_{12} = -e_{21} = -2\omega$, мы придем к уравнениям

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \rho_1 x, \quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \rho_2 y, \tag{32}$$

для которых характеристическое уравнение принимает вид

$$f(z^2) \equiv \begin{vmatrix} z^2 - \rho_1 & -2\omega z \\ 2\omega z & z^2 - \rho_2 \end{vmatrix} \equiv z^4 + (4\omega^2 - \rho_1 - \rho_2) z^2 + \rho_1\rho_2 = 0.$$

Для обеспечения линейной устойчивости достаточно выбрать ω^2 настолько большим, чтобы оба корня z^2 многочлена $f(z^2)$ были отрицательными; а для этой цели требуется, чтобы

$$(4\omega^2 - \rho_1 - \rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2 > 0, \quad 4\omega^2 - \rho_1 - \rho_2 > 0$$

или же

$$2\,|\omega| > \sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}. \tag{33}$$

В случае центральной отталкивающей силы, например, имеем $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; поэтому уравнения (32) благодаря тому, что их можно написать в виде

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = (\rho - \omega^2)\, x,$$
$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = (\rho - \omega^2)\, y,$$

представятся как уравнения движения точки (с массой, равной единице), отнесенной к осям, вращающимся с угловой скоростью ω, и находящейся под действием силы, являющейся производной от потенциала

$$-\frac{1}{2}(\omega^2 - \rho)(x^2 + y^2).$$

Эта сила при $|\omega| > \sqrt{\rho}$ будет, очевидно, притягивающей, что и дает механически наглядное обоснование заключению, полученному выше формально на основании рассмотрения характеристического уравнения.

29. Временный характер устойчивости, происходящей от гиростатических действий. Здесь нужно, однако, добавить замечание, аналогичное замечанию п. 26: рассмотренный выше случай стабилизации состояния равновесия посредством подходящих гиростатических сил может иметь значение при представлении реального явления только для сравнительно небольшого промежутка времени, потому что при длительном промежутке неизбежно проявятся обычные диссипативные действия.

В этом случае возникает также вопрос, могут ли эти действия влиять на устойчивость равновесия, и ответ будет противоположным тому, который мы имели в предположении устойчивого самого по себе (п. 26) состояния равновесия. Если состояние равновесия, само по себе неустойчивое в строгом смысле, стабилизируется (линейно) гиростатическими действиями, то пассивные сопротивления (линейные в первом приближении относительно лагранжевых скоростей) в конце концов нарушают устойчивость. Другими словами, *устойчивость, обусловленная гиростатическими силами, не имеет более векового характера.*

Не будем останавливаться здесь на общем доказательстве этого правила: оно достаточно разъяснится рассмотрением случая $n=2$, для чего надо обратиться только к предыдущему пункту.

Когда принимаются во внимание пассивные сопротивления, уравнения малых колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}-2\omega\dot{y}+\gamma\dot{x}&=\rho_1 x, \\ \ddot{y}+2\omega\dot{x}+\gamma\dot{y}&=\rho_2 y, \end{aligned} \tag{34}$$

где через γ обозначена положительная постоянная, и поскольку предполагается, что равновесие (неустойчивое само по себе) стабилизируется гиростатически, то ρ_1, ρ_2 должны быть оба положительными и, кроме того, величина $|\omega|$ должна удовлетворять условию (33).

Речь идет о том, чтобы показать, что пассивное сопротивление с составляющими $-\gamma\dot{x}$, $-\gamma\dot{y}$, как бы мала ни была γ, лишь бы она была положительной, приведет к тому, что состояние равновесия $x=y=\dot{x}=\dot{y}=0$ не будет более устойчивым в будущем (даже линейно). На основании теоремы Ляпунова такое обстоятельство будет обеспечено, как только будет доказано, что как бы ни была мала $\gamma>0$, не все корни характеристического уравнения системы (34) будут чисто мнимыми, но между ними найдется по крайней мере один, действительная часть которого будет положительной.

С этой целью составим характеристическое уравнение системы (34), которое, очевидно, будет иметь вид

$$\Delta(z)\equiv\begin{vmatrix} z^2+\gamma z-\rho_1 & -2\omega z \\ 2\omega z & z^2-\gamma z-\rho_2 \end{vmatrix}=0;$$

заметим, что если мы обозначим его корни через z_i ($i=1, 2, 3, 4$), то будем иметь

$$z_1 z_2 z_3 z_4=\rho_1\rho_2>0,$$

$$\gamma(\rho_1+\rho_2)=z_1 z_2 z_3 z_4\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}\right);$$

отсюда, обозначая, как обычно, через $\bar{z}_i$ комплексную величину, сопряженную с z_i ($\bar{z}_i = z_i$, если корень действителен), получим

$$\frac{\gamma(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2} = \frac{\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_3}{z_3\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_4}{z_4\bar{z}_4};$$

отсюда непосредственно видно, что z_i не могут иметь все действительную часть, равную нулю, или отрицательную, так как в этом случае действительная часть суммы в правой части была бы нулем или отрицательной, в то время как левая часть является существенно действительной и положительной. Таким образом, оказывается действительно подтвержденным в случае $n = 2$ то положение, что гиростатическая устойчивость не имеет векового характера.

Типичным примером, иллюстрирующим только что полученный результат, является так называемый *спящий волчок*, т. е. волчок, который, после того как его привели в весьма быстрое вращательное движение вокруг собственной оси, поставленной вертикально на горизонтальном полу, и предоставили самому себе, кажется неподвижным всякому, кто смотрит на него издали. При отсутствии вращения около собственной оси его состояние равновесия при вертикальном направлении оси будет неустойчивым (если центр тяжести выше точки опоры); когда угловая скорость вращения волчка около оси сделается достаточно большой, его состояние меростатического вращения становится устойчивым (не только в линейном, но даже и в строгом смысле), если в качестве действующей силы рассматривается только сила веса. Но если принять во внимание сопротивление воздуха, то в уравнения малых колебаний войдут диссипативные силы, и мы теоретически найдем, как это и имеет место в действительности, что угловая скорость, хотя и медленно, будет убывать, так что в конце концов волчок упадет. Исчерпывающее объяснение этого явления будет дано в гл. VIII, § 7.

§ 8. Малые колебания около какого-нибудь решения

30. Заметим, наконец, что формальный способ составления уравнений в вариациях можно также приложить к системам уравнений (16), правые части которых зависят от t, и по отношению к какому угодно решению $\bar{\sigma}$ (будет ли оно статическим или нет, будет оно устойчивым или неустойчивым). Мы придем, таким образом, к системе дифференциальных уравнений (18), которые все еще линейны относительно ξ, но, вообще говоря, содержат в коэффициентах явно переменную t. Даже и в этих случаях можно сказать, что эти уравнения определяют *малые колебания около рассматриваемого решения* $\bar{\sigma}$, но при этом подразумевается та оговорка, что если решение $\bar{\sigma}$ не является устойчивым, то приближенное представление, которое таким образом получается для σ, вначале близкого к $\bar{\sigma}$, сохраняет свое значение только внутри интервала времени, ограниченного подходящим образом. Так, из изучения уравнений в вариациях здесь можно получить критерии устойчивости или неустойчивости в *первом приближении,* но им нельзя дать простую исчерпывающую алгебраическую форму, как в случае статических решений систем, правые части которых не зависят от t. В частности, заслуживает упоминания случай *периодических решений,* т. е. случай, когда при $X(x \mid t)$, являющихся периодическими функциями от t с одинаковыми периодами T (или, в частности, не зависящих от t), в качестве решения $\bar{\sigma}$ принимается решение, для которого функции $x(t)$ сами будут периодическими функциями, имеющими тот же период T. Для таких случаев существует теория характеристических показателей, вполне аналогичная теории, действительной для статических решений, с той лишь разницей, что для составления характеристического уравнения недостаточно алгебраических средств; оно требует аналитических приемов более высокого порядка [12].

Хотя эта теория представляет большой интерес для приложений механики и, в частности, для небесной механики, однако мы здесь не можем заниматься ею, не выходя из рамок этой книги.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что если голономная система с идеальными связями, не зависящими от времени, находится под действием консервативных сил, то статическое условие устойчивости (т. I, гл. IX, п. 17 и гл. XIII, п. 23) является также и достаточным для устойчивости в наиболее полном динамическом понимании (§ 1).

2. Доказать инвариантность характеристического уравнения (11) по отношению к каким угодно линейным однородным преобразованиям.

Достаточно вспомнить, что если квадратичная форма подвергается произвольному линейному однородному преобразованию, то ее дискриминант умножается на квадрат модуля рассматриваемого линейного преобразования.

3. Пусть S есть материальная система, отнесенная к нормальным координатам x и находящаяся под действием некоторой консервативной системы сил, которые имеют потенциал U в окрестности конфигурации устойчивого равновесия. Тогда будем иметь (п. 13)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \dot{x}_i^2, \quad U = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 x_i^2.$$

Если S' есть материальная система с немного отличной живой силой $T + \delta T$ и находится под действием сил, тоже немного отличных, являющихся производными от потенциала $U + \delta U$, то при отнесении к тем же самым нормальным координатам x можно получить

$$\delta T=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n}\alpha_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k,\qquad \delta U=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n}\beta_{ik}x_ix_k,$$

где α и β обозначают постоянные, которые нужно рассматривать как малые первого порядка.

Доказать, что в этом порядке приближения (т. е. по крайней мере до членов второго порядка относительно α, β) квадраты ω_h^2 главных частот получают приращения, определяемые равенствами

$$\delta\omega_h^2=\beta_{hk}-\alpha_{hk}\omega_h\qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Как мы видели, на изменение главных частот влияют только квадратные члены возмущений δT, δU живой силы и потенциала, члены же с произведениями не вносят никаких изменений.

Если вычислим частоты во втором приближении, то найдем, что скажется также влияние членов α_{hk}, β_{hk} при $h \gtrless k$[1]).

4. Пусть для уравнений малых колебаний голономной системы, находящейся под действием консервативных сил в окрестности конфигурации $q_i=0$ устойчивого равновесия, система функций

$$q_i=\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j^0\varphi_{ij}(t)\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

будет решением, соответствующим произвольным начальным скоростям $\dot{q}_i=\dot{q}_i^0$ в конфигурации равновесия. Доказать, что общий интеграл с $2n$ произвольными постоянными $\dot{q}_i^0$ (начальные скорости) и q_i^0 (начальные координаты) определяется равенством

$$q_i=\sum_{j=1}^{n}\{\dot{q}_j\varphi_{ij}(t)+q_j^0\dot{\varphi}_{ij}(t)\}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Это и есть так называемое правило Стокса[2]). Чтобы установить его, достаточно заметить, что: 1) оно действительно для уравнения $\ddot{x}+\omega^2x=0$ гармонических движений и, следовательно, в нормальных координатах, при произвольном числе степеней свободы; 2) оно имеет инвариантный характер в отношении линейных однородных преобразований координат.

5. Предположим, что для голономной материальной системы с n степенями свободы C является конфигурацией устойчивого равновесия как для одной, так и для другой из различных консервативных систем сил, являющихся производными — первая от потенциала U', вторая от потенциала U''. Обозначая через ω_h', ω_h'' $(h=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ соответствующие главные частоты,

---

[1]) См. Рэлей, Теория звука, т. I, 1941, § 90.

[2]) Дж. Г. Стокс (George Gabriel Stokes) родился в Скрине (Ирландия) в 1819 г., умер в Кэмбридже в 1903 г. Был профессором математики в Кэмбриджском университете. Крупный математик-физик, известен как автор формулы преобразования интегралов, носящей его имя, а также благодаря своим исследованиям о волнах и оптической теории, основанной на гипотезе, приписывающей эфиру упругие свойства.

доказать, что, когда система будет подвергаться одновременному действию двух систем сил: 1) C попрежнему будет конфигурацией устойчивого равновесия; 2) главные частоты ω_h, соответствующие составной системе сил, будут связаны с ω'_h, ω''_h соотношениями

$$\sum_{h=1}^{n} \omega_h^2 = \sum_{h=1}^{n} (\omega_h'^2 + \omega_h''^2);$$

3) между главными периодами $T_h = \frac{2\pi}{\omega_h}$, $T'_h = \frac{2\pi}{\omega'_h}$, $T''_h = \frac{2\pi}{\omega''_h}$ будет существовать аналогичное соотношение

$$\sum_{h=1}^{n} T_h^2 = \sum_{h=1}^{n} (T_h'^2 + T_h''^2).$$

6. Биения. Биения представляют собой известное акустическое явление, объяснение которого мы будем иметь, рассматривая колебания, происходящие от сложения двух гармонических колебательных движений.

Предположим, что один из характеристических параметров колеблющейся системы изменяется с временем по закону

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2).$$

Полагаем

$$\omega_1 = \omega - \varepsilon, \quad \omega_2 = \omega + \varepsilon,$$

что, естественно, возможно во всех случаях, но, как мы увидим, приобретает особый интерес, когда постоянные частоты ω_1 и ω_2 близки друг к другу, и, следовательно, ε будет очень мало.

Положив, далее,

$$r \cos\theta = r_1 \cos(\theta_1 - \varepsilon t) + r_2 \cos(\theta_2 + \varepsilon t),$$

$$r \sin\theta = r_1 \sin(\theta_1 - \varepsilon t) + r_2 \sin(\theta_2 + \varepsilon t)$$

и приняв, как это всегда возможно, r положительным, получим для x выражение

$$x = r \cos(\omega t + \theta),$$

которое соответствовало бы гармоническому движению с периодом $2\pi/\omega$, если бы r и θ были постоянными; в действительности, в данном случае речь идет о двух функциях времени.

Из сделанного предположения следует, что r и θ зависят от времени исключительно через посредство произведения εt, которое при малом ε за интервал времени Δt достаточно короткой длительности получает ничтожное приращение $\varepsilon \Delta t$. Точнее, предположим, ε будет столь мало, что для продолжительности $2n\pi/\omega$ некоторого определенного числа периодов произведение $2n\pi\varepsilon/\omega$ будет ничтожным. В этом предположении r и θ можно рассматривать как постоянные не в абсолютном смысле, а для промежутка времени, не большего, чем n периодов. В этом промежутке времени ход изменения x можно рассматривать как приблизительно гармонический.

Естественно, что при значительной продолжительности делается заметным изменение амплитуды r и фазы θ. Особенно замечательны следствия изменения r. На основании вышеуказанных формул имеем

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(2\varepsilon t + \theta_2 - \theta_1),$$

откуда вытекает, что при неограниченном изменении t амплитуда r колеблется между крайними значениями $r_1 + r_2$ и $|r_1 - r_2|$.

Заслуживает особого упоминания случай, когда r_1 и r_2, по крайней мере приблизительно, равны, так как тогда за интервалы времени продолжительности $\pi/2\varepsilon$, значительно превосходящей период $2\pi/\omega$, амплитуда r колеблется между минимумом, приблизительно равным нулю, и максимумом r_1+r_2.

С точки зрения акустики это условие соответствует звуку постоянной высоты $\omega/2\pi$, интенсивность которого за интервалы времени, очень большие по сравнению с периодом $2\pi/\omega$, периодически изменяется от вполне определенного максимума до нуля. Мы имеем таким образом чередование звучания и тишины, которое и составляет явление биений.

7. Рассмотрим кусок нити, гибкой и почти нерастяжимой, так что можно пренебречь изменением ее длины l. Пусть нить закреплена в своих концах A и B и несет в промежуточной точке P массу m. Если предположим, что два куска нити AP, BP являются прямолинейными и подвергаются одному и тому же натяжению τ, то масса m в силу ее связи с двумя кусками нити подвергается в нормальном к AB направлении, в плоскости APB, действию силы $\tau(\sin\alpha+\sin\beta)$, где положено $\alpha=\widehat{PAB}$, $\beta=\widehat{PBA}$. Эту силу можно выразить также в виде $\tau x\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)$, где через x обозначено расстояние P от AB и положено $AP=l_1$, $BP=l_2$.

Представим себе теперь, что, кроме P, еще в другой точке Q нити AB помещена масса, тоже равная m, причем три куска нити $AP=l_1$, $PQ=a$, $QB=l_2$ будут прямолинейными и компланарными. Предполагая, что натяжение вдоль всей нити будет τ, проверить, что на массы, расположенные в P, Q, *нормально* к AB в плоскости $APQB$ будут действовать силы, величины которых соответственно равны

$$\tau\left(\frac{x}{l_1}+\frac{x-y}{a}\right),\qquad \tau\left(\frac{y-x}{a}+\frac{y}{l_2}\right),$$

где x, y обозначают расстояния точек P, Q от прямой AB.

Предположим, наконец, что нить имеет ничтожную по сравнению с m массу и общую длину l_1+a+l_2, близкую к AB.

Если натяжение τ велико по сравнению с весом mg каждой из двух добавочных масс, то, действительно, возможно принять его постоянным не только в каждом из трех кусков нити в отдельности, но также и во всех трех кусках вместе.

При этих условиях легко поставить для этих двух масс задачу о поперечных колебаниях, т. е. о колебаниях, нормальных к AB в плоскости $APQB$. Имея в виду, что систему можно рассматривать как голономную с двумя лагранжевыми параметрами x и y, показать, что живую силу и потенциал можно выразить соответственно в виде

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2),\qquad U=-\frac{1}{2}\tau\left(\frac{x^2}{l_1}+\frac{(x-y)^2}{a}+\frac{y^2}{l_2}\right).$$

Замечая далее, что при $l_1=l_2$ выражения $x+y$, $x-y$ являются нормальными координатами в расширенном смысле, т. е. обе формы T и U могут быть одновременно приведены к ортогональному виду, вывести отсюда, что главные частоты определятся равенствами

$$\omega_1^2=\frac{\tau}{ml_1},\qquad \omega_2^2=\frac{\tau}{m}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{2}{a}\right)=\omega_1^2\left(1+\frac{2l_1}{a}\right).$$

При каких условиях получатся биения? (См. предыдущее упражнение.)

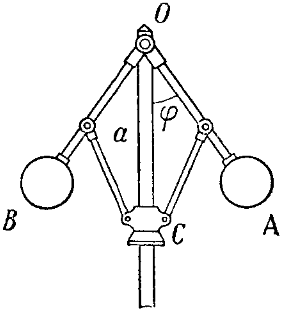
8. Малые колебания регулятора Уатта. В упражнении 22 предыдущей главы мы рассматривали схематически регулятор Уатта как голономную систему с лагранжевыми координатами θ и φ, движение которой определяется уравнениями

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) = Q_\theta, \quad \frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}) - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\frac{\partial I}{\partial\varphi} = \frac{\partial U}{\partial\varphi},$$

где

$$I = C + 2ml^2\sin^2\varphi, \quad J = 2ml^2, \quad U = 2mgl\cos\varphi$$

при постоянных C, l, m, g. Составляющая Q_θ, как это было отмечено в упомянутом упражнении, представляет момент относительно оси вращения, происходящий от большего или меньшего притока пара в распределительную коробку цилиндра. В возмущенном движении, начиная от установившегося движения, при котором угол наклона φ ручек регулятора к вертикали имеет постоянное значение φ_0, этот момент, в силу того, что регулятор пропускает больше пара, если рукоятки с шарами больше расходятся, и пропускает пара меньше, если они, опускаясь, сходятся, будет иметь всегда знак, противоположный отклонению угла φ от значения φ_0. Поэтому Q_θ можно представить как функцию от разности $\varphi - \varphi_0$, имеющую восстанавливающий характер, и в первом приближении (гл. I, п. 17) положить $Q_\theta = \lambda(\varphi - \varphi_0)$ при постоянном положительном λ.



Фиг. 24.

Проверить теперь, что уравнения движения будут удовлетворяться значениями $\varphi = \varphi_0$ и $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ при $\dot{\theta}_0^2 = \frac{g}{l\cos\varphi_0}$. Это решение, меростатическое для уравнений движения регулятора, можно, очевидно, прямо рассматривать как статическое, если в этих уравнениях за неизвестные принимаются, вместо φ и θ, φ и $\dot{\theta}$.

Уравнения малых колебаний вблизи этого решения получатся согласно общему правилу п. 19, если положить $\varphi = \varphi_0 + \psi$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 + \omega$ и рассматривать ψ и ω как количества первого порядка малости. Таким образом, мы придем к двум уравнениям:

$$I_0\dot{\omega} + ml^2\dot{\theta}_0\sin 2\varphi_0\,\dot{\psi} + \lambda\psi = 0,$$

$$\ddot{\psi} - \dot{\theta}_0\sin 2\varphi_0\,\omega + \left(\frac{g}{l}\cos\varphi_0 - \dot{\theta}_0^2\cos 2\varphi_0\right)\psi = 0,$$

где I_0 представляет собой величину I при $\varphi = \varphi_0$.

Показать, что отыскание решений вида

$$\omega = \lambda_1 e^{zt}, \quad \psi = \lambda_2 e^{zt},$$

при постоянных λ_1, λ_2, z, приводит к характеристическому уравнению

$$\left(\frac{C}{2ml^2} + \sin^2\varphi_0\right)z^3 + \dot{\theta}_0^2\sin^2\varphi_0\left(1 + 3\cos^2\varphi_0 - \frac{C}{2ml^2}\right)z + \\ + \frac{\lambda}{2ml^2}\dot{\theta}_0\sin 2\varphi_0 = 0.$$

Убедиться, что это уравнение третьей степени допускает один (действительный) отрицательный корень z_1; показать, далее, что если два других корня z_2, z_3 действительны, то по крайней мере один из них будет положительным, а если они комплексны, то оба имеют положительную действительную часть.

Наконец, из предыдущего вывести, что во всех случаях мы будем иметь неустойчивость.

Этот теоретический вывод согласуется с экспериментально установленным фактом, состоящим в том, что регулятор Уатта не достигает вполне своего назначения, потому что действует слишком быстро как при открывании, так и при закрывании клапана для впускания пара. Поэтому в современных машинах прибегают к приборам более совершенным. См. с этой целью W. Hort, Technische Schwingungslehre; 2-е изд., Berlin, 1922; § 62—65.

9. Перенос колебаний с одной степени свободы на другую. Пусть ξ и η — две лагранжевы координаты голономной системы с каким угодно числом степеней свободы, со связями, не зависящими от времени, и находящейся под действием консервативной системы сил. Рассмотрим колебания системы около одного из ее положений равновесия, соответствующего для определенности нулевым значениям ξ и η, и предположим, что эти две координаты, если и не являются сами нормальными, то представляют собой линейные комбинации с постоянными коэффициентами (и, само собой разумеется, независимые) некоторых двух нормальных координат системы.

Следовательно, выражения ξ и η в функциях от времени получатся, если составим линейные комбинации с постоянными коэффициентами из двух гармонических колебаний (главных)

$$r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \qquad r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2).$$

Заслуживает внимания частный случай, когда ξ и η определяются, по крайней мере до постоянного множителя, соответственно в виде суммы и разности двух нормальных координат, так что при постоянных h и k мы имеем

$$\frac{\xi}{h} = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2),$$

$$\frac{\eta}{k} = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2).$$

Полагая, как в примере 6, $\omega_1 = \omega - \varepsilon$, $\omega_2 = \omega + \varepsilon$ и применяя к выражениям ξ/h и ξ/k те же преобразования, выполненные там над выражением одного только x, мы придем к выражениям вида $r\cos(\omega t + \theta)$, где величина r, если она относится к ξ/h, определяется, как мы видели, из уравнения

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(2\varepsilon t + \theta_2 - \theta_1);$$

аналогичное уравнение для r', относящегося к координате η/k, получается из предыдущего изменением в нем знака у r_2.

Отсюда следует, что когда r достигает своего наибольшего значения $r_1 + r_2$, то r', наоборот, достигает своего наименьшего значения $|r_1 - r_2|$, и обратно. Это становится особенно наглядным в случае, когда ε мало в смысле, разъясненном в упражнении 6, и r_1 приблизительно равно r_2. При этом предположении мы имеем за интервалы времени продолжительности $\pi/2\varepsilon$ попеременно максимальные колебания для одной из двух координат и минимальные (приблизительно покой) для другой. Это и есть так называемое явление переноса колебаний с одной степени свободы на другую.

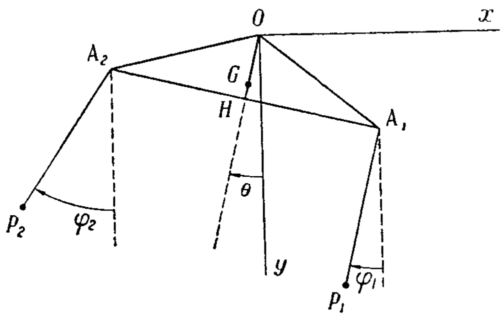
10. Явление Бернулли. Явление, рассмотренное в предыдущем упражнении, впервые было описано Д. Бернулли, наблюдавшим его в случае колебательных движений двух чашек весов.

Чтобы дать себе отчет в этом конкретном случае, обратимся к следующей схеме прибора. Тяжелый твердый треугольник AO_1A_2 $(OA_1 = OA_2 = a)$

(фиг. 25) может вращаться в вертикальной плоскости вокруг O. К точкам A_1, A_2 подвешены на шарнирах в той же самой вертикальной плоскости посредством двух твердых стержней A_1P_1, A_2P_2 равной длины l и ничтожной массы два шарика с одинаковыми массами, равными m. Очевидно, что речь идет о голономной системе с тремя степенями свободы, поскольку за лагранжевы параметры можно принять углы θ, φ_1, φ_2, которые образуют с вертикалью высота OH треугольника и два маятника A_1P_1 и A_2P_2.

Принимая за систему отсчета вертикаль Oy, направленную вниз, и горизонталь Ox, направленную произвольно, и считая углы положительными при вращении в направлении от Ox к Oy (через прямой угол), вычислим живую силу T системы и потенциал U, соответствующий ее весу, имея в виду, что мы будем изучать малые колебания в окрестности конфигурации равновесия $\theta = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Живую силу T можно рассматривать как сумму живых сил твердого треугольника и двух шариков. Первая равна $I\dot{\theta}^2/2$, где I обозначает момент



Фиг. 25.

инерции треугольника относительно точки O, а остальная часть определяется выражением

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2),$$

где x_1, y_1, x_2, y_2 суть координаты точек P_1 и P_2; если положим $\alpha = \widehat{HOA_2} = \widehat{A_1OH}$, то для координат найдем выражения

$$x_1 = a \sin(\alpha - \theta) - l \sin \varphi_1, \quad x_2 = -a \sin(\alpha + \theta) - l \sin \varphi_2,$$
$$y_1 = a \cos(\alpha - \theta) + l \cos \varphi_1, \quad y_2 = a \cos(\alpha + \theta) + l \cos \varphi_2.$$

В окрестности конфигурации равновесия $\theta = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ три параметра Лагранжа и их первые производные по времени можно рассматривать как величины первого порядка, так что, дифференцируя по t предыдущие формулы и пренебрегая членами порядка выше первого, можно принять

$$\dot{x}_1 = -a\dot{\theta}\cos\alpha - l\dot{\varphi}_1, \quad \dot{x}_2 = -a\dot{\theta}\cos\alpha - l\dot{\varphi}_2,$$
$$\dot{y}_1 = a\dot{\theta}\sin\alpha, \quad \dot{y}_2 = -a\dot{\theta}\sin\alpha.$$

В результате получим

$$2T = I\dot{\theta}^2 + m\{2a^2\dot{\theta}^2 + l^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + 2al\cos\alpha\dot{\theta}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\}.$$

Что же касается потенциала, то, обозначив через G центр тяжести треугольника, который, очевидно, является точкой, лежащей на высоте OH, положив $OG = \rho_0$ и обозначив через m_0 массу треугольника, очевидно, будем иметь

$$U = g\{m_0\rho_0 \cos\theta + m(y_1 + y_2)\} + \text{const}.$$

Достаточно принять во внимание выражения y_1, y_2 и пренебречь членами порядка выше второго (вспомним из п. 13, что в конфигурации равновесия можно принять $U=0$ и что здесь существенными членами будут члены второго порядка, потому что члены первого порядка исчезают), чтобы привести потенциал к виду

$$U = -\frac{1}{2} g\{(m_0 l_0 \rho_0 + 2am\cos\alpha)\theta^2 + lm(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\},$$

который, очевидно, имеет характер определенной отрицательной формы по отношению к аргументам θ, φ_1, φ_2.

Чтобы одновременно определить нормальные координаты и главные частоты, достаточно совместно привести к каноническому виду две квадратичные формы T и U (п. 13). Не прибегая к общему правилу, которое потребовало бы решения уравнения третьей степени, мы придем к цели путем двух последовательных линейных преобразований, которые приведут от θ φ_1, φ_2 к некоторым трем новым нормальным координатам ξ, η, ζ (в широком смысле, определенном в п. 13).

Выполним прежде всего подстановку, очевидно ортогональную,

$$\psi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}}, \qquad \xi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}},$$

в результате которой, вводя безразмерные постоянные

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}\, a\cos\alpha}{l}, \qquad \mu^2 = \frac{I}{ml^2} + 2\frac{a^2}{l^2} = \frac{I}{ml^2} + \frac{\lambda^2}{\cos^2\alpha},$$

$$\nu^2 = \frac{m_0\rho_0 + 2ma\cos\alpha}{ml},$$

для T и U получим выражения

$$2T = ml^2\{\mu^2\dot\theta^2 + \dot\psi^2 + \dot\xi^2 + 2\lambda\dot\theta\dot\psi\},$$

$$U = -\frac{1}{2} mgl(\nu\theta^2 + \psi^2 + \xi^2).$$

Положим далее

$$\psi = \eta\cos\gamma + \zeta\sin\gamma, \quad \nu\theta = -\eta\sin\gamma + \zeta\cos\gamma,$$

где угол γ определяется на основании условия

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2\lambda\nu}{\mu^2 - \nu^2}.$$

В переменных ξ, η, ζ формы T и U принимают ортогональный вид

$$T = \frac{1}{2} ml^2(\dot\xi^2 + b^2\dot\eta^2 + c^2\dot\zeta^2),$$

$$U = -\frac{1}{2} mgl(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

где

$$b^2 = \frac{\mu^2}{\nu^2}\sin^2\gamma + \cos^2\gamma - \frac{\lambda}{\nu}\sin 2\gamma,$$

$$c^2 = \frac{\mu^2}{\nu^2}\cos^2\gamma + \sin^2\gamma + \frac{\lambda}{\nu}\sin 2\gamma,$$

а отсюда непосредственно получается (п. 13), что квадраты главных частот определяются равенствами

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} b^2, \quad \omega_3^2 = \frac{g}{l} c^2.$$

Все это сохраняет свое значение и в общем случае. Примем теперь во внимание специальные условия, характеризующие явление, которое мы намерены истолковать, чтобы вывести из них некоторые оценки порядка величин для постоянных, которые входят в рассмотрение.

В условиях явления Бернулли a и l нужно рассматривать как количества одного и того же порядка, в то время как расстояние $OH = a\cos\alpha$, а следовательно, и подавно $OG = \rho_0$ должны считаться малыми (первого порядка) по сравнению с l; число λ будет поэтому величиной первого порядка. То же самое можно сказать о каждой из двух масс m по сравнению с массой m_0 рамы треугольника. Из этих предположений следует, что в выражении числа ν^2, которое можно написать в виде

$$\nu^2 = \frac{m_0\rho_0}{ml} + 2\frac{a\cos\alpha}{l},$$

второй член наверное мал; но они не позволяют сказать то же самое о первом члене, который может быть представлен в виде отношения двух малых величин ρ_0/l, m/m_0. Мы здесь дополним предположения, высказанные выше, допуская, что прибор сконструирован таким образом, чтобы первое отношение было мало по сравнению со вторым; на основании этого предположения ν^2 можно рассматривать как величину первого порядка.

Если, кроме того, возьмем снова постоянную μ^2 и в ее выражение вместо I подставим его значение $m_0\delta^2$, где δ есть соответствующий радиус инерции, то из выражения

$$\mu^2 = \frac{m_0}{m}\frac{\delta^2}{l^2} + \frac{\lambda^2}{\cos^2\alpha}$$

увидим, что, рассматривая $\lambda/\cos\alpha = \sqrt{2a/l}$ и δ/l как величины конечные, мы должны будем считать μ^2 за очень большую величину вследствие наличия множителя m_0/m, где m по предположению мало по сравнению с m_0.

Наконец, мы можем в данном случае воспользоваться еще тем, что как λ, так и ν^2 и $1/\mu^2$ можно рассматривать как малые величины первого порядка, а $\lambda^2/\cos^2\alpha$ считать конечным числом и при этом таким, что порядок величины членов с ν или $1/\mu$, при умножении на это число, не изменится. Конечно, из предположения, что ν^2 и $1/\mu^2$ будут первого порядка, не следует, что такими же будут ν и $1/\mu$; но речь идет все же о величинах тоже всегда малых и таких, о которых можно сказать, что они порядка $^1/_2$ и что в произведении они дают величину ν/μ первого порядка.

Заметим теперь, что выражение для $\operatorname{tg} 2\gamma$ может быть написано в виде

$$\frac{2\lambda\dfrac{\nu}{\mu^2}}{1-\dfrac{\nu^2}{\mu^2}},$$

где числитель порядка выше первого (можно сказать порядка $^3/_2$), тогда как знаменатель близок к 1; поэтому, обозначая, как обычно, через (n) члены порядка не ниже n, можно положить

$$\gamma = \frac{\lambda\nu}{\mu^2}(1 + (2))$$

и, следовательно,

$$\cos^2\gamma = 1 + (5), \quad \sin^2\gamma = \frac{\lambda^2\nu^2}{\mu^4}(1+(2)), \ \sin 2\gamma = \frac{2\lambda\nu}{\mu^2}(1+(2)).$$

При этом порядке приближения непосредственно найдем

$$b^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} + (5), \quad c^2 = \frac{\mu^2}{\nu^2} + (3)$$

или, пренебрегая только членами пятого порядка по сравнению с единицей (что позволяет пренебречь членами третьего порядка по сравнению с отношением μ^2/ν^2, которое самое большее есть величина второго порядка),

$$b^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}, \quad c^2 = \frac{\mu^2}{\nu^2}.$$

Так как c оказывается очень большим, то же будет верно и для ω_3; а так как

$$\omega_2^2 = \omega_1^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}\right),$$

то две главные частоты ω_1, ω_2, соответствующие координатам ξ, η, будут близки друг к другу.

С другой стороны, в силу малости γ координату ψ можно положить просто равной η, так что первоначальные координаты φ_1, φ_2 можно выразить в виде

$$\varphi_1 = \frac{\psi + \xi}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_2 = \frac{\psi - \xi}{\sqrt{2}};$$

они представятся, таким образом, в виде суммы и разности двух координат, из которых первая строго, а вторая приблизительно нормальна (в широком смысле). Поэтому будут приложимы рассуждения, изложенные в предыдущем упражнении.

11. Написать уравнения Лагранжа для тяжелой точки, удерживаемой без трения на эллиптическом параболоиде

$$2z = ax^2 + by^2,$$

где a и b обозначают две положительные постоянные, и ось z направлена вертикально вверх. Рассматривая, в частности, малые колебания около положения устойчивого равновесия $x = y = 0$, показать, что частоты главных колебаний суть $2\pi/a$ и $2\pi/b$. (См. упражнение 27 гл. II.)

12. Для живой силы T свободной точки с единичной массой в цилиндрических координатах ρ, θ, z (см., например, гл. II, п. 46) имеем выражение

$$T = \frac{1}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + \dot z^2).$$

Если сила, приложенная к точке, является производной от симметрического, т. е. не зависящего от θ, потенциала $U(\rho, z)$, то угол θ будет игнорируемой координатой, и мы будем иметь (гл. V, п. 42) интеграл момента количества движения относительно оси симметрии Oz

$$\rho^2\dot\theta = \mathrm{const} = c.$$

Так как приведенная функция Лагранжа (гл. V, п. 46) имеет здесь вид

$$\mathfrak{L}^* = T + U - c\dot{\theta} = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + U - \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho^2},$$

то движение, определяемое двумя лагранжевыми уравнениями для координат ρ и z, очевидно, будет таким, какое имела бы свободная точка на плоскости с декартовыми координатами ρ и z, если бы она находилась под действием консервативной силы, производной от потенциала

$$U(\rho, z) - \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho^2}.$$

Проверить, что всякому возможному положению M равновесия в этом плоском движении соответствует в пространственной задаче мероститическое решение, а именно круговое равномерное движение с угловой скоростью c/ρ_0^2, где ρ_0 есть постоянная величина координаты ρ точки M (радиус круговой траектории). Постоянная интегрирования c связана с ρ_0 уравнением $c^2 = -\rho_0^3 a_1$, где a_1 обозначает величину $\partial U/\partial \rho$ в точке M.

Обозначая через a_{11}, a_{12}, a_{22} значения вторых производных от U в точке M по ρ и z, доказать, что условие (приведенной) устойчивости кругового движения определяется равенством

$$\left(a_{11} + \frac{3}{\rho_0}a_1\right)a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

13. Применить рассуждения предыдущего упражнения к случаю

$$U = \frac{k}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + gz,$$

при постоянных k и g, который, очевидно, соответствует совместному действию ньютонианского притяжения к полюсу и однородного поля силы. Доказать, что условие устойчивости мероститического кругового решения в этом случае можно истолковать в следующей геометрической форме: если 2α есть визуальный угол траектории относительно полюса (или, другими словами, α есть угол полураствора кругового конуса, проектирующего из полюса траекторию), то должно быть $\cos\alpha > 1/3$.

14. Подтвердить способом, аналогичным указанному в упражнении 12, что если в плоскости в полярных координатах ρ и θ рассматривается движение точки под действием центральной силы с симметрическим потенциалом $U(\rho)$, то возможны круговые движения, условие устойчивости которых определяется при обозначениях упражнения 12 неравенством

$$a_{11} + \frac{3}{\rho_0}a_1 > 0,$$

и рассмотреть, в частности, случай

$$U = -\frac{k}{(\nu - 1)\rho^{\nu-1}}$$

при постоянных k и ν, второе из которых отлично от 1.

Отметить, что этот случай соответствует центральной притягивающей или отталкивающей силе, по величине обратно пропорциональной ρ^ν, и снова найти условие $\nu < 3$ п. 10 гл. II.

15. Обращаясь к п. 47 гл. II, принять функцию Лагранжа в виде

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}[\dot{z}^2(1 - f'^2) + \dot{\theta}^2 f^2] + gz,$$

соответствующем движению тяжелой точки, которая удерживается без трения на поверхности вращения $\rho = f(z)$. Принимая во внимание интеграл $\dot{\theta} f^2 = c$, можно определить закон, по которому z изменяется с временем, посредством уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial z} = 0,$$

где $\mathfrak{L}^*$ — приведенная функция Лагранжа

$$\mathfrak{L}^*(z, \dot{z}) = \mathfrak{L} - c\dot{\theta} = \frac{1}{2}\dot{z}^2(1 + f'^2) + gz - \frac{1}{2}\frac{c^2}{f^2}.$$

Проверить, что уравнение относительно z допускает статическое решение $z = z_0 = \text{const}$, если z_0 и c связаны соотношением

$$c^2 = -g\frac{f_0^3}{f_0'},$$

где индексом 0 отмечаются значения f и ее производных при $z = z_0$.

Всякому такому решению будет соответствовать на поверхности равномерное движение по параллели с высотой $z = z_0$.

Вывести из предыдущих формул, что эти круговые движения возможны только вдоль параллелей той зоны поверхности, где она обращена вогнутостью вверх.

Кроме того, полагая в $\mathfrak{L}^*$ $z = z_0 + \zeta$, определить уравнение малых колебаний вблизи решения $z = z_0$ и проверить, что условие устойчивости определяется неравенством

$$3f_0'^2 > f_0 f_0''.$$

16. В тексте мы рассматривали уравнения малых колебаний для голономной системы со связями, не зависящими от времени, и находящейся под действием консервативных сил. Если система допускает игнорируемые координаты и вычисляется приведенная функция Лагранжа, то появляются, как мы знаем (гл. V, п. 46), гиростатические члены. В п. 24 мы указали форму (30), которая в этом случае свойственна уравнениям малых колебаний около положения устойчивого равновесия; было показано, что гиростатические члены не влияют на интеграл энергии, из рассмотрения которого также и в этом случае становится очевидной устойчивость на основании критерия Дирихле.

Предполагая, что речь идет о действительном устойчивом равновесии, можно распространить на этот случай результат п. 13, заключающийся в том, что малые колебания всегда будут составляться из некоторого числа n чисто гармонических колебаний.

Доказательство по существу основывается на том обстоятельстве, что если положить, как в п. 27, $x_h = \lambda_h e^{i\omega t}$, то постоянная ω^2 должна будет удовлетворять алгебраическому уравнению n-ой степени с существенно положительными корнями[1]).

17. Система (31′) п. 25 определяет малые колебания в наиболее общем случае, когда входят одновременно гиростатические и диссипативные действия. Соответственно решениям

$$z_k = \lambda_k e^{zt} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

---

[1]) См. Е. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, 1937, гл. VII, § 84.

где λ_k и z суть подлежащие определению постоянные, уравнения (31') принимают вид

$$\sum_{k=1}^{n} u_{hk}\lambda_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{76}$$

где для краткости положено

$$u_{hk} = \alpha_{hk}z^2 + (\gamma_{hk} + e_{hk})\, z - \beta_{hk} \quad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Характеристическое уравнение степени $2n$ относительно z будет, следовательно,

$$u(z) = \| u_{hk} \| = 0,$$

и приводится, как это естественно, к виду (28'), когда отсутствуют гиростатические и диссипативные действия.

18. Обозначая через λ_h, λ'_h n пар произвольных чисел, введем для квадратичной формы, которую мы будем рассматривать как живую силу, и для ее полярной формы обозначения

$$T_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \alpha_{hk}\lambda_h\lambda_k, \qquad T_{\lambda\lambda'} = T_{\lambda'\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \alpha_{hk}\lambda_h\lambda'_k$$

и припишем аналогичные значения символам $\Psi_{\lambda\lambda}$, $\Psi_{\lambda\lambda'} = \Psi_{\lambda'\lambda}$, $V_{\lambda\lambda}$, $V_{\lambda\lambda'} = V_{\lambda'\lambda}$, соответствующим квадратичным формам, которые будем истолковывать как диссипативную функцию и потенциальную энергию (п. 25)

$$\Psi = \frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \gamma_{hk}\dot{z}_h\dot{z}_k, \quad V = -(T_0 + U) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \beta_{hk}z_h z_k.$$

Если, в частности, λ_h имеют то же значение, что и в предыдущем упражнении, то из определяющих эти величины уравнений следует, что

$$\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} u_{hk}\lambda_h\lambda_k = 0.$$

Проверить, что в силу тождеств $e_{hk} + e_{kh} = 0$ соотношение это можно написать в виде

$$z^2 T_{\lambda\lambda} + 2z\, \Psi_{\lambda\lambda} + V_{\lambda\lambda} = 0,$$

и вывести отсюда, что если квадратичная форма V является также определенной положительной (как это бывает, когда решение $y_k = 0$ является устойчивым), то всякий действительный характеристический показатель необходимо должен быть отрицательным.

Можно доказать более общее предположение: *если отсутствуют гиростатические члены* ($e_{hk} = 0$), *но входят диссипативные действия, то каждый характеристический показатель z имеет действительную часть существенно отрицательную.*

Чтобы установить этот результат, достаточно рассмотреть случай комплексного z, $z=\mu+i\nu$, при $\nu\neq 0$, так как предположение $\nu=0$ уже рассмотрено ранее.

Вместе с z корнем характеристического уравнения (с действительными коэффициентами) будет также и сопряженная с ним величина $\bar{z}=\mu-i\nu$, которой будут соответствовать решения вида

$$y_k=\bar{\lambda}_k e^{\bar{z}t} \qquad (k=1, 2, \ldots, n);$$

где $\bar{\lambda}_k$ обозначают величины, сопряженные с λ_k.

Обозначая через $\bar{u}_{hk}$ трехчлены

$$\alpha_{hk}\bar{z}^2+\gamma_{hk}\bar{z}-\beta_{hk} \qquad (h, k=1, 2, \ldots, n),$$

сопряженные с u_{hk}, будем одновременно иметь

$$\sum_{k=1}^{n} u_{hk}\lambda_k=0, \quad \sum_{k=1}^{n} \bar{u}_{hk}\bar{\lambda}_k=0 \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

а отсюда следуют два уравнения

$$\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} u_{hk}\bar{\lambda}_h\lambda_k=0, \quad \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \bar{u}_{hk}\lambda_h\bar{\lambda}_k=0,$$

которые, благодаря отсутствию антисимметричных коэффициентов e_{hk}, можно написать также в виде

$$z^2T_{\lambda\bar{\lambda}}+2z\Psi_{\lambda\bar{\lambda}}+V_{\lambda\bar{\lambda}}=0, \quad \bar{z}^2T_{\lambda\bar{\lambda}}+2\bar{z}\Psi_{\lambda\bar{\lambda}}+V_{\lambda\bar{\lambda}}=0,$$

т. е. они приводятся к одному и тому же уравнению второй степени, удовлетворяющемуся как величиной z, так и $\bar{z}$. Отсюда получим

$$\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\mu=-\frac{\Psi_{\lambda\bar{\lambda}}}{T_{\lambda\bar{\lambda}}};$$

так как Ψ и T являются определенными положительными формами, а аргументы λ и $\bar{\lambda}$ сопряжены между собой, то заключаем согласно утверждению, что $\mu<0$[1]).

19. Вынужденные колебания голономной системы, находящейся под действием консервативных сил в окрестности конфигурации устойчивого равновесия, в нормальных координатах x_h определяются уравнениями вида

$$\ddot{x}_h+\omega_h^2 x_h=X_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

где ω обозначают постоянные главных частот свободных колебаний и X являются лагранжевыми составляющими добавочных сил. Как и в случае одной степени свободы (гл. I, пп. 61, 62), наиболее интересным с физической точки зрения видом добавочных сил являются периодические силы. Даже и здесь, в силу линейности уравнений малых колебаний, если x'_h, x''_h суть общие интегралы, соответствующие силам X'_h, X''_h, то $x'_h+x''_h$ будет наибо-

[1]) См. Рэлей, Теория звука, 1941, т. I, § 103а.

лее общим решением, соответствующим составной силе $X'_h + X''_h$: это замечание распространяется и на случай скольких угодно составляющих сил. Это обстоятельство, как было отмечено в п. 66 гл. I, позволяет привести случай произвольной периодической силы к сумме сил или постоянных, или синусоидальных. В случае постоянных сил мы приходим к задаче о смещении равновесия (§ 2), так что, в конечном счете, остается только рассмотреть предположение, что силы имеют вид $\xi_h \sin \Omega t$, где ξ_h и Ω постоянные.

При этом предположении *для каждой нормальной координаты* сохраняют силу рассуждения п. 64 гл. I; в случае, когда Ω отлична от всех ω_k, можно указать для отдельных x_k синусоидальные колебания, имеющие тот же период, что и X_k, т. е., еще точнее, выражения вида $\lambda_k \sin \Omega t$, где λ_k имеют значения $\xi_k/(\omega_k^2 - \Omega^2)$.

В более общем случае, когда будут входить гиростатические и диссипативные действия, уравнения вынужденных колебаний в окрестности конфигурации устойчивого равновесия на основании уравнений (31) п. 25 будут иметь вид

$$\ddot{x}_h + \omega_h^2 x_h + \sum_{k=1}^{n} (e_{hk} + \gamma_{hk}) \dot{x}_h = X_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

также и здесь, на основании того, что было сказано выше, нужно по существу сосредоточить внимание на случае, когда X_h будут вида $\xi_h \sin \Omega t$.

Далее, как известно из теории линейных дифференциальных уравнений и как, к тому же, это было показано при изложении §§ 5, 6, действительное отыскание соответствующих решений аналитически будет выполняться особенно легко и быстро, если вместо синусоидальных функций $X_h = \xi_h \sin \Omega t$ мы будем рассматривать комплексные показательные функции (при действительных ξ_h)

$$X_h = \xi_h e^{i\Omega t} = \xi_h (\cos \Omega t + i \sin \Omega t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

и в соответствии с этим будем искать решение в виде

$$\lambda_h e^{i\Omega t} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где λ_h обозначают комплексные постоянные. Когда будет найдено одно такое решение и мы, как это всегда возможно, положим

$$\lambda_h = j_h e^{-i\theta_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

при действительных j_h, θ_h и $j_h \geqslant 0$, тогда для x_h будем иметь выражения

$$x_h = j_h e^{i(\Omega t - \theta_h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

которые с их составляющими по действительной и по мнимой осям, равными

$$j_h \cos (\Omega t - \theta_h),\ j_h \sin (\Omega t - \theta_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

дадут прямо решения, соответствующие силам

$$\xi_h \cos \Omega t,\ \xi_h \sin \Omega t \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти последние представляют действительные части и коэффициенты при мнимой единице i во вспомогательном комплексном выражении силы, введенном в рассмотрение искусственным аналитическим приемом.

Далее, $x_h = \lambda_h e^{i\Omega t}$ (при комплексных λ_h) будут действительно решениями указанных выше уравнений вынужденных колебаний при $X_h = \xi_h e^{i\Omega t}$ (ξ_h действительные числа), если n комплексных постоянных λ_h удовлетворяют n линейным уравнениям

$$(\omega_h^2-\Omega^2)\lambda_h+i\Omega\sum_{k=1}^{n}(e_{hk}+\gamma_{hk})\lambda_k=\xi_h \qquad (h=1,2,\ldots,n).$$

Так как по крайней мере хотя бы одна из величин ξ должна быть принята отличной от нуля, если мы не хотим возвратиться к свободным колебаниям, то речь идет о неоднородных уравнениях; следовательно, конечные и определенные решения будут существовать при условии, что будет отличен от нуля определитель

$$\nabla=\|\delta_{hh}(\omega_h^2-\Omega^2)+i(e_{hk}+\gamma_{hk})\|,$$

где $\delta_{hh}=1$ и $\delta_{hk}=0$ при $h\neq k$.

При отсутствии гиростатических и диссипативных действий, т. е. при $e_{hk}=\gamma_{hk}=0$, этот определитель, очевидно, не будет исчезать при единственном условии, что величина Ω отлична от всех ω_h. Поэтому в общем случае наверное будем иметь $\nabla\neq 0$, когда $\Omega\neq\omega_h$ (при $h=1,2,\ldots,n$), а коэффициенты e и γ достаточно малы.

При таком предположении решения λ_h предыдущих линейных уравнений, вообще говоря, будут комплексными числами, которые, если отделить в соответствующих экспоненциальных выражениях x_h действительную часть от мнимой, представят, как это уже было показано, колебания, имеющие тот же период, что и период добавочной силы; кроме того, для всякого отдельного x_h можно определить запаздывание фазы θ_h.

Рассматривая e_{hk}, γ_{hk} как количества первого порядка, доказать, что решение указанных выше линейных уравнений дает

$$\lambda_h=\frac{\xi_h}{\omega_h^2-\Omega^2}-i\Omega\sum_{k=1}^{n}(e_{hk}+\gamma_{hk})\frac{\xi_k}{\omega_k^2-\Omega^2} \qquad (h=1,2,\ldots,n).$$

Отсюда с тем же приближением следует, что

$$j_h=\left|\frac{\xi_h}{\omega_h^2-\Omega^2}\right|,$$

и при $\xi_h=0$

$$\theta_h=\pm\frac{\pi}{2},$$

при $\xi_h\neq 0$

$$\theta_h=\frac{\omega_h^2-\Omega^2}{\xi_h}\sum_{k=1}^{n}(e_{hk}+\gamma_{hk})\frac{\xi_k}{\omega_k^2-\Omega^2}.$$

20. Если относительно нормальных координат X_h', X_h'' являются составляющими двух различных добавочных синусоидальных сил, имеющих одну и ту же частоту Ω, и x_h', x_h'' обозначают выражения, которые имеют координаты при вынужденных колебаниях, вызываемых этими силами, то при отсутствии гиростатических действий имеем *(теорема взаимности)*

$$\sum_{h=1}^{n}X_h'x_h''=\sum_{h=1}^{n}X_h''x_h'.$$

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА

[1] Функция L^*, которую автор называет приведенной функцией Лагранжа, называется также функцией Рауса.

Легко показать, что эта функция равна разности кинетических энергий T' и T''

$$L^* = T' - T'',$$

где

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i,\, k=1}^{m} a_{ik}\dot{q}_i q_k \quad \text{и} \quad T'' = \frac{1}{2} \sum_{i,\, k=m+1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i \dot{q}_k.$$

Выразим явно частные производные $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + \ldots + a_{1m}\dot{q}_m + a_{1m+1}\dot{q}_{m+1} + \ldots + a_{1n}\dot{q}_n,$$

. . . .

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} = a_{m1}\dot{q}_1 + a_{m2}\dot{q}_2 + \ldots + a_{mm}\dot{q}_m + a_{m\, m+1}\dot{q}_{m+1} + \ldots + a_{mn}\dot{q}_n,$$

. . . .

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = a_{n1}\dot{q}_1 + a_{n2}\dot{q}_2 + \ldots + a_{nm}\dot{q}_m + a_{nm+1}\dot{q}_{m+1} + \ldots + a_{nn}\dot{q}_n.$$

Далее имеем

$$\mathfrak{L}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{h} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i.$$

Умножая $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ на соответствующие значения $\dot{q}$ и вычисляя суммы, найдем, что обе суммы будут содержать в себе одинаковые слагаемые, которые и исчезнут после приведения подобных членов:

$$\mathfrak{L}^* = \frac{1}{2} \sum_{i,\, k=m+1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{i,\, k=1}^{m} a_{ik}\dot{q}_i \dot{q}_k.$$

Если координаты $\bar{q}_1 \ldots \bar{q}_m$ — циклические, то

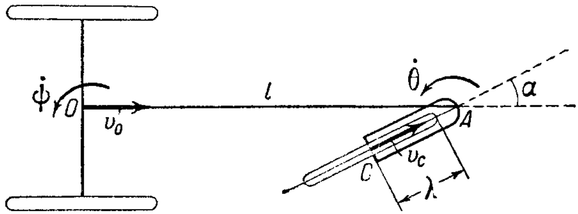
$$\dot{q}_i = \gamma_i + \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Заменяя в последней сумме $\dot{q}_i$ их значениями, найдем

$$\mathfrak{L}^* = \frac{1}{2} \sum_{i,\, k = m+1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{k,\, l = 1}^{m} a_{ik}(\gamma_i + \lambda_i)(\gamma_k + \lambda_k).$$

[2] Утверждение автора о том, что при связях, не зависящих от времени, коэффициенты $b_{j0} \equiv 0$, в такой категорической форме ничем не оправдано и в некоторых случаях может оказаться неверным. Можно привести примеры неголономных систем, уравнения связей которых не содержат явно времени, а все коэффициенты b_{jh} либо постоянны, либо являются функциями координат, причем $b_{j0} \neq 0$.

В качестве простейшего примера можно привести трехколесный велосипед (трехколесное шасси самолета) (фиг. 22). Напишем для его переднего



Фиг. 22.

колеса уравнение связей, полагая, что и задние, и передние колеса катятся по плоскости без скольжения. Пусть $\dot\psi$ есть угловая скорость рамы OA, $\dot\theta$ — абсолютная угловая скорость вилки AC около вертикальной оси, а $\omega = \dot\varphi$ — относительная угловая скорость переднего колеса по отношению к вилке AC. Обозначим через v_0 скорость средней точки O задней оси, направленную во все время движения по прямой OA, если скольжение отсутствует. Введем также единичные векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, направленные соответственно по прямой OA, по оси переднего колеса и по нормали к плоскости, по которой катится велосипед.

Можно написать для скорости точки C следующие два равенства:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$
$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_0 + \dot\psi \boldsymbol{k} \times \overrightarrow{OA} + \dot\theta_{\boldsymbol{k}} \times \overrightarrow{AC},$$

где $\boldsymbol{r}$ есть радиус-вектор, идущий из точки касания переднего колеса с плоскостью в центр колеса. Исключая v_C и проектируя полученное равенство на ось OA и на перпендикулярное к ней направление, получим два уравнения:

$$\omega r \cos\alpha = v_0 + \dot\theta\lambda \sin\alpha,$$
$$\omega r \sin\alpha = \dot\psi l - \dot\theta\lambda \cos\alpha;$$

здесь можно положить $\omega = \dot\varphi$ и $\dot\theta = \dot\psi + \dot\alpha$. Пока мы рассматриваем уравнения в написанной здесь форме, утверждение авторов остается в силе.

Представим себе теперь, что угловые скорости α, $\dot\theta$, $\dot\psi$ малы по сравнению с ω, а угол α также есть малая величина; пусть, кроме того, скорость v_0 поддерживается постоянной. Тогда с точностью до малых второго порядка можно написать

$$\omega r = v_0, \qquad \dot\psi(l - \lambda) - \dot\alpha\lambda = v_0 \cdot \alpha.$$

Второе из равенств представляет собой уравнение кинематической связи между переменным α, $\dot{\alpha}$ и $\dot{\psi}$; здесь коэффициенты при $\dot{\psi}$ и $\dot{\alpha}$ не зависят от времени, а правая часть равенства все же не равна нулю тождественно.

[3] Уравнения движения неголономных систем обычно пишут в иной форме, пользуясь неопределенными множителями (см., например, Суслов, Теоретическая механика). Пусть общее уравнение механики приведено к виду (79)

$$\sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h = \sum_{h=1}^{h} Q_h \delta q_h,$$

а уравнения кинематических связей имеют вид

$$\begin{gathered} a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + \ldots + a_{1n}\dot{q}_n = a_1, \\ a_{21}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + \ldots + a_{2n}\dot{q}_n = a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\dot{q}_1 + a_{m2}\dot{q}_2 + \ldots + a_{mn}\dot{q}_n = a_m. \end{gathered}$$

Тогда соотношения между вариациями δq_h будут

$$a_{r1}\delta q_1 + a_{r2}\delta q_2 + \ldots + a_{rn}\delta q_n = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Умножая последние уравнения соответственно на неопределенные множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и вычитая сумму из (79), получим

$$\sum_{h=1}^{n} \left(\tau_h - Q_h - \sum_{r=1}^{m} a_{rh}\lambda_r\right) \delta q_h = 0.$$

Выбирая теперь $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ так, чтобы множители при $\delta q_1, \ldots, \delta q_m$ равнялись нулю, найдем, что множители и при остальных $n-m$ вариациях $\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_n$ также должны равняться нулю, так как эти вариации совершенно произвольны.

Таким образом, получаем следующие n уравнений движения:

$$\tau_h = Q_h + \sum_{r=1}^{m} a_{rh}\lambda_r \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

вместе с m уравнениями кинематических связей они дают систему $(n+m)$ уравнений с $(n+m)$ неизвестными $q_1, \ldots, q_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Уравнения, которые автор называет уравнениями Маджи, можно получить, исключая из полученной системы уравнений множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Результат можно представить в сжатой форме, если приравнять нулю определители порядка $(m+1)$ матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \tau_1 - Q_1, & \tau_2 - Q_2, & \ldots, & \tau_n - Q_n \\ a_{11}, & a_{12}, & & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Число независимых уравнений будет равно $(n-m)$.

[4] В истории науки можно привести много примеров, когда одновременно над одним и тем же вопросом работали ученые разных стран и приходили к одним и тем же результатам независимо один от другого. Впервые С. А. Чаплыгин в сообщении на заседании физического отделения Общества любителей естествознания 25 октября 1895 г. изложил метод получения уравнений движения неголономных систем без неопределенных множителей.

Уравнения движения были приведены им как раз к той форме, о которой упоминают авторы в тексте, т. е. С. А. Чаплыгин выделил члены неголономности, хотя и не придал этому особого значения.

Это сообщение с дополнениями появилось в печати в 1897 г. в Трудах Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. IX. Работы С. А. Чаплыгина по неголономным системам собраны и изданы в небольшом сборнике „Исследования по динамике неголономных систем", 1949 г.

Уравнения Чаплыгина легко получить из матрицы, приведенной в примечании на стр. 423. Пусть уравнения связей приведены к виду

$$\begin{aligned} \dot q_1 &= a_{1,\, m+1}\dot q_{m+1} + \ldots + a_{1n}\dot q_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot q_m &= a_{m,\, m+1}\dot q_{m+1} + \ldots + a_{mn}\dot q_n. \end{aligned}$$

Тогда только что упомянутая матрица, из которой получаются все уравнения движения, упростится и ее можно написать в следующей форме:

$$\left\| \begin{matrix} \tau_1 - Q_1 & \tau_2 - Q_2 & \ldots & \tau_m - Q_m & \tau_{m+1} - Q_{m+1} & \ldots & \tau_n - Q_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,\, m+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{2,\, m+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{m,\, m+1}, & \ldots, & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

Приравняв нулю первый из определителей $(m+1)$-го порядка, получим

$$\begin{vmatrix} \tau_{m+1} & \tau_1 & \tau_2 \ldots \tau_m \\ a_{1\, m+1} & 1 & 0 \ldots 0 \\ a_{2\, m+1} & 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m\, m+1} & 0 & 0 \ldots 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{m+1} & Q_1 & Q_2 \; Q_m \\ a_{1\, m+1} & 1 & 0 \ldots 0 \\ a_{2\, m+1} & 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m\, m+1} & 0 & 0 \ldots 1 \end{vmatrix} \qquad (a)$$

Предположим теперь, что первые m координат $q_1, \ldots, q_m$ не входят ни в выражение кинетической энергии, ни в коэффициенты a_{rs}; ограничиваясь рассмотрением консервативной системы, допустим, что силовая функция U также не зависит от $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Так как

$$\tau = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q}, \quad \frac{\partial \dot q_k}{\partial \dot q_{m+i}} = a_{k,\, m+1},$$

то уравнению (a) можно придать следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_{m+1}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\frac{\partial \dot q_k}{\partial \dot q_{m+1}}\right) - \sum \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\frac{d a_{k,\, m+1}}{dt} - \\ - \frac{\partial T}{\partial q_{m+1}} = \frac{\partial U}{\partial q_{m+1}}.$$

Обозначая через $\overline{T}$ выражение кинетической энергии, получаемое после замены $\dot q_1, \ldots, \dot q_m$ через $\dot q_{m+1}, \ldots, \dot q_n$, и замечая, что

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_{m+1}} = \frac{\partial T}{\partial q_{m+1}} + \sum \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\frac{\partial \dot q_k}{\partial q_{m+1}},$$

найдем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_{m+1}}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_{m+1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \left\{ \sum_{s=1}^{n-m} \left(\frac{\partial a_{k,\ m+s}}{\partial q_{m+1}} - \frac{\partial a_{k,\ m+1}}{\partial q_{m+s}} \right) \dot{q}_{m+s} \right\} = \frac{\partial U}{\partial q_{m+1}}. \tag{6}$$

Такой же вид будут иметь и остальные уравнения движения. Заметим, что переменные $q_1, \ldots, q_m$ не входят в эти уравнения по предположению, а обобщенные скорости $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ могут быть исключены, т. е. система приведена таким образом к наименьшему возможному числу уравнений. Уравнения движения в форме (6) и были получены С. А. Чаплыгиным.

[5] Автор имеет в виду в данном случае не только механические явления в узком смысле слова; методы изучения устойчивости одинаковы как для механических явлений, так и для процессов в более широком понимании. В последнем случае выбирается некоторая величина или несколько величин, изменение которых с течением времени характеризует изучаемый процесс. Эти величины с таким же правом могут быть приняты за „обобщенные координаты", как углы, прямолинейные отрезки или дуги кривых служат обобщенными координатами какой-либо механической системы. Например, говоря о колебаниях электрических или электромеханических, принимают за одну из координат количество электричества q, протекающего сквозь сечение проводника; в этом случае $i = dq/dt$ есть обобщенная скорость или сила тока. Для таких систем справедливы уравнения Лагранжа, и потому общие выводы, которые получены для механических явлений, будут справедливы и по отношению к процессам в более широком смысле слова.

Очень хорошее изложение вопроса о применении уравнений Лагранжа к электрическим системам можно найти в книге В. Ф. Миткевича, „Физические основы электротехники", 1928.

[6] Эта теорема есть частный случай первой теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости. Для доказательства ее необходимо привлечь рассуждения, примененные Ляпуновым при изложении им второго метода. См. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950, стр. 77 и сл.

[7] К рассуждениям автора необходимы пояснения. По первой из теорем Ляпунова об устойчивости (см. [6]) функция $H(x|t)$ должна быть *знакоопределенной* и, кроме того, должно быть

$$H(x,\ t) = \text{const}.$$

Если $H(x|t)$ — знакоопределенная функция, то при $x_s = 0$ и произвольном t она равна нулю, а при всех остальных значениях x_s сохраняет один и тот же знак, пока $|x_s| \leqslant h$. Отсюда и следует, что функция $H(x, t)$ для $x_s = 0$ имеет максимум или минимум. В случае Дирихле можно положить

$$H = T + V = \text{const},$$

т. е. H есть полная энергия системы. Так как $T + V$ есть знакоопределенная функция, а $T \geqslant 0$, то и

$$H = T + V = \text{const} > 0.$$

Но в силу того, что V не зависит от $\dot{q}_s$, должно быть

$$V > 0,$$

т. е. потенциальная энергия в положении равновесия должна иметь *минимум*.

Отсюда следует, что теорема Дирихле есть просто частный случай первой теоремы Ляпунова, а потому нельзя и противопоставлять их друг другу

[8] С этими рассуждениями авторов нельзя согласиться, так как устойчивость решений системы (16′) еще не влечет за собой устойчивости полной системы (16′) и (16″).

Раус рассматривал вопрос не вполне так, как излагают авторы, а основная теорема Рауса об устойчивости движения голономной консервативной системы есть частный случай теоремы Ляпунова об устойчивости движения.

Разделение понятия устойчивости на „устойчивость по Дирихле“ и „устойчивость по Раусу“ ничем исторически не оправдано, так как и Дирихле и Раус не давали точного определения этого понятия. Впервые Н. Е. Жуковский обратил внимание на то, что задачу об устойчивости движения консервативной системы можно ставить иначе, чем это сделано у Рауса, и только А. М. Ляпунов дал окончательное, общепринятое теперь определение понятия об устойчивости движения.

[9] На случай кратных корней характеристического уравнения впервые обратил внимание Лагранж в своей „Аналитической механике“. Излагая теорию колебаний, он указывает (Ж. Лагранж, Аналитическая механика, т. I, 1950, Динамика, отдел шестой, § 1, п. 7, стр. 452 и сл.), что координаты системы будут оставаться малыми только при условии, что все корни характеристического уравнения вещественны, положительны и неравны между собой. Нетрудно показать на частном примере, что последнее требование излишне. Рассмотрим колебание материальной точки, лежащей в горизонтальной плоскости и притягиваемой к неподвижному центру с силой, пропорциональной расстоянию. Уравнения движения точки будут

$$\ddot{x}+k^2x=0,\ \ddot{y}+k^2y=0.$$

Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид

$$(-\mu^2+k^2)(-\mu^2+k^2)=0$$

и допускает кратные корни

$$\mu_1^2=k^2,\ \mu_2^2=k^2.$$

Общее решение можно написать в форме

$$x=A\cos(kt+\alpha),\ y=B\cos(kt+\beta),$$

где A, B, α, β — произвольные постоянные; здесь время t входит только под знаком синуса или косинуса и координаты x и y остаются малыми, если малы A и B, определенные через начальные данные. Лагранж считал, что в случае кратных корней время t войдет в общее решение не только под знаком синуса и косинуса, а потому координаты x и y будут неограниченно возрастать, т. е. для устойчивости равновесия необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения были различными. Ошибка Лагранжа была предметом специальных исследований Вейерштрасса (Gesammelte Werke, т. I). Изложение этого вопроса можно найти в книге академика Крылова А. Н. „О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих применение в технических вопросах“, изд. 2 (1932) или „Вибрация судов“ (Собрание сочинений, т. X, Изд. Академии наук СССР, (1948)).

[10] Научное наследство А. М. Ляпунова так велико, что, говоря о „теореме Ляпунова“, надо ее цитировать, так как число этих теорем огромно. К сожалению, автор не указывает точно, где опубликована приведенная теорема, но из теорем Ляпунова можно вывести совершенно определенное суждение о значении метода малых колебаний. Сошлемся на теоремы (I, II, III) А. М. Ляпунова, помещенные на стр. 82—94 его классического сочинения „Общая задача об устойчивости движения“, М., 1950 г. На стр. 137 того же сочинения находим: „Из предыдущего анализа следует, что в большинстве случаев вопрос об устойчивости разрешается уже исследованием одного первого приближения, ибо только в тех случаях исследование это не дает ответа на вопрос, когда определяющее уравнение, не имея корней с положительными веществен-

ными частями, имеет корни, вещественные части которых суть нули". Из этого следует, что указанный автором настоящей книги случай неустойчивости был исследован А. М. Ляпуновым за десять лет до того. Ляпунов указал и приемы, которым надо следовать при исследовании устойчивости в „особых случаях", т. е. когда корни характеристического уравнения имеют действительные части, равные нулю.

[11] Ссылка автора на теорему Ляпунова ошибочна, а его точка зрения на значение метода малых колебаний при рассмотрении частных практических вопросов может ввести читателя в заблуждение. Метод малых колебаний приводит к исчерпывающему ответу, если все корни характеристического уравнения имеют действительные отрицательные части или в том случае, когда хотя бы один из них имеет положительную вещественную часть. Если же имеются корни, действительные части которых равны нулю, то нельзя судить об устойчивости и неустойчивости по первому приближению, так как все будет зависеть от членов более высокого порядка в уравнениях возмущенного движения. Если все корни чисто мнимые, то требуется дополнительное исследование. Обычно это встречается при исследовании устойчивости консервативных систем, но в этих случаях можно вывести необходимое заключение из анализа интеграла энергии. Если в рассмотрение входят диссипативные силы, что обычно и бывает при решении технических проблем, то можно потребовать, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части. В тех случаях, когда все же нельзя удовлетворить этому условию и когда входит, например, один нулевой корень, следует обратиться к исследованиям „особых случаев" Ляпунова или изменить постановку задачи, что иногда бывает возможно.

[12] Исследование устойчивости периодических решений впервые было выполнено А. М. Ляпуновым в его диссертации „Общая задача об устойчивости движения" (гл. III).

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава VI

Устойчивость и колебания