

2. *Elektrodynamische Elementargesetze;* von *E. Wiechert.*

(Aus den Archives Néerlandaises, livre jubilaire, dédié à H. A. Lorentz,
p. 549. 1900.)

I. Grundlagen der Theorie.

1. *Vorwort.* Die neuere, sich auf Maxwell stützende Elektrodynamik ist durch Unterscheidung zwischen Aether und Materie im Innern der sinnlich wahrnehmbaren Körper in so weitem Maasse zu den Ansichten der älteren Schule zurückgekehrt, dass der einstige Gegensatz nicht mehr besteht. Die „*elektrischen Teilchen*“ der alten Theorien sind wiederum zu Recht gelangt; wir haben aber gelernt, die Vermittelung ihrer Wechselwirkungen durch das Zwischenmedium zu verfolgen. So ist das grosse Problem gelöst, welches vor Maxwell zwar vielfach formulirt wurde, aber allen Bemühungen widerstand; und Maxwell's Beitrag erscheint nicht mehr als ein Umsturz des Bestehenden, sondern als ein Fortschritt im natürlichen Gange der Entwicklung.

H. A. Lorentz war der erste, der den Unterschied zwischen Aether und Materie in der Maxwell'schen Theorie mit Erfolg verwertete, und er machte dabei von vornherein auf die Annäherung an die älteren Theorien aufmerksam, welche sich dann einstellt. In der Ueberzeugung, dass hierauf im Interesse unserer Wissenschaft nicht genug Gewicht gelegt werden kann, will ich versuchen, hier einen weiteren Baustein für den Zusammenschluss der alten und neuen Theorien erbringen.

In den Bezeichnungen schliesse ich mich an meinen Beitrag zur Festschrift für die Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal's zu Göttingen, 1899¹⁾; auf diesen verweise ich auch für nähere Ausführungen.

2. Die Namen „*Aether*“ und „*Materie*“ gebrauche ich in ganz ähnlichem Sinne wie H. A. Lorentz. Da ich überdies

1) Bei B. G. Teubner, Leipzig.

schon mehrfach Gelegenheit genommen habe, mich über diesen Punkt auszusprechen, so werden hier wenige Worte genügen.

Das optische Verhalten strömender Flüssigkeiten und ähnliche Erscheinungen zeigen, dass die sinnlich wahrnehmbare Materie bei ihren Bewegungen selbst im Innern die Lichtwellen nicht mit sich fortträgt; auch die Aberration des Lichtes führt, wie H. A. Lorentz gezeigt hat, zu demselben Schlusse. Indem wir das Licht nach Maxwell als einen elektrodynamischen Vorgang auffassen, sind wir gezwungen, im Innern der Materie noch einen Träger der elektrodynamischen Erscheinungen anzunehmen, der sich an den sinnlich wahrnehmbaren Bewegungen nicht beteiligt. *Um diese Tatsache bequem in Worte zu kleiden, unterscheiden wir zwischen Aether und Materie.* Speculationen über ihr gegenseitiges Verhältnis sind für die unmittelbaren Zwecke der Elektrodynamik nicht notwendig; so können wir es zum Beispiel dahingestellt sein lassen, ob es sich um verschiedene Stoffe, oder um denselben Stoff in verschiedenen Zuständen handelt. Materie und Aether sind uns nur Bilder, die wir von unserem menschlichen Standpunkt in der Natur sehen; dem weiteren Fortschritt der Wissenschaft bleibt überlassen, zu entscheiden, was ihnen in Wirklichkeit entspricht.

Während die Materie uns in mannigfachsten Variationen der Art, der Anhäufung und der Bewegung entgegentritt, genügt für die Darstellung unserer Erfahrungen die Annahme, dass der Aether die ganze uns zugängliche Welt ohne merkliche Lücken und ohne merkliche Bewegungen überall mit denselben äusserst einfachen Eigenschaften erfüllt. Dieses gilt auch von dem Bereiche, den die Materie beansprucht, sodass sie ganz von dem Aether durchtränkt erscheint, ohne ihn merklich zu verdrängen.

Zur Kennzeichnung der elektrodynamischen Eigenschaften des Aethers genügt eine einzige Constante, die Lichtgeschwindigkeit V bei Abwesenheit der Materie. Zur Beschreibung der elektrodynamischen Vorgänge müssen gerichtete Grössen, Vektoren, verwendet werden.

3. Wir wollen von der *Optik im freien Aether* ausgehen. Für sie können Vektoren sehr verschiedener physikalischer Be-

deutung in Betracht gezogen werden. Ist K ein solcher Vector, dann darf als Schwingungsgleichung für eine Componente K_v parallel der beliebigen Richtung v angenommen werden:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 K_v}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 K_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_v}{\partial z^2} \right).$$

Dabei gilt die folgende Bedingung als Ausdruck der Transversalität der Schwingungen und der Annahme, dass auch der Fall der Erregungslosigkeit möglich ist:

$$(2) \quad \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = 0.$$

Zu jedem herausgegriffenen Vector K lässt sich ein gewisser zweiter H zuordnen, der mit ihm in reciproker Beziehung steht. Wir erhalten H durch die Definitionsgleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial t} = V \left(\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = V \left(\frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = V \left(\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right), \end{cases}$$

$$(4) \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Sie ergeben mittels (1) und (2) als Analogon zu (3):

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial K_x}{\partial t} = -V \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial K_y}{\partial t} = -V \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial K_z}{\partial t} = -V \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right), \end{cases}$$

und als Analogon zu (1):

$$(6) \quad \frac{\partial^2 H_v}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 H_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_v}{\partial z^2} \right).$$

Das Formelsystem (2), (3), (4), (5) als Ersatz für (1) und (2) bez. (4) und (6) wurde von Hertz 1884 aus der Maxwell'schen Theorie herausgelöst.

Für die Elektrodynamik kommt noch ein drittes System in Betracht, welches in vielen Fällen vorteilhafter ist als das zweite und sich enger an Maxwell anschliesst. In ihm wird das *Vectorpotential* eines der Vektoren K und H benutzt. Wir

wollen H auswählen und das Potential mit Γ bezeichnen, dann ist zu setzen:

$$(7) \quad H_x = - \left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_y}{\partial x} \right), \quad H_y = - \left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma_z}{\partial x} \right), \\ H_z = - \left(\frac{\partial \Gamma_y}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_x}{\partial y} \right).$$

Damit wird Γ noch nicht bestimmt; vor allem kommt in Betracht, dass der Wert von

$$\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z}$$

willkürlich bleibt; eine passende Verfügung behalten wir uns vor.

Der Ansatz (7) erfüllt (4) und ergibt wegen (3):

$$- \frac{\partial^2 \Gamma_x}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 \Gamma_y}{\partial x \partial t} = V \left(\frac{\partial K_x}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial x} \right)$$

nebst zwei ähnlichen Gleichungen. Das ganze System zeigt, dass VK sich von dem Vector $(-\partial \Gamma_x / \partial t, -\partial \Gamma_y / \partial t, -\partial \Gamma_z / \partial t)$ nur um einen Vectoranteil unterscheiden kann, der ein scalares Potential besitzt. Bezeichnen wir dieses mit Φ , so ist zu setzen:

$$(8) \quad K_\nu = - \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \frac{1}{V} \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial t},$$

wobei ν eine beliebige Richtung bedeutet. Hiermit ist nun auch das System (3) erfüllt. Es bleiben uns noch (2) und (5), (2) ergibt:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Mittels (5) folgt für eine beliebige Richtung ν :

$$\frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial z^2} \right) \\ - V \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} \right) \right).$$

Ueber die Unbestimmtheit in Γ verfügend setzen wir nun:

$$(9) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Dann folgt als Ersatz für (2) und (5):

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right);$$

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \Gamma_r}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 \Gamma_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_r}{\partial z^2} \right).$$

(9), (10), (11) in Verbindung mit (7) und (8) stellen das angekündigte *Maxwell'sche Gleichungssystem* dar. Wie wir erkennen, ist es nicht symmetrisch. Das scheint zunächst ein Nachteil (der übrigens leicht beseitigt werden könnte), ist es aber in Wirklichkeit nicht, denn bei der Einordnung der Theorie der Optik in die Theorie der Elektrodynamik kommen wir so in die Lage, uns genau der erfahrungsgemäss bestehenden Unsymmetrie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen anzupassen.

Maxwell benutzte nicht die vereinfachende Beziehung (9). Ihm war nämlich Γ nicht wie uns eine blosse mathematische Hilfsgrösse, sondern eine Function des Zustandes von besonderer Bedeutung, und so musste er den Wert von

$$\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z},$$

obgleich „not related to any physical phenomenon“, unbestimmt lassen. In einer interessanten in Abschnitt 12 citirten Arbeit von Levi-Civita (1897) ergab sich (9) als Folgerung aus hypothetischen Annahmen über Φ und Γ .

4. *Elektrische Ladung.* Nach Maxwell's Theorie lassen sich die elektrische und die magnetische Erregung im freien Aether durch eines der Vektorenpaare K und H der Optik darstellen. Da wir die soeben berührte Unsymmetrie berücksichtigen müssen, ist in unserem Falle die „*elektrische Kraft*“ mit K , die „*magnetische Kraft*“ mit H zu bezeichnen.

Für einen Raum, in dem die Gleichungen (2) und (4) überall erfüllt sind, ergeben sich für jede geschlossene Fläche die Sätze:

$$\int_0^0 d\sigma K_r = 0, \quad \int_0^0 d\sigma H_r = 0.$$

$d\sigma$ bedeutet ein Oberflächenelement, r die Normale; der Index 0 soll daran erinnern, dass es sich um eine geschlossene

Fläche handelt. Liegt die Fläche zwar selbst im freien Aether, umschliesst sie aber Materie, so werden (2) und (4) unbrauchbar, und es lässt sich mittels (3) und (5) nur folgern, dass die Flächenintegrale von der Zeit unabhängig sind; (2) und (4) ergeben dann zugleich, dass alle Flächen, welche dieselbe Materie umschliessen, auch dieselben Werte der Integrale haben müssen. Die Erfahrung lehrt, dass nur für die elektrische Erregung, nicht aber für die magnetische, von 0 verschiedene Werte auftreten können.

Wir setzen demgemäss:

$$\int_0^0 d\sigma K_r = 4\pi e, \quad \int_0^0 d\sigma H_r = 0.$$

Die Grösse e , welche auf die nach aussen weisende Normale bezogen werden soll, hängt dann allein von der eingeschlossenen Materie ab, nicht von der besonderen Gestalt der umschliessenden Fläche. Sie heisst die „Gesamtmenge der in der Materie enthaltenen Elektrizität“.

Kommen zwei Körper in zeitweilige Berührung, so zeigen sie erfahrungsgemäss oftmals nachher andere Ladungen als vorher. Nach unseren eben abgeleiteten Sätzen muss dabei die Summe der Ladungen die Berührung überdauern, der eine Körper muss also gerade so viel gewonnen haben, als der andere verloren hat. Der Satz von der Erhaltung der Elektrizität erscheint hiernach als Folgerung aus (5).

Aus der Elektrolyse ist zu schliessen, dass die elektrische Ladung an der molecularen Structur der Materie Anteil hat, indem die einzelnen Atome oder Atomgruppen nur eine ganz bestimmte positive oder negative Ladung oder ein ganzzahliges Vielfaches von dieser annehmen können.

5. Was bedeutet nun eine Veränderung der Ladung? Bis vor kurzem bot diese Frage für die Elektrodynamik besondere Schwierigkeiten. H. A. Lorentz schrieb 1895¹⁾: „Ist somit die Annahme dieses Ueberganges oder Austausches der Ionenladungen — eines freilich noch sehr dunklen Vorganges — die unerlässliche Ergänzung jeder Theorie, welche eine Fortführung

1) Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern p. 6 und 7. Leiden 1895.

der Elektrizität durch Ionen voraussetzt, so besteht ein anhaltender elektrischer Strom auch nie in einer Convection *allein*, . . . Hr. Giese ist der Meinung, dass in den Metallen eine wirkliche Convection gar nicht im Spiele sei. Da es aber nicht möglich scheint, das „Ueberspringen“ der Ladungen in die Theorie aufzunehmen, so wolle man entschuldigen, dass ich meinerseits von einem solchen Vorgange gänzlich absehe und mir einen Strom in einem Metalldraht einfach als eine Bewegung geladener Teilchen denke.“ Ganz ähnlich musste ich mich in meinen theoretischen Arbeiten über die Elektrodynamik verhalten. Befriedigend erscheint nur ein Ausweg, auf den unter anderen Helmholtz 1881 in einem Faraday zu Ehren gehaltenen Vortrag hinwies: *Wir müssen die Elektrizität ganz so körperlich auffassen wie die Materie, das heisst, wir müssen auch ihr bestimmte unveränderliche Atome zuschreiben.*

Als „imponderabel“ im Sinne der älteren Anschauungen dürfen wir die elektrischen Atome freilich nicht ansehen, denn als Folge der mit der Bewegung im Aether verbundenen elektrodynamischen Vorgänge ergibt sich eine *kinetische Energie*, also *Masse* im Sinne der Mechanik. Bedenken wir noch den Anteil, welchen die elektrischen Teilchen an dem Aufbau der sinnlich wahrnehmbaren Materie nehmen, so erscheinen sie als diese selbst. „Es bietet sich so die lockende Aussicht, Materie und Elektrizität unter einem höheren Gesichtspunkt zu vereinigen.“ Als ich dieses in einer 1894 veröffentlichten Skizze einer Theorie der Elektrodynamik schrieb, musste der rein hypothetische Charakter scharf hervorgehoben werden. Noch im Frühjahr 1896 vermochte ich bei der ausführlichen Darstellung der Theorie als Grenzen für das Atomgewicht der besonderen elektrischen Atome, welche bei dem Wechsel der molecularen Ladungen ausgetauscht werden, nur die recht weit auseinander liegenden Zahlen 10^{-7} und 1 anzugeben. Seit jener Zeit aber ergab sich schnell grössere Sicherheit. Es kam im selben Jahre die Entdeckung Zeeman's und ihre Erklärung durch H. A. Lorentz, welche die Vermutung nahelegt, dass das Atomgewicht der besonderen elektrischen Atome etwa $\frac{1}{1000}$ ist. Mich selbst führten im Winter Untersuchungen über die Kathodenstrahlen zu der Folgerung, dass

diese aus den besonderen elektrischen Atomen bestehen, und dass ihr Atomgewicht etwa $\frac{1}{2000}$ bis $\frac{1}{4000}$ beträgt.¹⁾

Es ist wohl bekannt, eine wie grosse Zahl von Arbeiten später erschienen ist, welche diese Resultate befestigen und nach vielen Seiten hin ergänzen. Die Zahlenwerte für beide Phänomene wurden genauer bestimmt und kamen einander näher.

6. *Elektronentheorie der Elektrodynamik.* Fassen wir alles zusammen, so kann nun mit grosser Zuversicht folgendes behauptet werden:

Die Ladung eines jeden materiellen Teilchens ist diesem ein für allemal eigentümlich, ändert sich also niemals.

Um den eigentlichen Sinn der Hypothese recht scharf zu erfassen, muss man sich erinnern, dass wir in der „Menge der Elektrizität“ ein Maass für die elektrodynamische Verkettung mit dem Aether erkannten. Es tritt dann sogleich hervor, dass weiter nichts ausgesagt wird, als dass die elektrodynamische Verkettung mit dem Aether, soweit sie sich in der „Menge der Elektrizität“ messen lässt, jedem materiellen Teilchen ein für allemal eigentümlich ist.

Ein elektrischer Leitungsstrom ist hiernach stets zugleich als Strom materieller Teile aufzufassen. Für die elektrolytische Leitung wurde dieses seit langem anerkannt. Neu ist nur, dass wir auch für die metallische Leitung etwas Aehnliches annehmen müssen. Sollte es allein besondere negative elektrische Atome geben und nicht auch positive Atome ähnlicher Art, so würde die Bewegung nur in der negativen Richtung des elektrischen Stromes erfolgen.

Wie H. A. Lorentz zuerst gezeigt hat, ist es möglich, die elektrodynamischen Vorgänge allein als Folge von Bewegungen elektrischer Teilchen anzusehen. Es mag wohl sein, dass die wirklichen Erscheinungen damit nicht erschöpft werden, wir haben aber jedenfalls bei der Ausarbeitung der Theorie vorläufig das Recht, diese vereinfachende Voraussetzung zu machen.

Damit kommen wir nun zu den Grundvorstellungen der alten Theorien zurück. Der ganze Unterschied ist, dass wir die elektrischen Flüssigkeiten nicht mehr imponderabel, sondern materiell

1) E. Wiechert, Phys.-ökonom. Gesellsch. zu Königsberg i. Pr. 38. 7. Januar 1897.

auffassen. Die kleinste moleculare Ladung hat von Stoney (1874) den Namen „Elektron“ erhalten. Da wir sie in den Mittelpunkt unserer Theorie stellen, können wir diese auch die „Elektronentheorie“ der Elektrodynamik nennen.

7. *Feldgleichungen.* Für den freien Aether nahmen wir an (Abschnitt 3):

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_x}{\partial t} &= -V \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right), & \frac{\partial H_x}{\partial t} &= V \left(\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial K_y}{\partial t} &= -V \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), & \frac{\partial H_y}{\partial t} &= V \left(\frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial K_z}{\partial t} &= -V \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right), & \frac{\partial H_z}{\partial t} &= V \left(\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

Für materielle Systeme ändern sich diese Gleichungen, weil wir auf die Elektronen Rücksicht nehmen müssen. Doch ist es nicht nötig, noch weitere Hypothesen zu machen, denn unsere Annahme, dass der Aether mit gleichen Eigenschaften auch die Materie durchdringt, führt das hingeschriebene System über in

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial K_x}{\partial t} = -V \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - 4\pi\gamma_x, \\ \frac{\partial K_y}{\partial t} = -V \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - 4\pi\gamma_y, \\ \frac{\partial K_z}{\partial t} = -V \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - 4\pi\gamma_z. \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial t} = V \left(\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = V \left(\frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = V \left(\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right). \end{cases}$$

$$(14) \quad \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = 4\pi\chi,$$

$$(15) \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

wobei γ den elektrischen Strom, χ die elektrische Dichte bezeichnet, und als Folge der vorstehenden Gleichungen

$$(16) \quad -\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z}$$

hervorgeht. Dieses System fasst alle Erfahrungssätze über die elektrische und magnetische Felderregung zusammen. K, H, γ, χ stellen innerhalb der Materie Mittelwerte dar, wie es der Annahme der molecularen Constitution entspricht.

γ summirt eine Reihe verschiedener physikalischer Vorgänge: die „Convection“, den „Leitungsstrom“, die „dielektrische Polarisation“ und die „Magnetisirung“.

Das Gleichungssystem (12) bis (16) lehnt sich an Hertz (und Heaviside) an. In der Maxwell'schen Darstellungsweise erhalten wir für die Bezeichnungen des Abschnitts 3:

$$(17) \quad \begin{cases} H_x = - \left(\frac{\partial \Gamma_z}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_y}{\partial z} \right), & H_y = - \left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma_z}{\partial x} \right), \\ H_z = - \left(\frac{\partial \Gamma_y}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_x}{\partial y} \right). \end{cases}$$

$$(18) \quad K_v = - \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{1}{V} \frac{\partial \Gamma_v}{\partial t},$$

$$(19) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) + 4 \pi V^2 \chi,$$

$$(20) \quad \frac{\partial^2 \Gamma_v}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 \Gamma_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_v}{\partial z^2} \right) + 4 \pi V \gamma_v,$$

$$(21) \quad - \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z}.$$

Die letzte Gleichung formulirt den Satz von der Erhaltung der Elektrizität; die Beziehung:

$$(22) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} \right) = 0$$

erscheint hier als Folge von (19), (20), (21).

Das System (17) bis (21) ist mit dem System (12) bis (15) ganz gleichwertig, kann also wie dieses als Fundamentalsystem für die Felderregungen genommen werden.

8. *Einwirkung des Aethers auf die Materie.* Bisher haben wir allein die Erregung des Aethers beachtet, sodass die Grundlagen für die Theorie der Elektrodynamik noch nicht vollständig sind. Es fehlt die Feststellung der Einwirkung des Aethers auf die Materie. H. A. Lorentz hat als der erste (1892) gezeigt, dass dafür die beiden folgenden Hypothesen genügen:

Ein elektrisches Teilchen der Ladung e erfährt unabhängig von seiner Bewegung wegen der elektrischen Erregung des Aethers eine mechanische Kraft $\parallel K$ von der Intensität $e K$.

Ein elektrisches Teilchen der Ladung e , das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, erfährt wegen der magnetischen Erregung des Aethers eine mechanische Kraft $\perp v$ und $\perp H$ von der Intensität $e v H \sin(v, H) / V$.

9. *Schlussbemerkungen.* Der Kreis der grundlegenden Hypothesen für eine Theorie der Elektrodynamik ist nun vollständig. Es sind ihrer angesichts der Fülle der umfassten Erscheinungen nur sehr wenige, und alle schliessen sich enge an die Erfahrung, oder wählen aus dem Möglichen das Einfachste heraus: die Gesetze der Lichtbewegung im freien Aether, Maxwell's Annahme, dass dabei magnetische und elektrische Erregungen ins Spiel kommen, die Voraussetzung eines überall vorhandenen, überall ruhenden, überall gleich beschaffenen Trägers dieser Erregungen, den wir „Aether“ nennen, die Vorstellung, dass die Wechselwirkungen zwischen Aether und Materie sich allein an elektrische Teilchen und ihre Bewegungen knüpfen, endlich die beiden Gesetze des vorigen Abschnittes.

Der elektrodynamischen Energie wurde bisher noch nicht gedacht. Es geschah dieses absichtlich, um zu zeigen, dass sie bei der Feststellung der Grundvorstellungen nicht berücksichtigt zu werden braucht. Wenn man nun aber das Princip der Energie anwendet, so ergibt sich, dass dem elektrodynamisch erregten Aether Energie zugeschrieben werden muss, und dass man den Anforderungen des Principes am einfachsten mittels der Maxwell'schen Energieformel und der Poynting'schen Vorstellung der Energieströmung genügt.

II. Elementargesetze.

10. *Formulirung des Problems.* Charakteristisch für die entwickelte Theorie ist es, dass sie eine Fortpflanzung der elektrodynamischen Erregungen mit der Lichtgeschwindigkeit im freien Aether annimmt. Es entsteht daher die Vermutung, dass es möglich sein müsse, die jeweilige Erregung an irgend einer Stelle als Folge von Vorgängen darzustellen, die in jeder Raumstelle zu so weit zurückliegenden Zeiten stattfanden, als

jener Ausbreitungsgeschwindigkeit entspricht. Da wir ferner annehmen, dass alle Aethererregungen ihren Ursprung in den elektrischen Teilchen haben, so werden wir vermuten, dass es auch möglich sein müsse, im Sinne der alten Theorien die entscheidenden Vorgänge allein auf diese elektrischen Teilchen zu beziehen.

Aehnliche Probleme sind in der Elasticitätstheorie sowie in der Optik schon vielfach behandelt worden, und wir kommen leicht zu unserem Ziel, wenn wir von den so entwickelten Methoden Gebrauch machen. Ich will im Folgenden den Weg gehen, auf welchen von Beltrami das Huygens'sche Princip analytisch formulirt wurde.

11. *Elementargesetz für Raumelemente.* Es wäre nicht zweckmässig, direct an die Gleichungen für K und H anzuknüpfen, weil die Trennung beider Vektoren zu unbequemen Nebenbedingungen führt. Man pflegt in solchen Fällen passende Hilfsgrössen einzuführen. In unserem Falle ist das in I und Φ schon geschehen, wir werden also ohne weiteres das System:

$$(19) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) + 4\pi V^2 \chi,$$

$$(20) \quad \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial z^2} \right) + 4\pi V^2 \frac{\gamma_\nu}{V}$$

zur Bestimmung von Φ und Γ verwerten können.

Beltrami¹⁾ benutzt folgenden mathematischen Hilfssatz: Ist U eine Function der Coordinaten x, y, z und r , so gilt für einen beliebigen Raumpunkt (0):

$$4\pi U_0 = \int d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) \cos(n, r) - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) \\ + \int \frac{d\omega}{r} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \right),$$

wenn unter r die Entfernung von (0) verstanden wird, das erste Integral sich auf eine beliebige den Punkt (0) umgebende

1) E. Beltrami, R. Accad. d. Lincei, Rend. (2) 4. p. 51. 1895, eine deutsche Darstellung giebt W. Voigt, Compendium d. theoret. Physik 2. p. 776. Leipzig 1896.

Fläche, das zweite sich auf den eingeschlossenen Raum bezieht. n bedeutet die nach innen weisende Normale. Bei der Differentiation nach r hat man x, y, z , bei den Differentiationen nach n, x, y, z dagegen r als constant anzusehen. In unserem Falle denken wir uns die Fläche ins Unendliche gerückt und nehmen an, dass dann das zugehörige Integral gleich Null gesetzt werden darf. Dann bleibt:

$$4\pi U_0 = \int \frac{d\omega}{r} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \right).$$

Hierin setzen wir $r = (t_0 - t)V$, wobei t_0 als Constante, t als Variable aufgefasst wird, sodass U in eine Function von x, y, z und t übergeht, und erhalten:

$$4\pi (U_0)_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r} \left(\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \right)_{t=t_0 - \frac{r}{V}}.$$

Wenden wir diesen Satz auf Φ und Γ_v an, so ergibt sich mittels der Differentialgleichungen (19) und (20) sofort:

$$(23) \quad \Phi_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r} \chi_{t=t_0 - \frac{r}{V}},$$

$$(24) \quad (\Gamma_v)_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r} \left(\frac{\gamma_v}{V} \right)_{t=t_0 - \frac{r}{V}},$$

womit folgendes ausgesagt ist: *Man erhält den Wert von Φ und Γ_v für irgend eine Stelle (0) und irgend eine Zeit t_0 durch Summation der Anteile*

$$\frac{d\omega}{r} \chi \quad \text{und} \quad \frac{d\omega}{r} \frac{\gamma_v}{V}$$

für alle Volumenelemente $d\omega$. Dabei bedeutet r den Abstand des Volumenelementes von (0) und sind für χ bezüglich γ_v diejenigen Werte zu wählen, welche zu einer so weit zurückliegenden Zeit bestanden, dass eine damals mit der Lichtgeschwindigkeit ausgehende Erregung gerade zur Zeit t_0 in (0) eingetroffen wäre. Die Potentialanteile der einzelnen Volumenelemente scheinen sich hiernach mit Lichtgeschwindigkeit auszubreiten.

In den Gesetzen (23) und (24) nebst den Formeln (17), (18) zur Bestimmung von K und H und dem Satze von der Erhaltung der Elektrizität (21) ist uns eine neue *Darstellung der Feldgleichungen gegeben, welche nach dem Vorbild der alten Theorien die Nahwirkungen durch Fernkräfte ersetzt.*

12. *Historische Bemerkungen.* Die Formel (19) mit dem sich anschliessenden Satze (23), der hier unter Benutzung eines Beltrami'schen Hilfssatzes abgeleitet wurde, suchte schon Riemann¹⁾ 1858 für die Elektrodynamik zu verwerten. Da er aber nur auf die elektrische Kraft — nicht auch auf die magnetische — Rücksicht nahm, musste sein Vorgehen unfruchtbar bleiben. (23) und (24) oder entsprechende Sätze wurden dann später von Poincaré²⁾ (1891) und in ausgedehntestem Maasse von H. A. Lorentz³⁾ (1892 und 1895) verwertet. Levi-Civita⁴⁾ zeigte 1897, dass man zu den Hertz-Heaviside'schen Formeln gelangt, wenn für die Helmholtz'sche Theorie ähnliche Formeln wie (23) und (24) angenommen werden.

13. *Elementargesetz für Elektronen.* Es bleibt uns nun noch ein letzter Schritt: *Wir müssen nach dem Vorgang von W. Weber die elektrodynamische Wirkung der Materie in die Anteile der einzelnen Elektronen auflösen.* Damit kommen wir denn zu dem eigentlichen Thema der vorliegenden Arbeit.

Zunächst könnte vermutet werden, dass im Anschluss an (23) und (24) für ein einzelnes *Elektron der Ladung* $\epsilon = \int d\omega \chi$ *und der Geschwindigkeit* v einfach

$$\Phi_{t=t_0} = \frac{\epsilon}{r_{t=t_0 - \frac{r}{V}}}, \quad (I_r)_{t=t_0} = \epsilon \left(\frac{1}{r} \frac{v_r}{V} \right)_{t=t_0 - \frac{r}{V}},$$

zu setzen sei, und in der That wurde das seiner Zeit von Riemann für Φ vorausgesetzt. Dieser Weg führt aber zu Widersprüchen mit den fundamentalen Annahmen unserer Theorie, wie sich zum Beispiel bei der Behandlung irgend einer der Probleme in Teil III sogleich zeigen würde, ist also ungangbar. Es liegt dies daran, dass es nicht erlaubt ist, schon vor der Anwendung der Formeln (23) und (24) zu der Grenze eines punktförmigen Körpers überzugehen; jene Formeln gelten

1) B. Riemann, Pogg. Ann. 131. p. 237. 1867.

2) H. Poincaré, Compt. rend. 113. p. 515. 1891.

3) H. A. Lorentz, La théorie électromagnétique de Maxwell etc. Leiden 1892, auch Arch. Néerl. 25. p. 363. 1892; Versuch einer Theorie etc., Leiden 1895.

4) Levi-Civita, Nuovo Cimento (4) 6. p. 93. 1897.

ja für räumlich verteilte Elektrizität, verlangen also, dass der Grenzübergang erst nach ihrer Anwendung gemacht werde. Es kommt auf dasselbe hinaus, wenn wir sagen, dass die Formeln (23) und (24) nur auf unendlich kleine, nicht aber auf punktförmige Körper angewandt werden dürfen.

Dabei soll noch angenommen werden, dass der Körper, den wir Elektron nennen wollen, allseitig symmetrisch gebaut sei und keine Drehungen ausführe. Andernfalls müssten Mittelwerte gebildet werden.

(1) sei diejenige Lage des Körpermittelpunktes zu der früheren Zeit t_1 , von der aus eine mit der Lichtgeschwindigkeit V ausgehende Erregung gerade zur Zeit t_0 im Punkte (0) ankäme. Wird dann der Abstand (0)—(1) mit r_1 bezeichnet, so gilt:

$$t_1 = t_0 - \frac{r_1}{V}.$$

Wegen der vorausgesetzten unendlich kleinen Ausdehnung des Elektrons kommen bei der Anwendung von (23):

$$\Phi_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r} \chi_{t=t_0 - \frac{r}{V}}$$

nur Zeiten t und Entfernungen r in Betracht, die unendlich nahe an t_1 und r_1 liegen. Die scheidenden Kugelflächen dürfen im Bereiche des Elektrons als Ebenen gelten. $r - r_1$ ist ihr Abstand von (1). Bei der Integration ordnet sich jeder Ebene ein gewisser Schnitt durch das Elektron zu; wir fragen, wie dessen Abstand R vom Mittelpunkt mit $r - r_1$ zusammenhängt. Ist v die Geschwindigkeit des Elektrons, so liegt sein Mittelpunkt zur Zeit t in der Entfernung $(t - t_1)v \cos(v, r)$ von der Ebene durch (1). Hieraus folgt sogleich:

$$R = r - r_1 - (t - t_1)v \cos(v, r),$$

und daher wegen $r = (t_0 - t)V$, $r_1 = (t_0 - t_1)V$:

$$R = (r - r_1) \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right).$$

Bei der Integration zur Bildung von Φ sind für jeden Schnitt $r = \text{const.}$ diejenigen Werte χ zu wählen, welche zu R gehören, die Integration darf also so ausgeführt werden, als wenn das Elektron mit seinem Mittelpunkt in (1) still stünde,

vorausgesetzt, dass wir uns seine Dimensionen ohne Aenderung der χ -Werte parallel r_1 im Verhältnis von

$$|R| : |r - r_1| = \left| 1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right| : 1$$

verändert denken. Die Zeichen $||$ sollen andeuten, dass die absoluten Werte zu nehmen sind. Die Variation des Nenners r kommt bei unendlich kleinen Dimensionen nicht in Betracht, so erhalten wir denn

$$\begin{aligned} \Phi_{t=t_0} &= \left(\frac{1}{r \left| 1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right|} \int d\omega \chi \right)_{t=t_0 - \frac{r}{V}} \\ &= \iota \left(\frac{1}{r \left| 1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right|} \right)_{t=t_0 - \frac{r}{V}}. \end{aligned}$$

Für Γ_v gestaltet sich alles ähnlich, wobei ιv_v für $\int d\omega \chi_v$ zu setzen ist, wir erhalten also als *Elementargesetz für ein einzelnes Elektron* das Gleichungspaar:

$$\begin{aligned} (25) \quad \Phi_{t=t_0} &= \iota \left(\frac{1}{r \left| 1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right|} \right)_{t=t_0 - \frac{r}{V}} \\ (\Gamma_v)_{t=t_0} &= \iota \left(\frac{\frac{v_v}{V}}{r \left| 1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right|} \right)_{t=t_0 - \frac{r}{V}} \end{aligned}$$

Bei der Bildung von $\cos(v, r)$ ist für r die von (0) zum Elektron hinführende Richtung zu nehmen, $v \cos(v, r)$ bedeutet also die von (0) fortweisende Componente von v .

Ganz wie zu erwarten, wird durch die Bedingung $t = t_0 - (r/V)$ für die Bestimmung von Φ bez. Γ_v diejenige frühere Lage des Elektrons ausgewählt, von welcher aus eine mit der Lichtgeschwindigkeit V sich ausbreitende Erregung zur Zeit t_0 in den betrachteten Punkt eintrifft. Eventuell giebt es mehrere solche Lagen, dann ist Φ bez. Γ_v als Summe der einzelnen Anteile zu setzen.

Solange v kleiner als die Lichtgeschwindigkeit V ist, kann $1 + v \cos(v, r)/V$ nur positiv sein. Für $v > V$ sind auch negative Werte möglich; in einem solchen Falle kommt die Bedingung zur Geltung, dass der absolute Wert gelten soll: es ist dann $-(1 + v \cos(v, r)/V)$ einzusetzen.

Sind im Felde beliebig viele Elektronen vorhanden, so addiren sich ihre durch (25) und (26) bestimmten Anteile zu Φ und Γ_v ; wir erhalten dann unter Hinzunahme von

$$K_v = -\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{1}{V} \frac{\partial \Gamma_v}{\partial t} \quad \text{und} \quad H_v = -\left(\frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Gamma_\lambda}{\partial \mu} \right),$$

wobei λ, μ, v eine beliebige cyklische Folge der $x, y, z, x \dots$ bedeutet, eine Darstellung der Felderregung, welche im Sinne der W. Weber'schen Anschauungen auf die einzelnen elektrischen Teilchen zurückgeht.

Charakteristisch ist, dass wir die Elektronen als punktförmig ansehen. In Fällen, wo dieses nicht erlaubt sein sollte, müssten wir die Elektronen in Volumenelemente auflösen, und v durch $\chi d\omega$ ersetzen.

III. Einige Anwendungen des Elementargesetzes der Elektronen.

14. *Lineare stationäre oder halbstationäre Ströme.* Um die Brauchbarkeit des Elementargesetzes (25), (26) der Elektronen zu zeigen, sollen nun noch einige Anwendungen gegeben werden. Zunächst wenden wir uns zu dem klassischen Problem der älteren Theorien, welches durch die linearen Ströme geboten wird.

Die Ströme seien stationär, ihre Leiter in *Ruhe*. Um Φ und Γ für den Punkt (0) zu bilden, ist es unsere Aufgabe, die Anteile, welche durch das Elementargesetz angegeben werden, über alle Elektronen zu summieren. Wir denken uns um (0) zwei Kugelflächen r und $r - dr$ construiert, welche das Linienelement $d\lambda$ aus einem der Stromleiter heraus schneiden, und für die Anwendung des Elementargesetzes das Zeitelement zwischen

$$t = t_0 - \frac{r}{V} \quad \text{und} \quad t + dt = t_0 - \frac{r - dr}{V}$$

von der Länge

$$dt = \frac{dr}{V}$$

abgrenzen. Welche Elektronen kommen für dt in Betracht? Da wir nicht durchweg gleiche Geschwindigkeit voraussetzen dürfen, betrachten wir zunächst diejenige Gruppe, deren Geschwindigkeit parallel zu $d\lambda$ zwischen v und $v + dv$ liegt.

$d\chi$ sei die Liniendichte ihrer Elektrizität, also $d\chi d\lambda$ die Elektrizitätsmenge, welche sie für $d\lambda$ ergeben. Ein Elektron, welches sich zur Zeit t auf der Kugelfläche r , im Endpunkt von $d\chi$ befand, ist zur Zeit $t + dt$ um

$$v dt = \frac{v}{V} dr = \frac{v}{V} \cos(v, r) d\lambda$$

herausgerückt. Bei der Summation gehören also zu dt bez. dr und $d\lambda$ nicht nur die Elektronen auf einer Strecke $d\lambda$, sondern alle auf einer Strecke

$$d\lambda + v dt = d\lambda \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right),$$

und $d\lambda$ ergibt demgemäss zu Φ den Beitrag:

$$d\Phi = \int d\chi \frac{d\lambda \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right)}{r \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right)} = \frac{d\lambda \int d\chi}{r} = \frac{de}{r},$$

wenn de die jeweilig auf $d\lambda$ befindliche Elektrizitätsmenge bedeutet. Für Φ gilt hiernach auch in stationären linearen Stromsystemen die Formel der Elektrostatik:

$$\Phi = \int \frac{de}{r}.$$

Um Γ zu bilden, müssen wir bedenken, dass die Elektronen mit einer zwischen v und $v + dv$ liegenden Geschwindigkeit, zur Stromstärke i den Beitrag $di = v d\chi$ liefern, also zu Γ_v den Beitrag:

$$\frac{d\chi d\lambda \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right)}{v \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right)} \frac{v \cos(v, r)}{V} = \frac{di d\lambda \cos(v, r)}{V r}.$$

Hieraus folgt für $d\lambda$ der Anteil

$$d\Gamma_v = \frac{i}{V} \cdot \frac{d\lambda \cos(v, r)}{r},$$

und für das Stromsystem im ganzen die bekannte Formel:

$$\Gamma_v = \int \frac{i}{V} \cdot \frac{d\lambda \cos(v, r)}{r},$$

welche die Verteilung der magnetischen Kraft angiebt und in Verbindung mit dem zweiten Satz von Abschnitt 8 über die

mechanische Einwirkung des magnetisch erregten Aethers auch die ponderomotorischen Kräfte zwischen Stromsystemen der Erfahrung entsprechend darstellt.

Verändern sich die Ströme sehr langsam, sind sie „*halbstationär*“, so werden unsere Formeln für Φ und Γ doch noch näherungsweise gültig bleiben. Wir erhalten dann mittels

$$K_v = - \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{1}{V} \frac{\partial \Gamma_v}{\partial t}$$

in dem zweiten Gliede rechts die „*inducirte elektromotorische Kraft*“. Integriren wir über einen geschlossenen Ring, so ergibt sich sofort die Neumann'sche Formel, zum Zeichen, dass unsere Rechnung auch hier zu richtigen Resultaten führt. Bei der Induction in bewegten Körpern kommt gemäss dem zweiten Satz in Abschnitt 8 ein Anteil wegen der Bewegung im magnetischen Felde hinzu, welcher ebenfalls der Erfahrung genau entspricht.

15. *Elementargesetz für Volumenelemente.* Für körperliche Stromsysteme muss das Elementargesetz der Elektronen zu seinem Ausgangspunkt, dem in Abschnitt 11 angegebenen Elementargesetz für Volumenelemente zurückführen. Das dem wirklich so ist, kann man leicht nachweisen, wenn man ähnlich wie im vorigen Abschnitt die Elektronen bei der Summation ihrer Anteile zu Φ und Γ_v für den Raumpunkt (0) und die Zeit t_0 nach den in Rechnung kommenden Entfernungen r und Zeiten t ordnet.

Wieder mögen

$$t = t_0 - \frac{r}{V}, \quad t + dt = t_0 - \frac{r - dr}{V}, \quad dt = \frac{dr}{V}$$

zusammengehören. v_r sei die von (0) fortgerichtete Geschwindigkeitscomponente. Wir richten die Untersuchung zunächst auf die Elektronen, für welche v_r zwischen v_r und $v_r + dv_r$ liegt; die Raumdichte ihrer Elektricität sei $d\chi$. Die zur Zeit t im Abstände r befindliche Schicht hat zur Zeit $t + dt$ einen um

$$v_r dt = \frac{v_r}{V} dr = \frac{v}{V} \cos(v, r) dr$$

grösseren Abstand erreicht. Für dr , dt kommt hiernach eine Elektronenschicht von der Dicke

$$dr + \frac{v}{V} \cos(v, r) dr = \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r)\right) dr$$

in Rechnung. Ihr Anteil an Φ ist

$$d\Phi = \int d\sigma dr \frac{d\chi \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r)\right)}{r \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r)\right)} = \int d\sigma dr \frac{d\chi}{r},$$

wenn $d\sigma$ ein Flächenelement bezeichnet. Integrieren wir über χ und r , so folgt:

$$\Phi_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r} \chi_{t=t_0 - \frac{r}{V}},$$

das heisst, die frühere Formel. Für Γ_v ergibt sich ähnlich:

$$d\Gamma_v = \int d\sigma dr \frac{d\chi v_v \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r)\right)}{r V \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r)\right)} = \int d\sigma dr \frac{d\chi v_v}{r V}.$$

Nun ist $d\chi v_v$ der Anteil der herausgegriffenen Elektronengruppe an $d\gamma_v$; benutzen wir dies, integrieren über γ und r , so folgt der noch fehlende Satz:

$$(\Gamma_v)_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r} \left(\frac{\gamma_v}{V}\right)_{t=t_0 - \frac{r}{V}}.$$

16. *Ein einzelnes Elektron in gleichförmiger geradliniger Bewegung.*¹⁾ v sei die Geschwindigkeit. Wir beziehen uns auf ein Coordinatensystem, dessen z -Axe $\parallel v$ ist, und dessen Anfangspunkt im Orte des Elektrons zu derjenigen Zeit t_0 liegt, für welche wir die Verteilung von Φ und Γ suchen. So wird sich unmittelbar die Verteilung der elektrodynamischen Erregungen relativ zum Elektron ergeben.

Eine ganz einfache Rechnung lehrt, dass für den Raumpunkt (0) diejenige Lage (1) des Elektrons in Betracht zu ziehen ist, für welche r den Wert:

$$\left(\frac{v}{V} z + \sqrt{(x^2 + y^2) \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) + z^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right)^{-1}$$

und

$$r \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r)\right)$$

1) Dasselbe Problem für Ueberlichtgeschwindigkeit wird ebenfalls im Jubiläumbande für H. A. Lorentz (p. 652) und völlig dem hier eingeschlagenen Wege entsprechend von meinem verehrten Göttinger Collegen Th. Des Coudres behandelt (Zusatz 7. III. 1901).

den Wert

$$\sqrt{(x^2 + y^2) \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) + z^2}$$

hat; wir erhalten also:

$$\Phi = \frac{e}{\sqrt{(x^2 + y^2) \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) + z^2}},$$

$$\Gamma_v = \frac{v_v}{V} \frac{e}{\sqrt{(x^2 + y^2) \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) + z^2}}.$$

Hieraus in Verbindung mit

$$K_v = -\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{1}{V} \frac{\partial \Gamma_v}{\partial t}, \quad H_v = -\left(\frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Gamma_\lambda}{\partial \mu}\right)$$

$$\lambda, \mu, v = \dots x, y, z, x, y, \dots$$

folgt in der That die bekannte Verteilung der Felderregungen, wenn man noch beachtet, dass wegen des von uns angenommenen sich bewegenden Coordinatensystems

$$\frac{\partial \Gamma_v}{\partial t} \quad \text{durch} \quad -V \frac{\partial \Gamma_v}{\partial z}$$

zu ersetzen ist.

17. *Schwingendes Elektron.* Zum Schluss mag der für die Optik interessante Fall betrachtet werden, dass ein Elektron Sinusschwingungen vollführt. Solche Schwingungen der allgemeinsten Art lassen sich für die Theorie in lineare Schwingungen auflösen, wir können uns daher auf die Untersuchung *linearer Schwingungen* beschränken.

Der Anfangspunkt des Coordinatensystems möge in den Schwingungsmittelpunkt gelegt werden, die z -Axe der Schwingungslinie parallel. Dann dürfen wir schreiben:

$$\zeta = Z \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wobei ζ die jeweilige z -Coordinate des Elektrons, Z der grösste Ausschlag, T die Periode ist. Das ausgesandte Licht hat die Wellenlänge $\lambda = VT$.

ρ sei der Abstand des Punktes (0) vom Anfangspunkt der Coordinaten, also vom Schwingungsmittelpunkt. *Wir beschränken*

uns auf den Fall, dass Z als unendlich klein gegenüber λ und ϱ gelten darf. Dann ist in den Formeln (25), (26) rechts:

$$\frac{1}{r \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right)} \quad \text{durch} \quad \frac{1}{\varrho} \left(1 + \frac{\zeta \pi}{\varrho^2} + \frac{v \pi}{V \varrho} \right)$$

und

$$t = t_0 - \frac{r}{V} \quad \text{durch} \quad t = t_0 - \frac{\varrho}{V} = t_0 - T \frac{\varrho}{\lambda}$$

zu ersetzen, und wir erhalten, wenn in den Schlussformeln t an Stelle von t_0 geschrieben wird:

$$\Phi = \frac{v}{\varrho} + \frac{v Z}{\varrho} \frac{\pi}{\varrho} \left(\frac{1}{\varrho} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda} \right) + \frac{2\pi}{\lambda} \cos \left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda} \right) \right)$$

$$\Gamma_x = 0, \quad \Gamma_y = 0, \quad \Gamma_z = \frac{v Z}{\varrho} \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\varrho}{\lambda} \right).$$

Die Formeln liefern einen wohlbekannten Fall der Ausstrahlung von einem „*leuchtenden Punkt*“.

Ueber die ausgestrahlte Energie giebt am einfachsten der Poynting'sche Satz Aufschluss. Wenden wir ihn auf sehr grosse Kugelflächen an, so folgt:

$$- \frac{dE}{dt} = \frac{e^2 Z^2}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 V,$$

wobei $-dE$ der Energieverlust des schwingenden Systems während dt bezeichnet.

Hieran knüpft sich eine interessante Folgerung über die *Dämpfung der Schwingungen eines Elektrons* die unter der Wirkung einer mit der Entfernung proportionalen Centralkraft erfolgen. Damit die abgeleiteten Sätze näherungsweise gültig bleiben, müssen wir annehmen, dass die Dämpfung nur gering ist. Bedeutet m die effective Masse, $k\zeta$ die zurückziehende Kraft, so ist abgesehen von dem geringfügigen Einfluss der Dämpfung:

$$m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -k\zeta$$

zu setzen, woraus folgt:

$$\frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2,$$

und für die Energie der Schwingungen:

$$E = \frac{1}{2} k Z^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 Z^2 m.$$

In Verbindung mit unserer Formel für $-dE/dt$ ergibt sich so für die „Relaxationszeit“, das heisst die Zeit, in welcher die Amplitude auf den $1/2,818 \dots$ Wert ihrer Grösse herabsinkt, der Wert

$$\tau = 2 \frac{E}{\frac{dE}{dt}} = \frac{3}{4\pi^2} \cdot \frac{m}{\iota} \cdot \frac{\lambda^2 V}{\iota},$$

und für den Weg, den das Licht während der Relaxationszeit zurücklegt, der Wert:

$$w = \tau V = \frac{3}{4\pi^2} \cdot \frac{m}{\iota} \cdot \frac{\lambda^2 V^2}{\iota}.$$

Wir wollen diese Formel auf den Fall der Aussendung des Lichtes einer Spectrallinie anwenden. λ setzen wir rund gleich $1/20000$; für ι/m mag der Wert $4 \cdot 10^{17}$ angenommen werden, welcher dem Zeemanphänomen und den Kathodenstrahlen ungefähr entspricht. ι ist nur ungenau bekannt; je nachdem man für die Anzahl der Molecüle in einem Cubikcentimeter Gas bei 0°C. und unter dem Normaldruck

$$N = 10^{19} \quad \text{oder} \quad N = 10^{20}$$

setzt — womit die möglich scheinenden Grenzen wohl etwa gekennzeichnet sind —, ergibt sich:

$$\iota = 13 \cdot 10^{-10} \quad \text{oder} \quad \iota = 1,3 \cdot 10^{-10},$$

und wir erhalten:

$$w = 3 \text{ m.} \quad \text{oder} \quad w = 30 \text{ m.}$$

Hiermit können Beobachtungen über Interferenzen bei grossen Gangunterschieden verglichen werden. Als höchste Wegdifferenz, bei welcher noch Interferenzen zu erkennen waren, ergab sich etwa $1/2$ Meter.

Wir werden daraus schliessen müssen, dass ausser der Abnahme der Schwingungen infolge der Lichtaussendung noch andere störende Ursachen wirksam waren, die stärker zur Geltung kamen. Setzen wir, was den Beobachtungen etwa entsprechen wird:

$$w > 0,5 \text{ m.},$$

so folgt:

$$\iota < 80 \cdot 10^{-10}, \quad N > \frac{1}{8} 10^{19}.$$

(Eingegangen 5. Februar 1901.)