

ЛЕКЦИЯ 28

Функционалы. Вариационное исчисление. Принцип наименьшего действия. Принцип наименьшего действия и квантовая механика.

Функционалы

Наряду с задачами, в которых необходимо определить максимальные и минимальные значения некоторой функции $y = f(x)$, в задачах физики нередко возникает необходимость найти максимальные или минимальные значения величин особого рода, называемых **функционалами**.

Функционалами называются переменные величины, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций. Например, функционалом $S[y(x)]$ является значение интеграла от функции $y(x)$ в заданных конечных (или бесконечных) пределах

$$S[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx, \quad (1)$$

определяющее площадь под кривой, задаваемой этой функцией — рис 1.

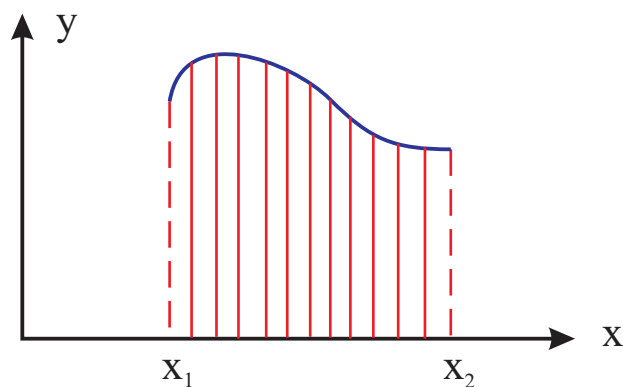


Рис. 1: Площадь под кривой.

Задавая разные функции $y(x)$, мы получим разные значения интеграла (площади) S . При этом значения этих функций на пределах интегрирования x_1 и x_2 мы можем считать либо фиксированными $y(x_1) = y_1$ и $y(x_2) = y_2$, либо произвольными. Примером такого функционала в механике является путь, пройденный частицей в промежуток времени от t_1

до t_2

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| dt, \quad (2)$$

где $\mathbf{v}(t)$ — скорость частицы.

Функционалом является также длина дуги l плоской (или пространственной) кривой, соединяющей две заданные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — рис. 2. Величина l может быть вычислена, если задано уравнение кри-

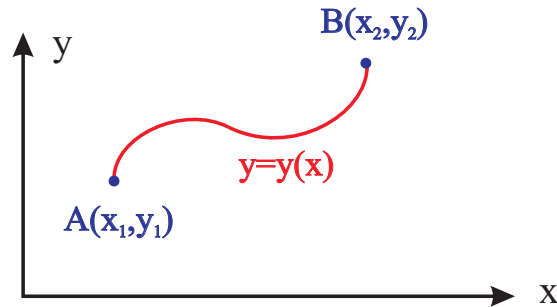


Рис. 2: Длина дуги.

вой $y = y(x)$; тогда

$$l[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (3)$$

Площадь S некоторой поверхности также является функционалом, так как она определяется выбором поверхности, т. е. выбором функции $z(x, y)$, входящей в уравнение поверхности $z = z(x, y)$. В этом случае

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \quad (4)$$

где область D — это проекция поверхности на плоскость Oxy .

Моменты инерции, координаты центра тяжести некоторой однородной кривой или поверхности также являются функционалами, так как их значения определяются выбором кривой или поверхности, т. е. выбором функций, входящих в уравнение этой кривой или поверхности.

Во всех этих примерах мы имеем характерную для функционалов зависимость: функции (или вектор функции) соответствует число, в то время как при задании функции $y = f(x)$ числу соответствовало число.

Вариационное исчисление

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются **вариационными задачами**.

Многие законы механики и физики сводятся к утверждению, что некоторый функционал в рассматриваемом процессе должен достигать минимума или максимума. В такой формулировке эти законы носят название **вариационных принципов** механики или физики. К числу таких вариационных принципов принадлежит **принцип наименьшего действия**, которому посвящена настоящая лекция. В оптике аналогом этого принципа является **принцип Ферма**, гласящий, что свет всегда распространяется по такому пути, который требует минимального (или максимального) времени распространения.

Вариационное исчисление начало развиваться с 1696 года и оформилось в самостоятельную математическую дисциплину с собственными методами исследования после фундаментальных работ действительного члена Петербургской Академии наук Л. Эйлера (1707-1783 г.), которого с полным основанием можно считать основателем вариационного исчисления.

Большое влияние на развитие вариационного исчисления оказали следующие три задачи:

Задача о брахистохроне. В 1696 году Иоганн Бернулли опубликовал письмо, в котором предлагал вниманию математиков задачу о линии быстрого ската — **брахистохроне**. В этой задаче требуется определить линию, соединяющую две заданные точки А и В, не лежащие на одной вертикальной прямой, и обладающую тем свойством, что материальная точка скатится по этой линии из точки А в точку В в кратчайшее время — рис. 3.

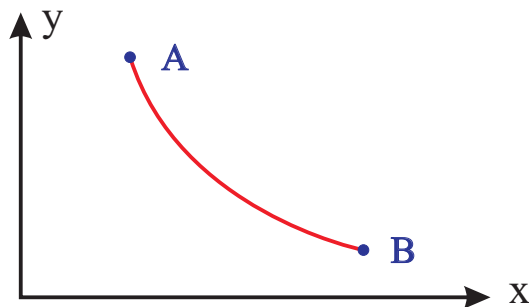


Рис. 3: Линия наибыстрейшего спуска.

Легко видеть, что линией быстреего ската не будет прямая, соединяющая точки А и В, хотя она и является кратчайшим расстоянием между точками А и В, так как при движении по прямой скорость движения будет нарастать сравнительно медленно; если же мы возьмем кривую, более круто спускающуюся около точки А вниз, то хотя путь и удлинится, но значительная часть пути будет пройдена с большей скоростью. Решение задачи о брахистохроне было дано И. Бернулли, Я. Бернулли, Г. Лейбницем, И. Ньютоном и Г. Лопиталем. Оказалось, что линией быстреего ската является **циклоида**. Это есть кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой линии.

Задача о геодезических линиях. Требуется определить линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки на некоторой поверхности

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad (5)$$

— рис. 4. Такие кратчайшие линии называются **геодезическими**. В этом

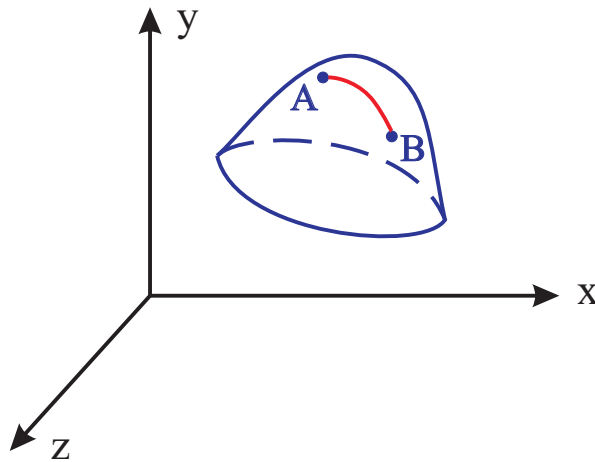


Рис. 4: Геодезическая линия, соединяющая точки А и В.

случае мы имеем типичную задачу на так называемый **связанный** или **условный экстремум**. Необходимо найти минимум функционала

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx, \quad (6)$$

причем функции $y(x)$ и $z(x)$, определяющие уравнение геодезической и производные от которых y' и z' входят в выражение (6), должны быть подчинены условию (5). Эта задача была решена в 1698 году Я. Бернулли, но общий метод решения задач такого типа был дан лишь в работах Л. Эйлера и Ж. Лагранжа.

Изопериметрическая задача. Требуется найти замкнутую линию заданной длины l , ограничивающую максимальную площадь S . Такой линией, как было известно еще в древней Греции, является окружность. В этой задаче требуется определить экстремум функционала S при наличии своеобразного дополнительного условия — длина кривой должна быть постоянна, т. е. функционал

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \quad (7)$$

сохраняет постоянное значение. Здесь две периодические функции $x(t)$ и $y(t)$ осуществляют параметрическое задание замкнутой кривой на плоскости. Условия такого типа называют **изопериметрическими**. Общие методы решения задач с изопериметрическими условиями были разработаны Л. Эйлером.

Принцип наименьшего действия

Как известно, движение материальной точки массы m под действием силы $\mathbf{F} = -\text{grad } U$ происходит в соответствии со II законом Ньютона

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \quad (8)$$

Решая это дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях, мы находим траекторию движения материальной точки — функцию $\mathbf{r}(t)$. В качестве начальных условий могут быть выбраны начальные значения координаты и скорости частицы $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ и $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$. При этом решение уравнения (8) оказывается **единственным**. Однако, как известно, для однозначного определения траектории движения вместо двух начальных условий, можно задать положения материальной точки в два последовательных момента времени $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$.

В последнем случае II закон Ньютона допускает альтернативную формулировку, имеющую название **принципа наименьшего действия**. Согласно принципу наименьшего действия движение частицы в интервале $t_1 \leq t \leq t_2$ между двумя заданными точками $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ происходит по такой траектории $\mathbf{r}(t)$, которая обеспечивает минимальное (или максимальное) значение функционала S , называемого в механике

действием

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt, \quad L = K - U = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - U(\mathbf{r}). \quad (9)$$

Действие S имеет размерность энергии, помноженной на время, т. е. такую же размерность, что и постоянная Планка $\hbar$. Функция $L(t)$, стоящая под знаком интеграла и равная разности значений кинетической и потенциальной энергии частицы, называется в механике **функцией Лагранжа**.

Поясним этот принцип на примере одномерного движения частицы в однородном поле тяжести Земли. Пусть $x(t)$ — траектория частицы, где x — ее высота подъема над землей и частица движется только вверх и вниз (а не в стороны). В этом случае кинетическая и потенциальная энергия частицы будут равны

$$K = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, \quad U = mgx. \quad (10)$$

Пусть в начальный момент времени t_1 движение началось на какой-то высоте x_1 , а закончилось в момент времени t_2 на другой высоте x_2 . Как известно, в этом случае движение является равноускоренным и зависимость координаты x от времени t задается уравнением

$$x(t) = x_1 + v_1(t - t_1) - \frac{g(t - t_1)^2}{2}, \quad (11)$$

где v_1 — начальная скорость частицы (в момент времени t_1), а g — ускорение свободного падения (направленное против оси x). Начальную скорость мы можем найти из условия, что в момент времени t_2 координата частицы равна x_2

$$x_2 = x_1 + v_1(t_2 - t_1) - \frac{g(t_2 - t_1)^2}{2}. \quad (12)$$

Отсюда получим

$$v_1 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \frac{g(t_2 - t_1)}{2}. \quad (13)$$

Таким образом, уравнения (11) и (13) полностью определяют функцию $x(t)$, описывающую движение частицы между точками x_1 и x_2 в интервале $t_1 \leq t \leq t_2$. На графике $x(t)$ эта истинная траектория является параболой — рис. 5. Теперь, зная функцию $x(t)$, мы можем найти кине-

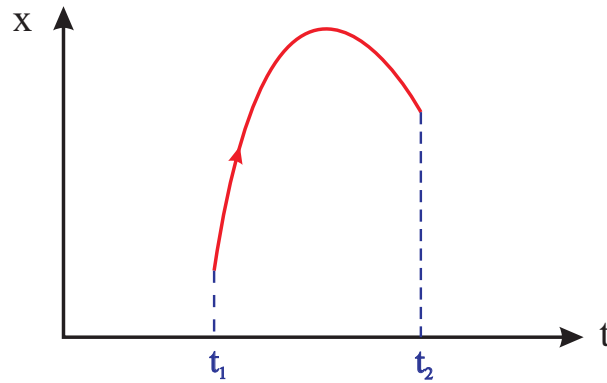


Рис. 5: Истинная траектория частицы.

тическую и потенциальную энергию частицы и, проинтегрировав их разность по времени, вычислить значение действия S для этой траектории. После несколько утомительных, но несложных вычислений получим, что для истинной траектории значение действия равно

$$S = \frac{1}{2}m \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} - \frac{1}{2}mg(t_2 - t_1)(x_1 + x_2) - \frac{1}{24}mg^2(t_2 - t_1)^3. \quad (14)$$

Можно представить теперь какое-нибудь другое движение: сперва резкий подъем, а потом какие-то причудливые колебания — рис. 6. С этой

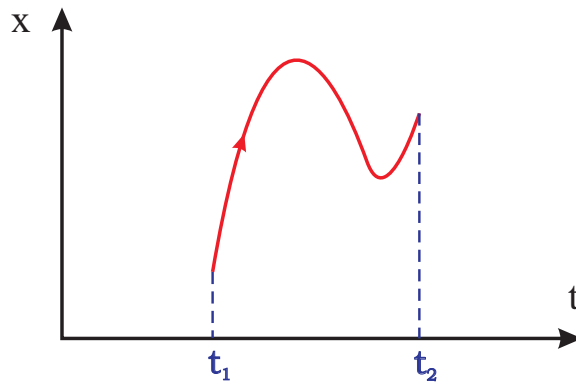


Рис. 6: Какая-то произвольная траектория, отличная от истинной.

новой функцией $x(t)$ можно опять подсчитать разность кинетической и потенциальной энергий и, проинтегрировав ее по времени, вычислить новое значения действия. Принцип наименьшего действия утверждает, что для этой траектории, отличной от истинной, мы всегда получим большее значение действия **при одних и тех же значениях** x_1, x_2, t_1 и t_2 ¹.

Давайте проверим это. Для начала разберем такой случай, когда у частицы нет потенциальной энергии. Тогда принцип наименьшего действия

¹Мы получим меньшее значение действия, если по каким-то причинам движение по истинной траектории соответствует максимуму действия.

гласит, что при движении тела от одной точки к другой за заданное время интеграл по времени от кинетической энергии должен оказаться наименьшим. Это на самом деле эквивалентно утверждению, что частица должна все время двигаться **равномерно** со скоростью, равной средней скорости движения в интервале от t_1 до t_2

$$\bar{v} \equiv \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v dt = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad (15)$$

где $v = dx/dt$ и черта над скоростью означает операцию усреднения по времени. Траектория такого движения в пространстве-времени является отрезком прямой, соединяющей точки x_1 и x_2 — рис. 7.

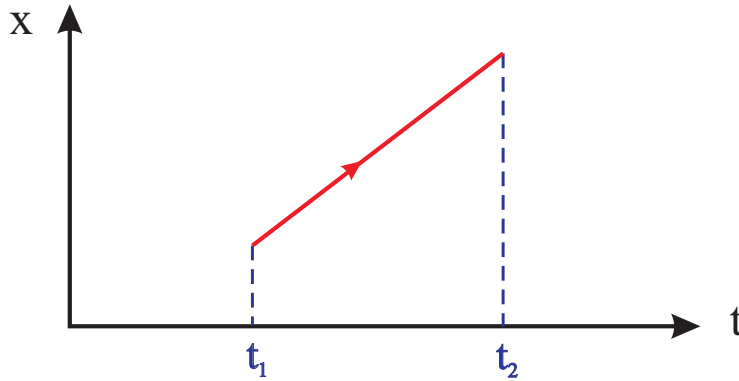


Рис. 7: Траектория равномерного движения.

Чтобы доказать это, рассмотрим интеграл,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (v - \bar{v})^2 dt \geq 0, \quad (16)$$

который по определению либо больше либо равен нулю. Знак равенства интеграла нулю имеет место только тогда, когда во **все** моменты времени подинтегральное выражение тождественно равно нулю, т.е. $v \equiv \bar{v}$. С другой стороны,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} v^2 dt - 2\bar{v} \int_{t_1}^{t_2} v dt + \bar{v}^2(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v^2 dt - \int_{t_1}^{t_2} \bar{v}^2 dt, \quad (17)$$

где мы приняли во внимание соотношение (15). Отсюда следует, что если частица не движется все время равномерно, т.е. ее траектория каким-то образом отклоняется от прямой линии, изображенной на рис. 7, то всегда

будет

$$\int_{t_1}^{t_2} v^2 dt > \int_{t_1}^{t_2} \bar{v}^2 dt. \quad (18)$$

Таким образом мы доказали, что в отсутствие внешних сил действие имеет минимальное значение лишь при равномерном движении частицы

$$S = S_0 = \frac{1}{2}m\bar{v}^2(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}m \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1}. \quad (19)$$

Это утверждение легко может быть обобщено и на трехмерный случай. Тогда можно показать, что действие принимает минимальное значение лишь при равномерном и прямолинейном движении частицы (докажите это!).

Если же сила тяготения отлична от нуля, то предмет, подброшенный в поле тяжести вверх, сперва поднимается быстро, а потом все медленнее. Происходит это потому, что он обладает и потенциальной энергией, а наименьшего значения должна достигать **разность** между кинетической и потенциальной энергиями. Раз потенциальная энергия возрастает по мере подъема, то меньшая разность $K - U$ получится, если как можно быстрее достичь тех высот, где потенциальная энергия велика и двигаться там с возможно меньшей скоростью. Тогда, вычтя из кинетической энергии эту большую потенциальную энергию, мы добьемся уменьшения среднего значения разности, т. е. действия. Так что выгоднее такой путь, который идет вверх и поставляет добрый отрицательный кусок за счет потенциальной энергии — рис. 8.

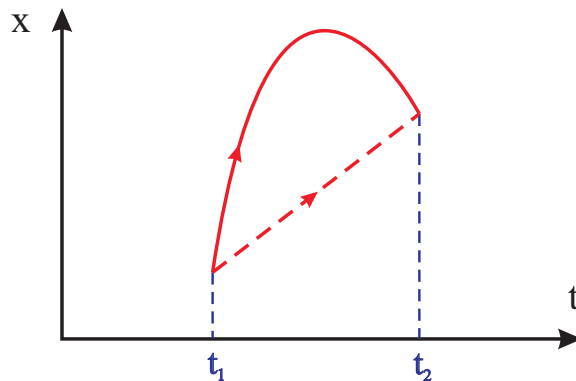


Рис. 8: Оптимальная траектория, обеспечивающая минимальное значение действия. Пунктиром показана траектория, отвечающая равномерному движению.

Но, с другой стороны, нельзя ни двигаться слишком быстро, ни подниматься слишком высоко, потому что на это потребуется чересчур много

кинетической энергии. Надо двигаться достаточно быстро, чтобы подняться и опуститься за определенное время, имеющееся в твоём распоряжении. Так что не следует стараться взлететь слишком высоко, а просто надо достичь какого-то разумного уровня. В итоге оказывается, что правильное решение есть своего рода равновесие между желанием раздобыть как можно больше потенциальной энергии и желанием как можно сильнее уменьшить количество кинетической энергии — это стремление добиться максимального уменьшения разности кинетической и потенциальной энергий. Действие, отвечающее этой оптимальной траектории, определяется выражением (14). Оно, как и следовало ожидать, меньше значения S_0 (см. (19)), отвечающего равномерному движению частицы, изображенному на рис. 8 пунктирной линией.

Приведенные выше рассуждения носят всего лишь качественный, пояснительный характер. Хотелось бы получить строгое доказательство того, что принцип наименьшего действия эквивалентен II закону Ньютона, т. е. уравнению — (8). Такое доказательство можно получить двумя принципиально разными способами.

Первый способ основан на простом наблюдении, что действие S является величиной **аддитивной**. Действительно, согласно формуле (9), действие определяется интегралом по времени между начальной и конечной точками движения. Поэтому его можно вычислить разбив весь интервал времени движения на очень маленькие интервалы, подсчитать действие на каждом из таких интервалов, а затем результаты сложить. На рис. 9 показан результат такого разбиения траектории. В моменты

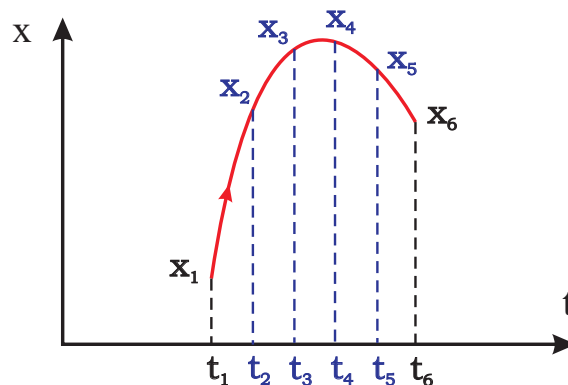


Рис. 9: Разбиение всей траектории на маленькие интервалы.

времени t_i траектория проходит через точки x_i . Действие на всем интервале от t_1 до t_n является функцией всех промежуточных значений x_i (кроме двух крайних, которые фиксированы). Его значение можно

представить в виде суммы по маленьким интервалам

$$S = \int_{t_1}^{t_n} L dt = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (K - U) dt = \sum_{i=1}^{n-1} S_i. \quad (20)$$

Поскольку длительность этих интервалов очень мала, в пределах каждого из них кинетическая и потенциальная энергия практически не меняются со временем. Поэтому интеграл от этих величин по времени можно заменить на соответствующее среднее значение, помноженное на длительность этого интервала. В результате для i -го интервала ($i = 1, 2, \dots, n-1$) получим

$$S_i = \left\{ \frac{1}{2} m \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{1}{2} [U(x_i) + U(x_{i+1})] \right\} (t_{i+1} - t_i). \quad (21)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках соответствует значению кинетической энергии в i -ом интервале, а второе — среднему значению потенциальной энергии. Заметим, что это выражение с точностью до несущественных сейчас для нас малых членов, пропорциональных $(t_{i+1} - t_i)^3$, совпадает с формулой (14).

Варьируя промежуточные значения x_i ($i = 2, 3, \dots, n-1$), мы получаем различные траектории движения. Минимум суммарного действия S соответствует такая траектория, для которой

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (22)$$

Поскольку согласно (21) от переменной x_i зависят только слагаемые S_{i-1} и S_i в сумме (20), это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (S_{i-1} + S_i) = 0. \quad (23)$$

Считая длительность всех малых интервалов одинаковыми, $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n-1$) и дифференцируя (21), находим

$$-m \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} + m \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} - \Delta t U'(x_i) = 0. \quad (24)$$

Поскольку величина $(x_{i+1} - x_i)/\Delta t = v_i$, где v_i — скорость частицы в i -ом интервале и соответственно $(x_i - x_{i-1})/\Delta t = v_{i-1}$, мы можем переписать это в виде

$$-mv_i + mv_{i-1} - \Delta t U'(x_i) = 0. \quad (25)$$

Разделив все на Δt , получаем

$$m \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta t} = -U'(x_i). \quad (26)$$

Поскольку при малых Δt отношение

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta t} = a_i, \quad (27)$$

где a_i — ускорение частицы в интервале $t_{i-1} \leq t \leq t_{i+1}$, мы видим, что соотношение (26) есть не что иное, как II закон Ньютона:

$$ma_i = -U'(x_i) \equiv F_i. \quad (28)$$

Таким образом, экстремуму действия действительно отвечает движение частицы по траектории, удовлетворяющей II закону Ньютона.

С одной стороны, может показаться странным, как это два таких разных закона могут быть эквивалентны друг другу. II закон Ньютона по своей математической структуре **локален**, или точнее — **дифференциален**. Он связывает ускорение точки и действующую на нее силу (производную от потенциала) в один и тот же момент времени, в одном и том же месте пространства. С другой стороны, принцип наименьшего действия по своей сути **интегрален**. Он требует вычисления действия по **всей** траектории частицы и выбора той траектории, на которой это действие минимально.

Однако недоумение снимается, если мы вспомним, что действие есть величина аддитивная. Поэтому если мы разобьем весь путь интегрирования на маленькие дольки, то действие на каждой из таких долек снова должно быть минимальным. Если это не так для какой-то дольки, то, подвигав туда-сюда траекторию в пределах этой дольки, мы найдем ту, которая отвечает минимуму, и тем самым снизим значение всего интеграла. Таким образом, **любая часть пути должна давать минимум**. И это справедливо для каких угодно маленьких долек пути.

Поэтому тот принцип, что весь путь должен давать минимум, можно сформулировать, сказав, что бесконечно малая долька пути — это тоже такая кривая, на которой действие минимально. Мы в этом с вами только что убедились. И если мы возьмем достаточно короткий отрезок пути между очень близкими друг к другу точками x_i и x_{i+1} , — то уже неважно, как меняется потенциал от точки к точке вдали от того места, потому что, проходя весь ваш коротенький отрезочек, вы почти не сходите с места. Единственное, что вам нужно учитывать, — это изменение

первого порядка малости в потенциале. Ответ может зависеть только от производной потенциала, а не от потенциала в других местах.

Так утверждение о свойстве всего пути в целом становится утверждением о том, что происходит на коротком участке пути, т. е. дифференциальным утверждением. И эта дифференциальная формулировка включает производные от потенциала, т. е. силу в данной точке пространства. Таково качественное объяснение связи между интегральным законом (т. е. законом, описывающим свойства всей траектории) и законом дифференциальным (т. е. локальным, описывающим бесконечно малый участок этой траектории).

Второй способ доказательства эквивалентности принципа наименьшего действия и II закона Ньютона является более формальным. Он показывает метод, которым обычно решаются такие вариационные задачи. Суть этого метода заключается в том, что рассматривается действие по траектории $x(t) + \delta x(t)$, немного отличной от той, которая дает экстремум функционалу S :

$$S[x(t) + \delta x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m (\dot{x} + \delta \dot{x})^2 - U(x + \delta x) \right]. \quad (29)$$

При этом считается, что на границах интервала интегрирования возмущение $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$. Это означает, что возмущенная траектория проходит через те же начальную и конечную точки x_1 и x_2 , что и невозмущенная.

Раскладывая теперь подинтегральное выражение в ряд до членов первого порядка малости, пропорциональных $\delta x(t)$ и $\delta \dot{x}(t)$, получим

$$S[x(t) + \delta x(t)] = S[x(t)] + \int_{t_1}^{t_2} dt [m \dot{x} \delta \dot{x}(t) - U'(x) \delta x(t)]. \quad (30)$$

Второе (интегральное) слагаемое в этой формуле представляет собой так называемую **вариацию действия** первого порядка, δS

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt [m \dot{x} \delta \dot{x}(t) - U'(x) \delta x(t)]. \quad (31)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в квадратных скобках в этой

формуле, преобразуем δS к виду

$$\delta S = m\dot{x}\delta x(t)|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt [m\ddot{x} + U'(x)] \delta x(t). \quad (32)$$

Поскольку на границах интервала $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, внеинтегральный член пропадает, и мы получаем окончательно для вариации действия

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} dt [m\ddot{x} + U'(x)] \delta x(t). \quad (33)$$

Если $x(t)$ — траектория, обеспечивающая минимум действия, то первая вариация действия δS вблизи такой траектории должна обращаться в ноль. В противном случае, варьируя знак отклонения $\delta x(t)$, мы можем добиться последующего уменьшения действия для возмущенной траектории. Поскольку функция $\delta x(t)$ обращается в ноль на границах интервала интегрирования, а в остальных точках этого интервала она совершенно произвольна, то δS может равняться нулю лишь при тождественном равенстве нулю подинтегрального выражения в этой формуле. Другими словами, $\delta S = 0$ при условии, что

$$m\ddot{x} = -U'(x), \quad (34)$$

а это есть не что иное, как II закон Ньютона.

В общем-то на этом следовало бы и закончить эту лекцию, но один вопрос, наверное, многим не дает покоя. Для чего все это делалось? Только ли для того, чтобы показать, что ньютоновская механика может быть сформулирована на основе совсем другого математического аппарата — вариационного исчисления? Но ведь все равно потом приходится решать все то же дифференциальное уравнение, выражающее собой II закона Ньютона, для определения траектории частицы. Тогда зачем все так усложнять? Имеет ли действие S , введенное нами выше, какой-то самостоятельный физический смысл?

Принцип наименьшего действия и квантовая механика

Оказывается, что очень даже имеет! И на самом деле мы с вами сейчас находимся всего в двух шагах от одной из известных формулировок **квантовой механики** — науки, которая обобщает классическую механику на случай движения микроскопических частиц в очень малых

объемах пространства. Поэтому, согласитесь, было бы очень обидно на этом месте закончить, даже не заглянув туда немного.

В квантовой механике, в отличие от механики классической, для описания движения, вместо траектории $\mathbf{r}(t)$, используется так называемая **амплитуда вероятности** для частицы, находящейся в исходный момент времени t_a в точке пространства "a", попасть в момент времени t_b в другую точку пространства — "b". Если обозначить эту амплитуду вероятности через $C(a \rightarrow b)$, то для нее справедлива следующая замечательная формула

$$C(a \rightarrow b) = \sum_{\substack{\text{по} \\ \text{всем} \\ \text{путям} \\ \text{из } a \text{ в } b}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{ab} \right]. \quad (35)$$

Суммирование в этой формуле ведется по **всем путям** $\mathbf{r}(t)$, ведущим из точки "a" в точку "b". А в показателе экспоненты стоит уже знакомое нам действие S_{ab} (деленное на постоянную Планка $\hbar$), вычисленное для каждого из таких путей. Не правда ли, потрясающе красивая формула? В ней в таком компактном виде заключено одно из величайших творений человеческого гения — квантовая механика. Видно совсем не случайно размерность действия совпала с размерностью постоянной Планка!

Ну а как отсюда получается предельный переход к классической механике? Да очень просто. Дело в том, что для макроскопических движений, описываемых классической механикой, действие S очень велико и много больше постоянной Планка $\hbar$: $S \gg \hbar$. Поэтому для таких движений функция, стоящая под знаком суммы в уравнении (35), сильно осциллирует при малом изменении траектории, и вклады от близких траекторий в амплитуду вероятности почти полностью сокращают друг друга. Не сокращаются только вклады от тех траекторий, вблизи которых действие S практически не меняется. А это те траектории, для которых оно достигает минимального (или максимального) значения. Как раз эти-то траектории, соответствующие принципу наименьшего действия, и дают основной вклад в сумму! Вот так, в одной короткой формуле уживаются вместе и классическая, и квантовая механика! По этой причине это, пожалуй, одна из самых красивых физических формул, известных сегодня. Автор этой формулы — известный американский физик-теоретик Ричард Фейнман. И в нее-то и входит эта таинственная величина — действие, с которым мы сегодня познакомились.

Конечно, за простотой этой формулы кроется совсем уже не простой математический аппарат. Ведь для вычисления амплитуды вероятности нам надо суммировать по всем путям, т. е. по всем мыслимым и немыслимым функциям $\mathbf{r}(t)$, начинающимся в точке "a" и заканчивающимся в точке "b". Такое суммирование по функциям называется в математике **функциональным интегрированием**. И мы, пожалуй, сейчас на этом остановимся, потому что для продолжения разговора нам просто не хватит уже имеющихся знаний. Да и мы сильно забежим вперед. Все придет в свое время.

Задачи

1. Определить время t_{AB} , которое потребуется материальной точке, чтобы скатиться вниз под действием силы тяжести по кривой $y = y(x)$ из положения $A(0, 0)$ в положение $B(x_1, y_1)$ (ось y направлена вниз, трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

Ответ:

$$t_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx,$$

где $y' = dy/dx$, а g — ускорение свободного падения.

Анекдот

Бор с женой и молодым голландским физиком Казимиром возвращались поздним вечером из гостей. Казимир был завзятым альпинистом и с увлечением рассказывал о скалолазании, а затем предложил продемонстрировать своё мастерство, избрав для этого стену дома, мимо которого вся компания в тот момент проходила. Когда он, цепляясь за выступы стены, поднялся уже выше второго этажа, за ним, раззадорившись, двинулся и Бор. Маргарита Бор с тревогой наблюдала за ними снизу. В это время послышались свистки и к дому подбежало несколько полицейских. Здание оказалось отделением банка.